

Απαντήσεις

Παροράματα..... σελ. 186

Κεφάλαιο 1: Κρούσεις

ΘΕΜΑ Α

- 1.1 γ) 1.2 β) 1.3 β) 1.4 α)
 1.5 δ) 1.6 γ) 1.7 γ) 1.8 α)
 1.9 γ) 1.10 β) 1.11 δ) 1.12 γ)
 1.13 α) 1.14 β) 1.15 δ) 1.16 δ)
 1.17 β) 1.18 γ) 1.19 β) 1.20 δ)
 1.21 δ) 1.22 α) 1.23 δ) 1.24 δ)

- 1.25 α) Λ, β) Σ, γ) Σ, δ) Λ, ε) Σ
 1.26 α) Λ, β) Λ, γ) Λ, δ) Σ, ε) Σ
 1.27 α) Σ, β) Σ, γ) Λ, δ) Σ, ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

1.28 Σωστή απάντηση είναι η γ).

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση της σφαίρας από τη θέση (I) μέχρι τη θέση (II). Προκύπτει:

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 - 0 = m_1gl \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gl}$$

Ισχύει:

$$\sin\varphi = \frac{l-h}{l} \Rightarrow 0,64 = \frac{l-h}{l} \Rightarrow h = 0,36l$$

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση της σφαίρας από τη θέση (II) μέχρι τη θέση (III). Προκύπτει:

$$0 - \frac{1}{2}m_1v_1'^2 = -m_1gh \Rightarrow v_1' = \sqrt{2gh} \Rightarrow$$

$$v_1' = 0,6\sqrt{2gl}$$

Από την Α.Δ.Ο. για την κρούση μεταξύ σφαίρας και σώματος έχουμε:

$$m_1v_1 + 0 = -m_1v_1' + 8m_1v_2' \Rightarrow$$

$$1,6\sqrt{2gl} = 8v_2' \Rightarrow v_2' = 0,2\sqrt{2gl}$$

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του σώματος πάνω στο δάπεδο:

$$0 - \frac{1}{2}m_2v_2'^2 = -\mu m_2gs \Rightarrow s = 0,08l$$

1.29 Σωστή απάντηση είναι η α).

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση της σφαίρας Σ₁:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - 0 = mgl \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gl} \Rightarrow v_1 = 3 \frac{m}{s}$$

Αμέσως μετά την ελαστική της κρούση με τη σφαίρα Σ₁ η σφαίρα Σ₂ αποκτά ταχύτητα $\vec{v}_2'$.

Ισχύει:

$$v_2' = \frac{2m_1v_1}{m_1 + m_2} \Rightarrow v_2' = \frac{2mv_1}{m + 2m} \Rightarrow v_2' = \frac{2v_1}{3}$$

Αμέσως μετά την ελαστική της κρούση με τη σφαίρα Σ₂ η σφαίρα Σ₃ αποκτά ταχύτητα $\vec{v}_3'$. Ισχύει:

$$v_3' = \frac{2m_2v_2'}{m_3 + m_2} \Rightarrow v_3' = \frac{4m \frac{2v_1}{3}}{4m + 2m} \Rightarrow$$

$$v_3' = \frac{4v_1}{9} \Rightarrow v_3' = \frac{4}{3} \frac{m}{s}$$

1.30 Σωστή απάντηση είναι η β).

Αφού η κρούση είναι κεντρική και ελαστική, η ταχύτητα της σφαίρας m₂ μετά την κρούση θα

$$\text{είναι: } v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad (1).$$

Το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας της σφαίρας Σ₁ που μεταβιβάζεται στη σφαίρα Σ₂ είναι:

$$\frac{K_2'}{K_1} \cdot 100\% = \frac{\frac{1}{2}m_2v_2'^2}{\frac{1}{2}m_1v_1^2} \cdot 100\% =$$

$$\stackrel{(1)}{=} \frac{m_2 \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \right)^2}{m_1 v_1^2} \cdot 100\% = \frac{4m_1 \cdot m_2}{(m_1 + m_2)^2} \cdot 100\% \Rightarrow$$

$$\frac{4m_1 \cdot m_2}{(m_1 + m_2)^2} \cdot 100\% = 75\% \Rightarrow \frac{4m_1 \cdot m_2}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{3}{4} \Rightarrow$$

$$3m_1^2 - 10m_2 \cdot m_1 + 3m_2^2 = 0$$

Η τελευταία εξίσωση αποτελεί τριώνυμο ως προς m_1 . Λύσεις είναι:

$$m_1 = 3m_2 \text{ και } m_1 = \frac{m_2}{3}$$

Αφού το μέτρο της μεταβολής της ορμής της σφαίρας Σ_1 είναι μεγαλύτερο από το μέτρο της αρχικής της ορμής, σημαίνει ότι μετά την κρούση η σφαίρα Σ_1 έχει αλλάξει φορά κίνησης και για να συμβεί αυτό πρέπει $m_1 < m_2$. Άρα τελικά:

$$m_1 = \frac{m_2}{3} \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{3}$$

1.31 Σωστή απάντηση είναι η γ).

Η δυναμική ενέργεια ελαστικής παραμόρφωσης των δύο σφαιρών αποκτά τη μέγιστη τιμή της τη στιγμή που οι σφαίρες που συγκρούονται αποκτούν ίδια ταχύτητα μέτρου V .

Από την Α.Δ.Ο. προκύπτει:

$$\vec{p}_{\text{ολ}(\text{πριν})} = \vec{p}_{\text{ολ}(\text{μετά})} \Rightarrow m v - m \frac{v}{2} = m V + m V \Rightarrow$$

$$V = \frac{v}{4}$$

Υπολογίζουμε τη μέγιστη δυναμική ενέργεια ελαστικής παραμόρφωσης με τη βοήθεια της Αρχής Διατήρησης της Ενέργειας. Ισχύει:

$$K_{\text{ολ}(\text{αρχ})} = K_{\text{ολ}(\text{τελ})} + U_{\text{max}} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} m \left(\frac{v}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} m V^2 + \frac{1}{2} m V^2 + U_{\text{max}} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} m \left(\frac{v}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{v}{4} \right)^2 + \frac{1}{2} m \left(\frac{v}{4} \right)^2 + U_{\text{max}} \Rightarrow$$

$$U_{\text{max}} = \frac{9m v^2}{16}$$

1.32 Σωστή απάντηση είναι η γ).

Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ ισχύει:

$$\frac{U}{K} = \frac{2}{43} \Rightarrow \frac{m_1 g l}{\frac{1}{2} m_1 v_0^2} = \frac{2}{43} \Rightarrow v_0 = \sqrt{43 g l}$$

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του Σ_1 πριν την κρούση. Προκύπτει:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 v_0^2 = m_1 g l \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 43 g l = m_1 g l \Rightarrow v_1 = 3\sqrt{5 g l}$$

Το σώμα Σ_1 μετά την κρούση διαγράφει κυκλική τροχιά. Στο ανώτερο σημείο της τροχιάς του ασκούνται σε αυτό το βάρος του $\vec{B}_1$ και η τάση του νήματος $\vec{T}$. Η συνισταμένη των παραπάνω δυνάμεων έχει το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης.

Προκύπτει:

$$\Sigma F = F_c \Rightarrow T + B_1 = \frac{m_1 v^2}{l} \Rightarrow T = \frac{m_1 v^2}{l} - m_1 g$$

Για να εκτελέσει το σώμα Σ_1 ανακύκλωση θα πρέπει να φτάσει στο ανώτερο σημείο με το νήμα τεντωμένο ($T \geq 0$). Ισχύει:

$$T \geq 0 \Rightarrow \frac{m_1 v^2}{l} - m_1 g \geq 0 \Rightarrow v \geq \sqrt{l g}$$

Το σώμα Σ_1 μόλις που εκτελεί ανακύκλωση επομένως για το μέτρο της ταχύτητάς του στο ανώτερο σημείο θα έχουμε:

$$v_{\text{min}} = \sqrt{l g}$$

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μεταβολής Κινητικής Ενέργειας (Θ.Μ.Κ.Ε.), για την κίνηση του σώματος Σ_1 από το σημείο που βρίσκεται αμέσως μετά την κρούση μέχρι το ανώτερο σημείο της κυκλικής τροχιάς του, για να υπολογίσουμε το μέτρο της ταχύτητας v'_1 του σώματος (1) αμέσως μετά την κρούση:

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{B_1} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{\text{min}}^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 = -m_1 g 2l \Rightarrow$$

$$l g - v_1'^2 = -4 g l \Rightarrow |v_1'| = \sqrt{5 l g}$$

Ισχύει:

$$v'_1 = \frac{(m_1 - m_2) v_1}{m_1 + m_2} \Rightarrow -\sqrt{5 l g} = \frac{(m_1 - m_2) 3\sqrt{5 g l}}{m_1 + m_2} \Rightarrow$$

$$m_2 = 2m_1$$

1.33 Σωστή απάντηση είναι η γ).

Οι εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται σε κάθε μαθητή (βάρος και κάθετη δύναμη στήριξης) έχουν συνισταμένη ίση με μηδέν, ενώ οι δυνάμεις που ασκεί ο ένας μαθητής στον άλλον μέσω του σχοινιού είναι εσωτερικές. Επομένως, το σύστημα των δύο μαθητών Α, Β είναι μονωμένο. Από την Α.Δ.Ο. Προκύπτει:

$$\vec{p}_{\text{αρχ}} = \vec{p}_{\text{τελ}} \Rightarrow 0 = (M_A + M_B) v_K \Rightarrow v_K = 0$$

1.34 Σωστή απάντηση είναι η β).

Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Μ.Ε. για να υπολογίσουμε το μέτρο της ταχύτητας $\bar{v}$ με την οποία φτάνει το σύστημα των δύο σφαιρών στο έδαφος.

Ως επίπεδο αναφοράς για τη βαρυτική δυναμική ενέργεια θεωρούμε το έδαφος. Ισχύει:

$$(m_1 + m_2) gH = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 \Rightarrow v = \sqrt{2gH} \quad (1)$$

Θεωρούμε ως θετική την κατακόρυφη φορά προς τα πάνω.

Η σφαίρα Σ_2 συγκρούεται ελαστικά με το δάπεδο, επομένως η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας της μετά την κρούση της με αυτό είναι:

$$v_2 = +v$$

Στη συνέχεια έχουμε μια δεύτερη ελαστική κρούση μεταξύ της Σ_2 και της σφαίρας Σ_1 που κινείται με ταχύτητα αλγεβρικής τιμής:

$$v_1 = -v$$

Μετά την κρούση η σφαίρα Σ_1 θα έχει ταχύτητα αλγεβρικής τιμής:

$$v'_1 = \frac{(m_1 - m_2) v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow v'_1 = \frac{-(m - 2m)v + 4mv}{m + 2m} \Rightarrow v'_1 = \frac{5v}{3} \quad (2)$$

Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Μ.Ε. για την ανοδική κίνηση της σφαίρας μέχρι να φτάσει στο μέγιστο ύψος h_{max} :

$$\frac{1}{2} m_1 v'^2_1 = m_1 g h_{\text{max}} \Rightarrow v'_1 = \sqrt{2g h_{\text{max}}} \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (1), (2), (3) προκύπτει:

$$h_{\text{max}} = \frac{25}{9} H$$

1.35 Σωστή απάντηση είναι η β).

Για την αρχική κινητική ενέργεια του σώματος μάζας m_1 ισχύει:

$$K_0 = \frac{1}{2} m v_0^2 \quad (1)$$

Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ο. για την πλαστική κρούση των σωμάτων 1, 2. Προκύπτει:

$$m_1 v_0 = (m_1 + m_2) v_{\text{συσ}} \quad (1)$$

Επειδή κατά την κίνηση του συσσωματώματος πάνω στη σανίδα, στο σύστημα σανίδα-συσσωμάτωμα δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις που να μεταβάλλουν την ορμή του, μπορούμε να εφαρμόσουμε την Α.Δ.Ο. για το σύστημα (από τη στιγμή που ξεκίνησε το συσσωμάτωμα να κινείται μέχρι τη στιγμή που σταματάει να κινείται σε σχέση με τη σανίδα). Ισχύει:

$$(m_1 + m_2) v_{\text{συσ}} = (m_1 + m_2 + m_3) v_K \Rightarrow$$

$$m v_0 = 10 m v_K \Rightarrow v_K = \frac{v_0}{10}$$

Η συνολική θερμότητα που εκλύεται υπολογίζεται από τη σχέση:

$$Q = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2 + m_3) v_K^2 \Rightarrow$$

$$Q = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{1}{2} 10 m \left(\frac{v_0}{10} \right)^2 \Rightarrow Q = 0,9 K_0$$

1.36 Σωστή απάντηση είναι η γ).

Έστω ότι d είναι η απόσταση των δύο σφαιρών, κατά την πρώτη τους κρούση, από τον λείο τοίχο. Για να συγκρουστούν πάλι σε απόσταση $5d$ από αυτόν, θα πρέπει η σφαίρα Σ_1 μετά την πρώτη της κρούση να κινηθεί με ταχύτητα μέτρου $\bar{v}'_1$ αντίθετης φοράς από την αρχική ταχύτητα $\bar{v}_1$.

Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ο. για την πρώτη κρούση μεταξύ Σ_1 και Σ_2 . Προκύπτει:

$$m_1 v_1 = -m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \quad (1)$$

Από την αρχή διατήρησης της κινητικής ενέργειας έχουμε:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 v'^2_2 \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει:

$$v'_1 = \frac{(m_2 - m_1) v_1}{m_1 + m_2} \quad \text{και} \quad v'_2 = \frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

Το διάστημα που θα διανύσει η Σ_1 μεταξύ της πρώτης και της δεύτερης κρούσης είναι ίσο με $4d$. Ισχύει:

$$4d = v'_1 \Delta t \Rightarrow 4d = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_1 \Delta t \quad (3)$$

Το διάστημα που θα διανύσει η Σ_2 μεταξύ της πρώτης και της δεύτερης κρούσης είναι ίσο με $6d$. Ισχύει:

$$6d = v'_2 \Delta t \Rightarrow 6d = \frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2} \Delta t \quad (4)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (3), (4) έχουμε:

$$\frac{4d}{6d} = \frac{\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_1 \Delta t}{\frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2} \Delta t} \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{3}{7}$$

1.37 Σωστή απάντηση είναι η β).

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση της σφαίρας Σ_1 , για να υπολογίσουμε το μέτρο της ταχύτητάς της λίγο πριν την κρούση. Ισχύει:

$$\frac{1}{2} m v_1^2 = mgl \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gl}$$

Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ο. για την κρούση. Έχουμε:

$$m v_1 = m v'_1 + 2m v'_2 \Rightarrow v_1 = v'_1 + 2v'_2 \quad (1)$$

Κατά τη διάρκεια της κρούσης τα $2/3$ της αρχικής ενέργειας της Σ_1 μετατρέπονται σε θερμική ενέργεια των δύο σφαιρών. Προκύπτει:

$$\frac{1}{3} \frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} m v_1'^2 + \frac{1}{2} 2m v_2'^2 \Rightarrow$$

$$v_1^2 = 3v_1'^2 + 6v_2'^2 \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) έχουμε:

$$v_1' = v_2' = \frac{v_1}{3} = \frac{\sqrt{2gl}}{3}$$

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση της Σ_2 αμέσως μετά την κρούση. Προκύπτει:

$$0 - \frac{1}{2} 2m v_2'^2 = -2mgh \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{v_1^2}{9} = gh \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \frac{2gl}{9} = gh \Rightarrow h = \frac{l}{9}$$

1.38 Σωστή απάντηση είναι η γ).

Κάθοδος: Ισχύει:

$$\text{συν}\varphi = \frac{l-h}{l} \Rightarrow 0,82 = \frac{l-h}{l} \Rightarrow h = 0,18l$$

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση της σφαίρας. Προκύπτει:

$$\frac{1}{2} m v_1^2 - 0 = mgh \Rightarrow v_1 = \sqrt{0,36gl} \Rightarrow$$

$$v_1 = 0,6\sqrt{gl}$$

Ανοδος: Ισχύει:

$$\text{συν}\theta = \frac{l-h'}{l} \Rightarrow 0,92 = \frac{l-h'}{l} \Rightarrow h' = 0,08l$$

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση της σφαίρας. Προκύπτει:

$$0 - \frac{1}{2} m v_2^2 = -mgh' \Rightarrow v_2 = \sqrt{0,16gl} \Rightarrow$$

$$v_2 = 0,4\sqrt{gl}.$$

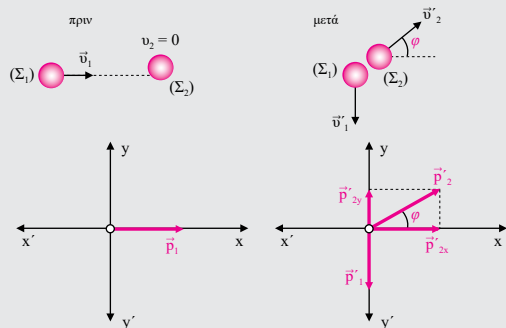
Το ποσοστό επί τοις εκατό μείωσης της κινητικής ενέργειας της σφαίρας κατά την κρούση της με τον τοίχο είναι ίσο με:

$$\Pi\% = \frac{\frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_2^2}{\frac{1}{2} m v_1^2} 100\% \Rightarrow$$

$$\Pi\% = \frac{0,36gl - 0,16gl}{0,36gl} 100\% \Rightarrow$$

$$\Pi\% = \frac{500}{9}\%$$

1.39 Σωστή απάντηση είναι η β).



Η κρούση είναι ελαστική επομένως ισχύει η αρχή διατήρησης της κινητικής ενέργειας:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \Rightarrow$$

$$mv_1^2 = mv_1'^2 + 3mv_2'^2 \Rightarrow v_1^2 = v_1'^2 + 3v_2'^2 \quad (1)$$

Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ο. στον άξονα x' :

$$p'_{2x} = p_1 \Rightarrow p'_{2x} = mv_1$$

Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ο. στον άξονα $y'y'$:

$$0 = p_{2y} - p'_1 \Rightarrow p'_{2y} = mv'_1$$

Ισχύει:

$$p_2'^2 = p_{2x}'^2 + p_{2y}'^2 \Rightarrow$$

$$(3mv_2')^2 = (mv_1')^2 + (mv_1')^2 \Rightarrow$$

$$9v_2'^2 = v_1'^2 + v_1'^2 \quad (2)$$

Επιλύοντας το σύστημα των εξισώσεων (1),

(2) προκύπτει:

$$v_1' = \frac{\sqrt{2}v_1}{2}, \quad v_2' = \frac{\sqrt{6}v_1}{6}$$

1.40 Σωστή απάντηση είναι η γ).

1η περίπτωση.

Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ο. στον οριζόντιο άξονα x' :

$$mv_\beta \sin \varphi + Mv_0 = (M+m)V \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} 90mv_0 + 49mv_0 = 50mV \Rightarrow V = 1,88v_0 \quad (1)$$

2η περίπτωση.

Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ο. στον οριζόντιο άξονα x' :

$$Mv_0 - mv_\beta \sin \varphi = (M+m)V \Rightarrow$$

$$49mv_0 - \frac{1}{2} 90mv_0 = 50mV' \Rightarrow$$

$$V' = 0,08v_0 \quad (2)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει:

$$\frac{V}{V'} = 23,5$$

1.41 Σωστή απάντηση είναι η α).

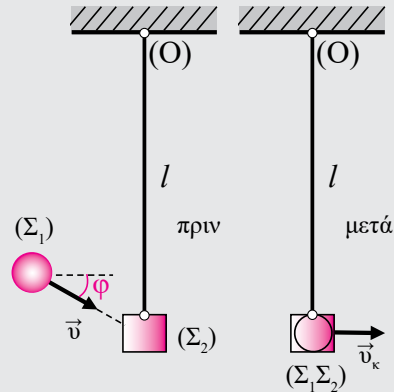
Ισχύει:

$$K_0 = \frac{1}{2} mv_0^2$$

Για την πλαστική κρούση εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ο. στον οριζόντιο άξονα x' . Έχουμε:

$$mv \sin \varphi = 2mv_\kappa \Rightarrow \frac{\sqrt{3}v}{2} = 2v_\kappa \Rightarrow$$

$$v_\kappa = \frac{\sqrt{3}v}{4}$$



Η θερμότητα που εκλύεται κατά την κρούση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$Q = \frac{1}{2} mv_0^2 - \frac{1}{2} 2mv_2'^2 \Rightarrow$$

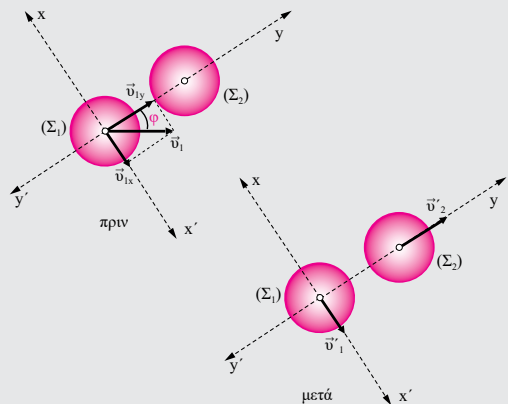
$$Q = \frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} 2m \frac{3v^2}{16} \Rightarrow Q = K_0 - \frac{3K_0}{8} \Rightarrow$$

$$Q = \frac{5K_0}{8}$$

Προκύπτει:

$$\frac{Q}{K_0} = \frac{\frac{5K_0}{8}}{K_0} \Rightarrow \frac{Q}{K_0} = \frac{5}{8}$$

1.42 Σωστή απάντηση είναι η β).



Αναλύουμε την ταχύτητα $\bar{v}_1$ σε δύο συνιστώσες, την $\bar{v}_{1y}$ κατά τη διάκεντρο τη στιγμή της κρούσης ($y'y'$) και την $\bar{v}_{1x}$ κάθετη προς τη διεύθυνση της διακέντρου ($x'x$).

Για τα μέτρα των δύο συνιστωσών ισχύει:

$$v_{1x} = v_1 \eta \mu \varphi, v_{1y} = v_1 \sigma \nu \eta \varphi$$

Οι σφαίρες είναι ελαστικές και λείες, επομένως, οι δυνάμεις που δέχονται στη διάρκεια της επαφής τους έχουν τη διεύθυνση της διακέντρου. Άρα, η συνιστώσα $\vec{v}_{1x}$ της σφαίρας Σ_1 παραμένει σταθερή.

Επειδή οι σφαίρες έχουν ίσες μάζες και είναι ελαστικές κατά τη διεύθυνση της διακέντρου, ανταλλάσσουν ταχύτητες. Καταλήγουμε στο συμπέρασμα πως η σφαίρα Σ_1 αμέσως μετά την κρούση θα κινηθεί με ταχύτητα μέτρου $v'_1 = v_1 \eta \mu \varphi$, με διεύθυνση κάθετη προς αυτήν της διακέντρου, ενώ η σφαίρα Σ_2 θα κινηθεί, κατά τη διεύθυνση της διακέντρου, με ταχύτητα μέτρου $v'_2 = v_1 \sigma \nu \eta \varphi$.

1.43 Σωστή απάντηση είναι η α).

Η σφαίρα Σ_1 κινείται ευθύγραμμα και ομαλά από το ΑΒ έως το ΓΔ, επομένως ισχύει:

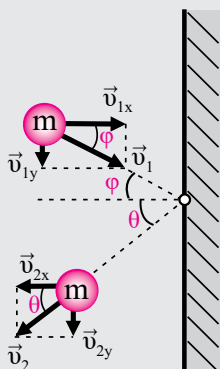
$$t_1 = \frac{AG}{v}$$

Για τη σφαίρα Σ_2 ισχύει:

$$t_2 = \frac{AG}{v_x} \Rightarrow t_2 = \frac{AG}{v \sigma \nu \eta 60^\circ} \Rightarrow t_2 = \frac{AG}{\frac{v}{2}}$$

$$t_2 = 2t_1$$

1.44 Σωστή απάντηση είναι η β).



κάτοψη

Εφαρμόζοντας την Α.Δ.Ο. στον κατακόρυφο άξονα $y'y'$ έχουμε:

$$m v_1 \eta \mu \varphi = m v_2 \eta \mu \theta \Rightarrow v_1 0,6 = 0,75 v_1 \eta \mu \theta \Rightarrow \eta \mu \theta = 0,8$$

Ισχύει:

$$\eta \mu^2 \theta + \sigma \nu^2 \theta = 1 \Rightarrow \sigma \nu \eta \theta = \sqrt{1 - \eta \mu^2 \theta} \Rightarrow$$

$$\sigma \nu \eta \theta = \sqrt{1 - 0,64} \Rightarrow \sigma \nu \eta \theta = 0,6$$

$$\eta \mu^2 \varphi + \sigma \nu^2 \varphi = 1 \Rightarrow \sigma \nu \eta \varphi = \sqrt{1 - \eta \mu^2 \varphi} \Rightarrow$$

$$\sigma \nu \eta \varphi = \sqrt{1 - 0,36} \Rightarrow \sigma \nu \eta \varphi = 0,8$$

Για τη μεταβολή της ορμής του σφαιριδίου, λόγω της κρούσης, έχουμε:

$$\Delta \vec{p} = \Delta \vec{p}_x + \Delta \vec{p}_y \Rightarrow \Delta \vec{p} = \Delta \vec{p}_x + \vec{0} \Rightarrow$$

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}_{x, \text{τελ}} - \vec{p}_{x, \text{αρχ}} \Rightarrow$$

$$\Delta p = m v_2 \sigma \nu \eta \theta - (-m v_1 \sigma \nu \eta \varphi) \Rightarrow$$

$$\Delta p = m \cdot 0,75 \cdot v_1 \cdot 0,6 + m \cdot v_1 \cdot 0,8 \Rightarrow$$

$$\Delta p = 1,25 m v_1$$

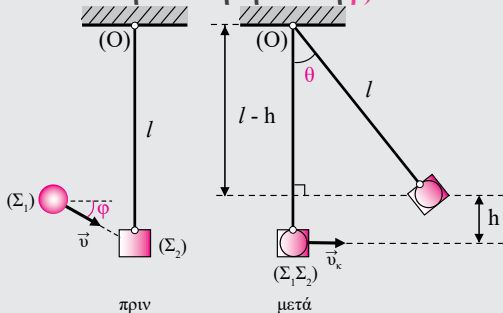
Το μέτρο της μεταβολής της ορμής του σφαιριδίου, εξαιτίας της κρούσης με το δάπεδο, είναι:

$$|\Delta p| = 1,25 m v_1$$

Το μέτρο της μέσης δύναμης που δέχεται το σφαιρίδιο από τον τοίχο, κατά την κρούση, είναι:

$$|F| = \frac{|\Delta p|}{\Delta t} \Rightarrow |F| = \frac{1,25 m v_1}{\Delta t}$$

1.45 Σωστή απάντηση είναι η β).



Ισχύει:

$$\sigma \nu \eta \theta = \frac{l-h}{l} \Rightarrow 0,5 = \frac{l-h}{l} \Rightarrow h = 0,5l$$

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του συσσωματώματος μετά την κρούση. Προκύπτει:

$$0 - \frac{1}{2} 5 m v_k^2 = -5 m g h \Rightarrow v_k = \sqrt{g l}$$

Για την πλαστική κρούση εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ο. στον οριζόντιο άξονα $x'x$. Έχουμε:

$$m v \sigma \nu \eta \varphi = 5 m v_k \Rightarrow \frac{v}{2} = 5 \sqrt{g l} \Rightarrow v = 10 \sqrt{g l}$$

1.46 Α) Σωστή απάντηση είναι η α).

Σε όλες τις κρούσεις το σύστημα των σωμάτων είναι μονωμένο, οπότε, διατηρείται η ορμή.

1η κρούση: Η ταχύτητα που θα αποκτήσει το $\Sigma_{1,2}$ είναι:

$$\begin{aligned}\vec{P}_{ολ.(πριν)} &= \vec{P}_{ολ.(μετά)} \Rightarrow \\ m v_0 &= 2 m v_1 \Rightarrow v_1 = \frac{v_0}{2} \quad (1)\end{aligned}$$

2η κρούση: Η δεύτερη κρούση θα συμβεί τη

$$\text{χρονική στιγμή } t_A = \frac{d}{v_1} \stackrel{(1)}{\approx} \frac{2d}{v_0}$$

Η ταχύτητα που θα αποκτήσει το $\Sigma_{1,2,3}$ είναι:

$$\begin{aligned}\vec{P}_{ολ.(πριν)} &= \vec{P}_{ολ.(μετά)} \Rightarrow \\ 2 m v_1 &= 3 m v_2 \Rightarrow v_2 = \frac{v_0}{3} \quad (2)\end{aligned}$$

3η κρούση: Η τρίτη κρούση θα συμβεί τη

$$\text{χρονική στιγμή } t_1 = t_A + \frac{d}{v_2} = \frac{2d}{v_0} + \frac{d}{v_2} \stackrel{(2)}{\approx} \frac{5d}{v_0}$$

Η ταχύτητα που θα αποκτήσει το $\Sigma_{1,2,3,4}$ είναι:

$$\begin{aligned}\vec{P}_{ολ.(πριν)} &= \vec{P}_{ολ.(μετά)} \Rightarrow \\ 3 m v_2 &= 4 m v_3 \Rightarrow v_3 = \frac{v_0}{4} \quad (3)\end{aligned}$$

Β) Σωστή απάντηση είναι η β).

Από τη χρονική στιγμή t_1 έως τη χρονική στιγμή t_2 το συσσωμάτωμα που έχει τελικά σχηματιστεί έχει διανύσει απόσταση:

$$\begin{aligned}\Delta x &= v_3 \cdot (t_2 - t_1) = v_3 \cdot (2t_1 - t_1) = \\ &= v_3 t_1 \stackrel{(3)}{\approx} \frac{v_0}{4} \cdot \frac{5d}{v_0} = 1,25d\end{aligned}$$

Άρα απέχει από το σημείο που έγινε η πρώτη κρούση απόσταση S ίση με:

$$S = \Delta x + 2d = 3,25d$$

Γ) Σωστή απάντηση είναι η β).

Το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας του Σ_1 που μετατρέπεται σε θερμότητα μετά το τέλος όλων των κρούσεων είναι:

$$\Pi\% = \frac{Q_{\text{κρούσης}}}{K_{ολ.(πριν)}} \cdot 100\% =$$

$$\begin{aligned}&= \frac{K_{ολ.(πριν)} - K_{ολ.(μετά)}}{K_{ολ.(πριν)}} \cdot 100\% = \\ &= \left(1 - \frac{K_{ολ.(μετά)}}{K_{ολ.(πριν)}} \right) \cdot 100\% = \\ &= \left(1 - \frac{\frac{1}{2} 4 m v_3^2}{\frac{1}{2} m v_0^2} \right) \cdot 100\% \stackrel{(3)}{=} \\ &\stackrel{(3)}{=} \left(1 - \frac{4 \left(\frac{v_0}{4} \right)^2}{v_0^2} \right) \cdot 100\% = 75\%\end{aligned}$$

1.47 Σωστή απάντηση είναι η β).

Έστω $\vec{F}$ η αντίσταση που προβάλλει το ξύλο και στις δύο περιπτώσεις.

1η περίπτωση. Για την κίνηση του βλήματος μέσα στον ξύλινο κύβο μέχρι να σταματήσει εφαρμόζουμε:

$$\Theta.M.K.E.: \Delta K = \Sigma W_F \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}K_{(τελ.)} - K_{(αρχ.)} &= W_F \Rightarrow \\ -\frac{1}{2} m v^2 &= -F d \Rightarrow F = \frac{m v^2}{2d} \quad (1)\end{aligned}$$

2η περίπτωση. Επειδή το σύστημα βλήματος-ξύλινου κύβου είναι μονωμένο (δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις), η ορμή του θα παραμείνει σταθερή. Οπότε:

$$A.A.O.: \vec{P}_{ολ.(πριν)} = \vec{P}_{ολ.(μετά)} \Rightarrow$$

$$m v = (m + M) \cdot V \Rightarrow V = \frac{m v}{m + M} \quad (2)$$

Για την κίνηση του βλήματος μέσα στον ξύλινο κύβο και μέχρι να αποκτήσουν την κοινή ταχύτητα V εφαρμόζουμε:

$$\Theta.M.K.E.: \Delta K = \Sigma W_F \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}K_{(τελ.)} - K_{(αρχ.)} &= W_F \Rightarrow \\ \frac{1}{2} m V^2 - \frac{1}{2} m v^2 &= -F(x + S) \quad (3)\end{aligned}$$

Για την κίνηση του ξύλινου κύβου και μέχρι να αποκτήσουν την κοινή ταχύτητα V εφαρμόζουμε:

$$\Theta.Μ.Κ.Ε.: \Delta K = \Sigma W_F \Rightarrow$$

$$K_{(\text{τελ.})} - K_{(\text{αρχ.})} = W_F \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}MV^2 = Fx \quad (4)$$

$$(3) \Rightarrow \frac{1}{2}mV^2 - \frac{1}{2}mv^2 = -Fx - FS \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}mV^2 - \frac{1}{2}mv^2 = -\frac{1}{2}MV^2 - FS \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}(m+M)V^2 - \frac{1}{2}mv^2 = -FS \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}(m+M)\left(\frac{mv}{m+M}\right)^2 - \frac{1}{2}mv^2 = -FS \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}mv^2 \frac{m}{m+M} - \frac{1}{2}mv^2 = -FS \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}mv^2 \frac{m}{m+M} - \frac{1}{2}mv^2 = -\frac{mv^2}{2d}S \Rightarrow$$

$$\frac{m}{m+M} - 1 = -\frac{S}{d} \Rightarrow S = \frac{M}{M+m}d$$

1.48 Σωστή απάντηση είναι η α).

Στο μέγιστο ύψος h που φτάνει το σώμα, θα έχει κοινή ταχύτητα με το M , γιατί αν ήταν διαφορετική, τότε ή θα ανερχόταν κι άλλο ή θα είχε προηγηθεί το μέγιστο ύψος. Στον οριζόντιο άξονα η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων είναι μηδέν, για το σύστημα των σωμάτων. Άρα η ορμή του διατηρείται, έτσι:

$$\vec{P}_{\text{ολ. (πριν)}} = \vec{P}_{\text{ολ. (μετά)}} \Rightarrow$$

$$mv_o = (m+M)V \quad M=2m \Rightarrow$$

$$mv_o = 3mV \Rightarrow V = \frac{v_o}{3} \quad (1)$$

Επίσης, οι δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα είναι συντηρητικές, άρα διατηρείται η μηχανική ενέργειά του, έτσι:

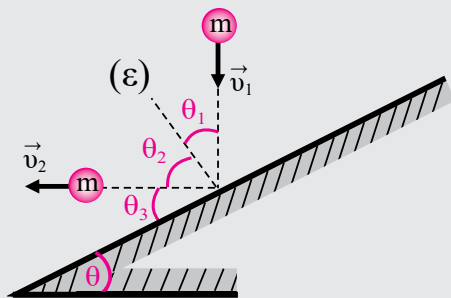
$$E_{\text{αρχ.}} = E_{\text{τελ.}} \Rightarrow$$

$$0 + \frac{1}{2}mv_o^2 = mgh + \frac{1}{2}(m+M)V^2 \quad (1), M=2m \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}mv_o^2 = mgh + \frac{1}{2}3m\left(\frac{v_o}{3}\right)^2 \Rightarrow$$

$$v_o^2 = 2gh + \frac{v_o^2}{3} \Rightarrow 2gh = \frac{2v_o^2}{3} \Rightarrow h = \frac{v_o^2}{3g}$$

1.49 Α) Σωστή απάντηση είναι η β).



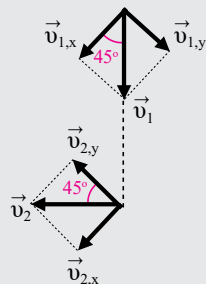
Αφού η κινητική ενέργεια της σφαίρας παραμένει αμετάβλητη μετά την κρούση αυτό σημαίνει ότι η κρούση της με το κεκλιμένο επίπεδο είναι ελαστική. Άρα η γωνία πρόσπτωσης θ_1 και η γωνία ανάκλασης θ_2 θα είναι ίσες ($\theta_1 = \theta_2$). Επειδή η αρχική διεύθυνση της σφαίρας πριν την κρούση είναι κατακόρυφη και η τελική της μετά την κρούση είναι οριζόντια, το άθροισμα των γωνιών θ_1 και θ_2 θα είναι 90° οπότε τελικά $\theta_1 = \theta_2 = 45^\circ$. Όμως η ευθεία (ε) είναι κάθετη στο κεκλιμένο επίπεδο άρα:

$$\theta_2 + \theta_3 = 90^\circ \quad \theta_2 = 45^\circ \Rightarrow \theta_3 = 45^\circ.$$

Τέλος $\theta = \theta_3 = 45^\circ$ ως εντός εναλλάξ (αφού η τελική διεύθυνση της σφαίρας είναι οριζόντια).

Β) Σωστή απάντηση είναι η α).

Αφού η κρούση της σφαίρας m με το κεκλιμένο επίπεδο είναι πλαστική, το μέτρο της ταχύτητάς της μετά την κρούση παραμένει σταθερό, ($v_1 = v_2$). Η ορμή της μάζας m μεταβάλλεται μόνο στον $y'y$ άξονα, οπότε:



$$\begin{aligned}
 |\Delta p| &= |\Delta p_y| = |p_{2,y} - p_{1,y}| = \\
 &= |mv_{2,y} - (-mv_{1,y})| = |mv_{2,y} + mv_{1,y}| = \\
 &= |mv_2 \sin 45^\circ + mv_1 \eta \mu 45^\circ| \stackrel{v_1=v_2}{=} \\
 &\stackrel{v_1=v_2}{=} |2mv_1 \sin 45^\circ| = mv_1 \sqrt{2}
 \end{aligned}$$

1.50 Σωστή απάντηση είναι η α).

Αφού οι σφαίρες είναι λείες, οι μεταξύ τους δυνάμεις τη στιγμή της κρούσης είναι κάθετες προς τις επιφάνειές τους, δηλαδή βρίσκονται κατά μήκος της διακέντρου τους.

Σύμφωνα με τον 3ο Νόμο του Νεύτωνα οι δυνάμεις μεταξύ των μαζών (δράση – αντίδραση) είναι ίσες και αντίθετες, αλλά επίσης οι δυνάμεις αυτές κατευθύνονται και κατά μήκος της ευθείας που συνδέει τα κέντρα των δυο σωμάτων. Αν αναλύσουμε την ταχύτητα $\vec{v}_1$ της σφαίρας Σ_1 τη στιγμή της κρούσης σε δυο συνιστώσες, μια κατά τη διεύθυνση της διακέντρου και μια κάθετη σε αυτή, τότε έχουμε: $v_{1,x} = v_1 \cdot \sin \theta$ και $v_{1,y} = v_1 \cdot \eta \mu \theta$. Εξαιτίας

της $v_{1,x}$ έχουμε μετωπική ελαστική κρούση, οπότε οι δυο σφαίρες ανταλλάσσουν ταχύτητες. Έτσι η Σ_2 μετά την κρούση θα κινηθεί κατά μήκος της διακέντρου με ταχύτητα $v'_2 = v_{1,x} = v_1 \cdot \sin \theta$.

Το ζητούμενο ποσοστό είναι:

$$\begin{aligned}
 \Pi\% &= \frac{K'_2}{K_1} \cdot 100\% = \frac{\frac{1}{2}mv_2'^2}{\frac{1}{2}mv_1^2} \cdot 100\% = \\
 &= \frac{\frac{1}{2}m(v_1 \cdot \sin \theta)^2}{\frac{1}{2}mv_1^2} \cdot 100\% = \sin^2 \theta \cdot 100\%.
 \end{aligned}$$

Ομως:

$$\eta \mu \theta = \frac{d}{2R} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = 60^\circ \text{ άρα } \sin \theta = \frac{1}{2}$$

οπότε $\Pi\% = 25\%$

ΘΕΜΑ Γ

1.51 α) Από την Α.Δ.Ο. για την πλαστική κρούση έχουμε:

$$\begin{aligned}
 m_\beta |v_0| &= (m_1 + m_\beta) |v_\kappa| \Rightarrow |v_\kappa| = \frac{m_\beta |v_0|}{m_1 + m_\beta} \Rightarrow \\
 |v_\kappa| &= 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}
 \end{aligned}$$

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του συσσωματώματος. Προκύπτει:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}(m_1 + m_\beta)v_1^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_\beta)v_\kappa^2 &= \\
 = -\mu(m_1 + m_\beta)gs \Rightarrow |v_1| &= \sqrt{v_\kappa^2 - 2\mu gs} \Rightarrow \\
 |v_1| &= 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}
 \end{aligned}$$

β) Η θερμότητα που εκλύεται κατά το συγκεκριμένο χρονικό διάστημα υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned}
 Q &= \frac{1}{2}m_\beta v_0^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_\beta)v_\kappa^2 + |-\mu(m_1 + m_\beta)gs| \Rightarrow \\
 Q &= 1950 \text{ J}
 \end{aligned}$$

γ) Εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του συσσωματώματος, αμέσως μετά την κρούση, προκύπτει:

$$\begin{aligned}
 0 - \frac{1}{2}(m_1 + m_\beta)v_1'^2 &= -\mu(m_1 + m_\beta)gs_1 \Rightarrow \\
 s_1 &= \frac{v_1'^2}{2\mu g} (1)
 \end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του σώματος Σ_2 αμέσως μετά την κρούση προκύπτει:

$$0 - \frac{1}{2}m_2 v_2'^2 = -\mu m_2 g s_2 \Rightarrow s_2 = \frac{v_2'^2}{2\mu g} (2)$$

Με τη βοήθεια των σχέσεων (1), (2) έχουμε:

$$s_2 = 16s_1 \Rightarrow \frac{v_2'^2}{2\mu g} = 16 \frac{v_1'^2}{2\mu g} \Rightarrow |v_2'| = 4|v_1'| (3)$$

Το σώμα Σ_2 μετά την ελαστική κρούση θα κινηθεί προς τα δεξιά, ενώ το συσσωμάτωμα

προς τα αριστερά, επομένως για τις αλγεβρικές τιμές v'_1, v'_2 των ταχυτήτων των δύο σωμάτων αμέσως μετά τη μεταξύ τους κρούση θα ισχύει:

$$v'_2 = -4v'_1 \Rightarrow \frac{2(m_1 + m_\beta)v_1}{m_1 + m_\beta + m_2} = -4 \frac{(m_1 + m_\beta - m_2)v_1}{m_1 + m_\beta + m_2} \Rightarrow$$

$$m_2 = 6 \text{ kg}$$

δ) Έστω ότι το συσσωμάτωμα διανύει διάστημα s αμέσως μετά την ελαστική του κρούση με το σώμα Σ_2 . Από το Θ.Μ.Κ.Ε. προκύπτει:

$$0 - \frac{1}{2}(m_1 + m_\beta)v'^2 = -\mu(m_1 + m_\beta)gs \Rightarrow$$

$$|v'| = \sqrt{2\mu gs} \Rightarrow |v'| = 5\sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ορίζοντας θετική τη φορά προς τα δεξιά για την αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την ελαστική κρούση, έχουμε:

$$v' = -5\sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ισχύει:

$$v' = \frac{(m_1 + m_\beta - m_2)v}{m_1 + m_\beta + m_2} \Rightarrow$$

$$v = \frac{v'(m_1 + m_\beta + m_2)}{m_1 + m_\beta - m_2} \Rightarrow v = 25\sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του συσσωματώματος πριν την ελαστική κρούση. Προκύπτει:

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_\beta)v^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_\beta)v_{\kappa}^2 =$$

$$= -\mu(m_1 + m_\beta)gs \Rightarrow$$

$$|v_{\kappa}| = \sqrt{v^2 + 2\mu gs} \Rightarrow |v_{\kappa}| = 5\sqrt{78} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Από την Α.Δ.Ο. για την πλαστική κρούση έχουμε:

$$|p_\beta| = |p_{\kappa}| \quad \text{ή} \quad |p_\beta| = (m_1 + m_\beta)|v_{\kappa}| \Rightarrow$$

$$|p_\beta| = 20\sqrt{78} \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$

1.52 α) Η ταχύτητα της σφαίρας Σ_2 , αμέσως μετά την κρούση, είναι:

$$v'_2 = \frac{2m_1v_0}{m_1 + m_2} \Rightarrow v'_2 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

β) Η ταχύτητα της σφαίρας Σ_1 , αμέσως μετά την κρούση, είναι::

$$v'_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_0}{m_1 + m_2} \Rightarrow v'_1 = -3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Για τη μεταβολή της ορμής της σφαίρας Σ_1 ισχύει:

$$\Delta p_1 = m_1v'_1 - m_1v_0 \Rightarrow \Delta p_1 = -8 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$

γ) Μετά την πρώτη της κρούση με τη σφαίρα Σ_2 η Σ_1 συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά και με τη σφαίρα Σ_3 αποκτώντας τελικά ταχύτητα αλγεβρικής τιμής v''_1 που υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v''_1 = \frac{(m_1 - m_3)v'_1}{m_1 + m_3} \Rightarrow v''_1 = 1,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Επειδή ισχύει $v'_1 < v'_2$ θα αποφευχθεί η σύγκρουση μεταξύ των σφαιρών Σ_1 και Σ_2 για δεύτερη φορά.

δ) Για να αποφευχθεί η σύγκρουση μεταξύ των σφαιρών Σ_1 και Σ_2 , για δεύτερη φορά, θα πρέπει να ισχύει:

$$|v'_1| < |v'_2|(1)$$

Επειδή ισχύει $m_1 < m_3$ από τη σχέση (1) προκύπτει:

$$\left| \frac{(m_1 - m_3)v'_1}{m_1 + m_3} \right| \leq |v'_2| \Rightarrow \frac{(m_3 - m_1)|v'_1|}{m_1 + m_3} \leq |v'_2| \Rightarrow$$

$$\frac{(m_3 - 1) \cdot 3}{1 + m_3} \leq 2 \Rightarrow m_3 \leq 5 \text{ kg}$$

Η μέγιστη επομένως τιμή της μάζας της σφαίρας Σ_3 είναι:

$$m_{3,\max} = 5 \text{ kg}$$

1.53 α) Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του σώματος Σ_1 . Ισχύει:

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 - \frac{1}{2}m_1v_0^2 = -m_1gh \Rightarrow |v_1| = \sqrt{v_0^2 - 2gh} \Rightarrow$$

$$|v_1| = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

β) Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του συσσωματώματος μετά την κρούση. Έχουμε:

$$\begin{aligned} 0 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_k^2 &= \\ &= -(m_1 + m_2)g(h_{\max} - h_1) \Rightarrow \\ |v_k| &= \sqrt{2g(h_{\max} - h_1)} \Rightarrow |v_k| = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

γ) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συσσωματώματος, αμέσως μετά την κρούση, είναι:

$$\begin{aligned} \frac{dK}{dt} &= \Sigma F \cdot v_k \Rightarrow \frac{dK}{dt} = -(m_1 + m_2)g \cdot v_k \Rightarrow \\ \frac{dK}{dt} &= -100 \frac{\text{J}}{\text{s}} \end{aligned}$$

δ) Από την εφαρμογή της Α.Δ.Ο. για την πλαστική κρούση προκύπτει:

$$\begin{aligned} m_1|v_1| - m_2|v_2| &= (m_1 + m_2)|v_k| \Rightarrow \\ |v_2| &= \frac{m_1|v_1| - (m_1 + m_2)|v_k|}{m_2} \Rightarrow |v_2| = \frac{2}{3} \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

Προκύπτει:

$$\frac{dU}{dt} = -m_2 g v_2 \Rightarrow \frac{dU}{dt} = -20 \frac{\text{J}}{\text{s}}$$

1.54 α) Για το σώμα Σ_1 ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = m_1 \vec{a}_1 \Rightarrow |T_1| = m_1 |\alpha_1| \Rightarrow$$

$$\mu m_1 g = m_1 |\alpha_1| \Rightarrow |\alpha_1| = \mu g \Rightarrow \alpha_1 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Για το διάστημα ΑΓ που διανύει το Σ_1 από την $t_0 = 0$ μέχρι τη στιγμή της συνάντησης t_Σ έχουμε:

$$\Delta G = |v_{01}| \cdot t_\Sigma - \frac{1}{2} |\alpha_1| t_\Sigma^2 \quad (1)$$

Για το σώμα Σ_2 ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = m_2 \vec{a}_2 \Rightarrow |T_2| = m_2 |\alpha_2| \Rightarrow$$

$$\mu m_2 g = m_2 |\alpha_2| \Rightarrow |\alpha_2| = \mu g \Rightarrow |\alpha_2| = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Για το διάστημα ΒΓ που διανύει το Σ_2 από την $t_0 = 0$ μέχρι τη στιγμή της κρούσης t_Σ έχουμε:

$$\Delta G = |v_{02}| \cdot t_\Sigma - \frac{1}{2} |\alpha_2| t_\Sigma^2 \quad (2)$$

Ισχύει:

$$\Delta G = 0,75 \cdot \Delta G \quad (3)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (1), (2) στη σχέση (3) προκύπτει:

$$|v_{02}| \cdot t_\Sigma - \frac{1}{2} |\alpha_2| t_\Sigma^2 = 0,75 \cdot \left(|v_{01}| \cdot t_\Sigma - \frac{1}{2} |\alpha_1| t_\Sigma^2 \right) \Rightarrow$$

$$8t_\Sigma - t_\Sigma^2 = 0,75 \cdot (10t_\Sigma - t_\Sigma^2)$$

$$\text{ή } t_\Sigma = 0 \text{ (απορρ.) και } t_\Sigma = 2\text{s}$$

β) Υπολογίζουμε τα μέτρα των ταχυτήτων των δύο σωμάτων λίγο πριν τη μεταξύ τους κρούση. Για το Σ_1 προκύπτει:

$$|v_1| = |v_{01}| - |\alpha_1| t_\Sigma \Rightarrow |v_1| = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Και για το Σ_2 :

$$|v_2| = |v_{02}| - |\alpha_2| t_\Sigma \Rightarrow |v_2| = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Εφαρμόζοντας την Α.Δ.Ο. για την πλαστική κρούση, προκύπτει:

$$m_1|v_1| - m_2|v_2| = (m_1 + m_2)|v_k| \quad \text{ή}$$

$$|v_k| = \frac{m_1|v_1| - m_2|v_2|}{m_1 + m_2} \Rightarrow |v_k| = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

γ) Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του συσσωματώματος. Ισχύει:

$$0 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_k^2 = -\mu(m_1 + m_2)gs \quad \text{ή}$$

$$s = \frac{v_k^2}{2\mu g} \Rightarrow s = 0,25 \text{ m}$$

δ) Ισχύει:

$$Q_{\text{ολ}} = \frac{1}{2} m_1 v_{01}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{02}^2 \Rightarrow Q_{\text{ολ}} = 164 \text{ J}$$

1.55 α) Για την κίνηση της σφαίρας Σ_1 στο οριζόντιο επίπεδο, εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας, όποτε έχουμε:

$$\text{Θ.Μ.Κ.Ε.: } \Delta K = \Sigma W_F \Rightarrow$$

$$K_{(\text{τελ.})} - K_{(\text{αρχ.})} = W_{T_1} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 v_0^2 = -T_1 d \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 v_0^2 = -\mu m_1 g d \Rightarrow$$

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2\mu g d} \Rightarrow v_1 = 9 \text{ m/s}$$

β) Για την κίνηση της σφαίρας Σ_2 , αμέσως μετά την κρούση πάνω στο τεταρτοκύκλιο, εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας. Αφού οριακά δεν χάνει της επαφή της με το τεταρτοκύκλιο, τότε στο ανώτερο σημείο της σταματάει. Οπότε έχουμε:

$$\Theta.Μ.Κ.Ε.: \Delta K = \Sigma W_F \Rightarrow$$

$$K_{(τελ.)} - K_{(αρχ.)} = W_{W_2} \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2}m_2v_2'^2 = -m_2gR \Rightarrow v_2' = 4 \frac{m}{s}$$

$$\Lambda.Δ.Ο.: \vec{P}_{ολ.(πριν)} = \vec{P}_{ολ.(μετά)} \Rightarrow$$

$$m_1v_1 = m_1v_1' + m_2v_2' \Rightarrow v_1' = -3 \frac{m}{s}$$

άρα η σφαίρα Σ_1 αλλάζει φορά κίνησης.

$$\gamma) K_{ολ.(πριν)} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 = 40,5 \text{ J}$$

$$K_{ολ.(μετά)} = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 = 28,5 \text{ J}$$

Αφού $K_{ολ.(πριν)} \neq K_{ολ.(μετά)}$ η κρούση είναι **ανελαστική**.

δ) Μετά την κρούση η σφαίρα Σ_1 εκτελεί επιβραδυνόμενη κίνηση προς τα δεξιά.

Αξονας x: 2ος Νόμος του Νεύτωνα

$$\Sigma F_x = m_1a_1 \Rightarrow -T_1 = m_1a_1 \Rightarrow -\mu m_1g = m_1a_1 \Rightarrow$$

$$a_1 = -\mu g \Rightarrow a_1 = -5 \frac{m}{s^2}$$

Όταν σταματήσει μετά την κρούση η ταχύτητά της θα μηδενιστεί οπότε:

$$v = |v_1'| - |\alpha_1| t_1 \stackrel{v=0}{\Rightarrow} 0 = 3 - 5 \cdot t_1 \Rightarrow t_1 = 0,6 \text{ s}$$

ε) Η απόσταση που διανύει η σφαίρα Σ_1 μέχρι να σταματήσει μετά την κρούση είναι:

$$S = |v_1'| t_1 - \frac{1}{2} |\alpha_1| t_1^2 = 0,9 \text{ m}$$

Μετά την κρούση η σφαίρα Σ_2 κάποια στιγμή επιστρέφει στη βάση του τεταρτοκυκλίου με ταχύτητα μέτρου $v_2' = 4 \frac{m}{s}$ αφού δεν έχουμε απώλειες ενέργειας. Για να μην συμβεί 2η κρούση πρέπει η απόσταση που θα διανύσει στο οριζόντιο επίπεδο μέχρι να σταματήσει να είναι μικρότερη το πολύ ίση με 0,9 m.

Για την κίνηση της σφαίρας Σ_2 στο οριζόντιο επίπεδο μέχρι να σταματήσει, εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας, οπότε έχουμε:

$$\Theta.Μ.Κ.Ε.: \Delta K = \Sigma W_F \Rightarrow$$

$$K_{(τελ.)} - K_{(αρχ.)} = W_{T_2} \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2}m_2v_2'^2 = -T_2S \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2}m_2v_2'^2 = -\mu' m_2gS \Rightarrow$$

$$\mu' = \frac{v_2'^2}{2gS} \Rightarrow \mu' = \frac{8}{9}$$

1.56 α) Εφαρμόζουμε το $\Theta.Μ.Κ.Ε.$ για την κίνηση του σώματος Σ_1 . Προκύπτει:

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 - 0 = m_1gl \Rightarrow |v_1| = \sqrt{2gl} \Rightarrow |v_1| = 6 \frac{m}{s}$$

Ορίζοντας ως θετική τη φορά προς τα δεξιά προκύπτει:

$$v_1 = +6 \frac{m}{s}$$

Η κρούση μεταξύ των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 είναι ελαστική, επομένως ισχύει:

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2} \Rightarrow v_1' = -2 \frac{m}{s}$$

Το ζητούμενο ποσοστό επί τοις εκατό υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\Pi(\%) = \frac{\frac{1}{2}m_1v_1'^2}{\frac{1}{2}m_1v_1^2} \cdot 100\% \Rightarrow$$

$$\Pi(\%) = \frac{4}{36} \cdot 100\% \Rightarrow \Pi(\%) = \frac{100}{9} \%$$

β) Η κρούση μεταξύ των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 είναι ελαστική, επομένως ισχύει:

$$v_2' = \frac{2m_1v_1}{m_1 + m_2} \Rightarrow v_2' = 4 \frac{m}{s}$$

Κατά τη διάρκεια της κίνησης του σώματος Σ_2 πάνω στη σανίδα το σύστημα Σ_2 -σανίδα δεν δέχεται εξωτερικές δυνάμεις και θεωρείται μονωμένο. Επομένως ισχύει:

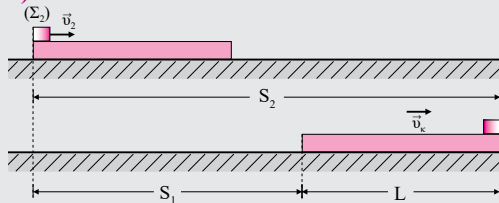
$$m_2 |v'_2| = (m_2 + M) |v_k| \Rightarrow |v_k| = \frac{m_2 |v'_2|}{m_2 + M} \Rightarrow$$

$$|v_k| = 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

γ) Ισχύει:

$$\left| \frac{dp}{dt} \right| = |-\mu m_2 g| \Rightarrow \left| \frac{dp}{dt} \right| = 10 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}$$

δ)



Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του Σ₂. Προκύπτει:

$$\frac{1}{2} m_2 v_k^2 - \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = -\mu m_2 g s_2 \Rightarrow$$

$$s_2 = \frac{v_2'^2 - v_k^2}{2\mu g} \Rightarrow s_2 = 1,575 \text{ m}$$

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση της σανίδας. Προκύπτει:

$$\frac{1}{2} M v_k^2 = \mu m_2 g s_1 \quad \text{ή} \quad s_1 = \frac{M v_k^2}{2\mu m_2 g} \Rightarrow$$

$$s_1 = 0,175 \text{ m}$$

Για το μήκος της σανίδας προκύπτει:

$$s_2 = s_1 + L \Rightarrow L = s_2 - s_1 \Rightarrow L = 1,4 \text{ m}$$

1.57 α) Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του σώματος Σ₁ από τη θέση Α στη θέση Β. Προκύπτει:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 v_0^2 = -\mu m_1 g \cdot AB \Rightarrow$$

$$|v_1| = \sqrt{v_0^2 - 2\mu g \cdot AB} \Rightarrow |v_1| = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

β) Εφαρμόζουμε τον 2ο Νόμο του Νεύτωνα. Έχουμε:

$$\Sigma \vec{F} = m_1 \vec{a} \Rightarrow \mu m_1 g = m_1 |\alpha| \Rightarrow |\alpha| = \mu g \Rightarrow$$

$$|\alpha| = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Για τη χρονική διάρκεια κίνησης του Σ₁ προκύπτει:

$$|v_1| = |v_0| - |\alpha| \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{|v_0| - |v_1|}{\alpha} \Rightarrow \Delta t = 0,4 \text{ s}$$

γ) Εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση των δύο σωμάτων αμέσως μετά την κρούση προκύπτει:

Σ₁:

$$0 - \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 = -\mu m_1 g \cdot s_1 \Rightarrow s_1 = \frac{v_1'^2}{2\mu g} (1)$$

Σ₂:

$$0 - \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = -\mu m_2 g \cdot s_2 \Rightarrow s_2 = \frac{v_2'^2}{2\mu g} (2)$$

Επειδή ισχύει $s_1 = s_2$ από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει:

$$|v_1'| = |v_2'|$$

Για τις αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων v_1' , v_2' επομένως είτε θα ισχύει $v_1' = v_2'$ (3) είτε $v_1' = -v_2'$ (4).

Η σχέση (3) όμως δεν μπορεί να ισχύει, γιατί κάτι τέτοιο θα συνέβαινε μόνο σε πλαστική κρούση. Επομένως προκύπτει:

$$v_1' = -v_2' \Rightarrow \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 = -\frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{3}$$

δ) Υπολογίζουμε την ταχύτητα του σώματος Σ₂ αμέσως μετά την κρούση. Έχουμε:

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1 \Rightarrow v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + 3m_1} \cdot 2 \Rightarrow$$

$$v_2' = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Το ζητούμενο ποσοστό υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\Pi(\%) = \frac{\frac{1}{2} m_2 v_2'^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2} 100\% \Rightarrow$$

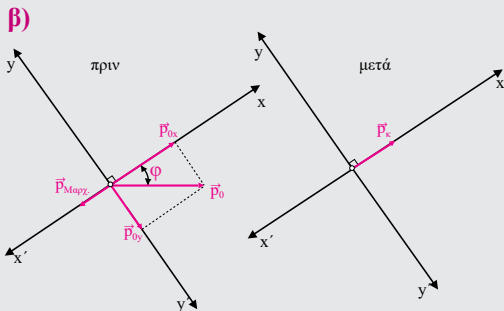
$$\Pi(\%) = \frac{3 \cdot m_1 \cdot 1}{m_1 \cdot 4} 100\% \Rightarrow \Pi(\%) = 75\%$$

1.58 α) Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του κιβωτίου. Προκύπτει:

$$\frac{1}{2} M v^2 = M g \cdot \eta \mu \varphi \cdot S - \mu M g \cdot \sigma \nu \nu \varphi \cdot S \Rightarrow$$

$$|v| = \sqrt{2 g \cdot \eta \mu \varphi \cdot S - 2 \mu g \cdot \sigma \nu \nu \varphi \cdot S} \Rightarrow$$

$$|v| = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

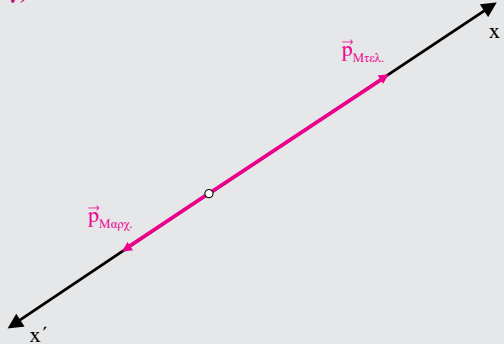


Εφαρμόζοντας την Α.Δ.Ο. στον οριζόντιο άξονα x' x προκύπτει:

$$m|v_0| \sigma \nu \nu \varphi - M|v| = (m + M)|v_k| \Rightarrow$$

$$|v_k| = \frac{m|v_0| \sigma \nu \nu \varphi - M|v|}{m + M} \Rightarrow |v_k| = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

γ)



Ισχύει:

$$\Delta \vec{p}_M = \vec{p}_{M, \text{τελ.}} - \vec{p}_{M, \text{αρχ.}} \Rightarrow$$

$$\Delta p_M = M|v_k| - (-M|v|) \Rightarrow \Delta p_M = 5,2 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$

Προκύπτει:

$$|\Delta p_M| = 5,2 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$

δ) Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση είναι:

$$\frac{dp}{dt} = \Sigma F \Rightarrow$$

$$\frac{dp}{dt} = -(M + m)g \cdot \eta \mu \varphi - \mu(M + m)g \cdot \sigma \nu \nu \varphi \Rightarrow$$

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{35\sqrt{3}}{12} \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}$$

Προκύπτει:

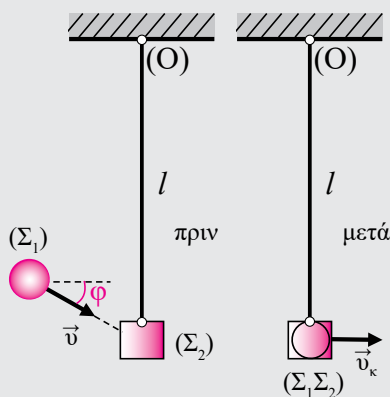
$$\left| \frac{dp}{dt} \right| = \frac{35\sqrt{3}}{12} \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}$$

1.59 α) Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση. Ισχύει:

$$0 - \frac{1}{2}(m + M)v_k^2 = -(m + M)gl \Rightarrow$$

$$|v_k| = \sqrt{2lg} \Rightarrow |v_k| = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

β)



Για την πλαστική κρούση εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ο. στον οριζόντιο άξονα x' x . Έχουμε:

$$m|v| \sigma \nu \nu \varphi = (m + M)|v_k| \Rightarrow$$

$$\frac{m|v|}{2} = (m + M)|v_k| \Rightarrow |v| = \frac{2(m + M)|v_k|}{m} \Rightarrow$$

$$|v| = 100 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

γ) Για το ζητούμενο κλάσμα προκύπτει:

$$\kappa = \frac{\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}(m+M)v_{\kappa}^2}{\frac{1}{2}mv^2} \Rightarrow \kappa = \frac{39}{40}$$

δ) Το συσσωμάτωμα αμέσως μετά την κρούση διαγράφει κυκλική τροχιά. Στο ανώτερο σημείο της τροχιάς του ασκούνται σε αυτό το βάρος του $\vec{w}_{\text{συσ}}$ και η τάση του νήματος $\vec{T}$. Η συνισταμένη των παραπάνω δυνάμεων έχει τον ρόλο της κεντρομόλου δύναμης. Προκύπτει:

$$\Sigma F = F_{\kappa} \text{ ή } T + w_{\text{συσ}} = \frac{(m+M)v^2}{l} \Rightarrow$$

$$T = \frac{(m+M)v^2}{l} - (m+M)g$$

Για να εκτελέσει το συσσωμάτωμα ανακύκλωση θα πρέπει να φτάσει στο ανώτερο σημείο με το νήμα τεντωμένο ($T \geq 0$). Ισχύει:

$$T \geq 0 \text{ ή } \frac{(m+M)v^2}{l} - (m+M)g \geq 0 \text{ ή}$$

$$|v| \geq \sqrt{lg}$$

Το συσσωμάτωμα εκτελεί οριακά ανακύκλωση, επομένως για το μέτρο της ταχύτητάς του στο ανώτερο σημείο θα έχουμε:

$$|v_{\min}| = \sqrt{lg}$$

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μεταβολής Κινητικής Ενέργειας (Θ.Μ.Κ.Ε.) για την κίνηση του συσσωματώματος από το σημείο που βρίσκεται αμέσως μετά την κρούση μέχρι το ανώτερο σημείο της κυκλικής τροχιάς του, για να υπολογίσουμε το μέτρο της ταχύτητας $\vec{v}'_{\kappa}$ του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση:

$$\frac{1}{2}(m+M)v_{\min}^2 - \frac{1}{2}(m+M)v_{\kappa}^2 = -(m+M)g \cdot 2l \Rightarrow$$

$$\text{ή } lg - v_{\kappa}^2 = -4gl \Rightarrow |v'_{\kappa}| = \sqrt{5lg} \Rightarrow$$

$$|v'_{\kappa}| = \sqrt{62,5} \frac{m}{s}$$

Για την πλαστική κρούση εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ο. στον οριζόντιο άξονα $x'x$. Έχουμε:

$$m|v'| \sin \varphi = (m+M)|v'_{\kappa}| \Rightarrow$$

$$\frac{m|v'|}{2} = (m+M)|v'_{\kappa}| \Rightarrow |v'| = \frac{2(m+M)|v_{\kappa}|}{m} \Rightarrow$$

$$|v'| = 20\sqrt{62,5} \frac{m}{s}$$

Το ζητούμενο ποσοστό υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\Pi\% = \frac{\frac{1}{2}mv'^2 - \frac{1}{2}mv^2}{\frac{1}{2}mv^2} 100\% \Rightarrow v$$

1.60 α) Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του σώματος μάζας m_1 . Προκύπτει:

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 - 0 = m_1g \cdot \eta \mu \varphi \cdot AB \Rightarrow$$

$$|v_1| = \sqrt{2g \cdot \eta \mu \varphi \cdot AB} \Rightarrow$$

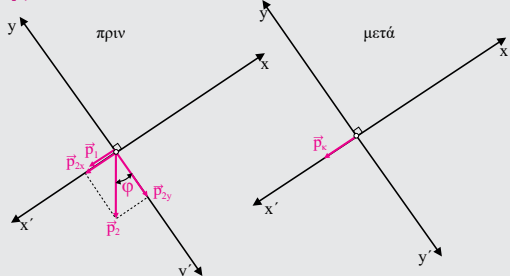
$$|v_1| = 4 \frac{m}{s}$$

Το σώμα μάζας m_2 εκτελεί ελεύθερη πτώση. Εφαρμόζουμε πάλι το Θ.Μ.Κ.Ε. και έχουμε:

$$\frac{1}{2}m_2v_2^2 - 0 = m_2gh \Rightarrow |v_2| = \sqrt{2gh} \Rightarrow$$

$$|v_2| = 13 \frac{m}{s}$$

β)



Εφαρμόζοντας την Α.Δ.Ο. στον άξονα $x'x$ έχουμε:

$$m_1 |v_1| + m_2 |v_2| \eta \mu \phi = (m_1 + m_2) |v_\kappa| \Rightarrow$$

$$|v_\kappa| = \frac{m_1 |v_1| + m_2 |v_2| \eta \mu \phi}{m_1 + m_2} \Rightarrow |v_\kappa| = 5 \frac{m}{s}$$

γ) Ισχύει:

$$B\Gamma = A\Gamma - AB \Rightarrow B\Gamma = 3,9 \text{ m}$$

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση. Προκύπτει:

$$\frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_\tau^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_\kappa^2 =$$

$$= (m_1 + m_2) g \cdot \eta \mu \phi \cdot B\Gamma \Rightarrow$$

$$|v_\tau| = \sqrt{v_\kappa^2 + 2g \cdot \eta \mu \phi \cdot B\Gamma} \Rightarrow |v_\tau| = 8 \frac{m}{s}$$

1.61 α) Για να μην κοπεί το νήμα μετά την κρούση πρέπει η τάση του νήματος να είναι $T \leq T_\theta$.

$$\Sigma F = F_K \Rightarrow T - (m + M)g = \frac{(m + M)V^2}{l} \Rightarrow$$

$$T = (m + M)g + \frac{(m + M)V^2}{l} \stackrel{T \leq T_\theta}{\Rightarrow}$$

$$(m + M)g + \frac{(m + M)V^2}{l} \leq T_\theta \Rightarrow V \leq 4\sqrt{3} \text{ m/s}$$

$$\text{Α.Α.Ο.: } \vec{P}_{\text{ολ}(\pi\rho\iota\nu)} = \vec{P}_{\text{ολ}(\mu\epsilon\tau\acute{\alpha})} \Rightarrow$$

$$m v_0 = (m + M) \cdot V \Rightarrow$$

$$V = \frac{m v_0}{m + M} \stackrel{V \leq 4\sqrt{3} \text{ m/s}}{\Rightarrow} v_0 \leq 200\sqrt{3} \text{ m/s}$$

$$\text{Άρα } v_{0(\max)} = 200\sqrt{3} \text{ m/s}$$

β) Ισχύει:

$$v'_0 = \frac{v_{0(\max)}}{2} = 100\sqrt{3} \text{ m/s}$$

$$\text{Α.Α.Ο.: } \vec{P}_{\text{ολ}(\pi\rho\iota\nu)} = \vec{P}_{\text{ολ}(\mu\epsilon\tau\acute{\alpha})} \Rightarrow$$

$$m v'_0 = (m + M) \cdot V' \Rightarrow$$

$$V' = \frac{m v'_0}{m + M} \Rightarrow V' = 2\sqrt{3} \text{ m/s}$$

Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα ανεβαίνει μέχρι ύψος h.

$$\text{Θ.Μ.Κ.Ε.: } \Delta K = \Sigma W_F \Rightarrow$$

$$K_{(\text{τελ.})} - K_{(\text{αρχ.})} = W_W \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2} (M + m) V'^2 = -(M + m) gh \Rightarrow$$

$$h = \frac{V'^2}{2g} \Rightarrow h = 0,6 \text{ m}$$

Για τη μέγιστη γωνία εκτροπής θ ισχύει:

$$\cos \theta = \frac{l - h}{l} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60^\circ$$

γ) Η μέγιστη τιμή της τάσης που ασκεί το νήμα στο συσσωμάτωμα είναι όταν αυτό βρίσκεται στην κατακόρυφη θέση.

Για να εκτελέσει το συσσωμάτωμα μετά την κρούση ανακύκλωση πρέπει στο ανώτερο σημείο της κυκλικής του τροχιάς να έχει ταχύτητα:

$$v = \sqrt{gl} \quad (1)$$

Για την ταχύτητά του αμέσως μετά την κρούση και μέχρι το ανώτερο σημείο της κυκλικής τροχιάς έχουμε:

$$\text{Θ.Μ.Κ.Ε.:}$$

$$\Delta K = \Sigma W_F \Rightarrow K_{(\text{τελ.})} - K_{(\text{αρχ.})} = W_w \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} (M + m) v^2 - \frac{1}{2} (M + m) V'^2 = -(M + m) g 2l \stackrel{(1)}{\Rightarrow}$$

$$gl - V'^2 = -4gl \Rightarrow V' = \sqrt{5gl} \Rightarrow$$

$$V' = \sqrt{60} \text{ m/s}$$

$$\Sigma F = F_K \Rightarrow T' - (m + M)g = \frac{(m + M)V'^2}{l} \Rightarrow$$

$$T' = (m + M)g + \frac{(m + M)V'^2}{l} \Rightarrow$$

$$T' = 60 \text{ N}$$

Για την ταχύτητα του βλήματος πριν την κρούση έχουμε:

$$\text{Α.Α.Ο.: } \vec{P}_{\text{ολ}(\pi\rho\iota\nu)} = \vec{P}_{\text{ολ}(\mu\epsilon\tau\acute{\alpha})} \Rightarrow$$

$$m v''_0 = (m + M) \cdot V'' \Rightarrow$$

$$v''_0 = 50\sqrt{60} \text{ m/s}$$

Η αρχική κινητική ενέργεια του βλήματος είναι:

$$K_{\beta\lambda.} = \frac{1}{2} m v_0^2 \Rightarrow K_{\beta\lambda.} = 1500 \text{ J}$$

1.62 α) Ισχύει:

$$\eta\mu\varphi = \frac{h_1}{s_1} \Rightarrow s_1 = \frac{h_1}{\eta\mu\varphi} \Rightarrow s_1 = 1,8 \text{ m}$$

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του σώματος Σ_1 από το σημείο Α μέχρι το σημείο Γ. Προκύπτει:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 v_0^2 &= \\ &= m_1 g \cdot \eta\mu\varphi \cdot s_1 - \mu m_1 g \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \cdot s_1 \Rightarrow \\ |v_1| &= \sqrt{v_0^2 + 2g \cdot \eta\mu\varphi \cdot s_1 - 2\mu g \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \cdot s_1} \Rightarrow \\ |v_1| &= 5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

β) Ορίζουμε ως θετική τη φορά της ταχύτητας $\vec{v}_1$.

Για την ταχύτητα του Σ_1 λίγο μετά την κρούση έχουμε:

$$v'_1 = \frac{(m_1 - m_2) v_1}{m_1 + m_2} \Rightarrow v'_1 = -1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow |v'_1| = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

γ) Για την ταχύτητα του Σ_2 λίγο μετά την κρούση έχουμε:

$$v'_2 = \frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2} \Rightarrow v'_2 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow |v'_2| = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

δ) Ισχύει:

$$\eta\mu\varphi = \frac{h - h_1}{s_2} \text{ ή } s_2 = \frac{h - h_1}{\eta\mu\varphi} \Rightarrow s_2 = 4 \text{ m}$$

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του σώματος Σ_2 από το σημείο Γ μέχρι να φτάσει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου. Προκύπτει:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m_2 v_\tau^2 - \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 &= \\ &= m_2 g \cdot \eta\mu\varphi \cdot s_2 - \mu m_2 g \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \cdot s_2 \Rightarrow \\ |v_\tau| &= \sqrt{v_2'^2 + 2g \cdot \eta\mu\varphi \cdot s_2 - 2\mu g \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \cdot s_2} \Rightarrow \\ |v_\tau| &= 6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_\tau = +6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

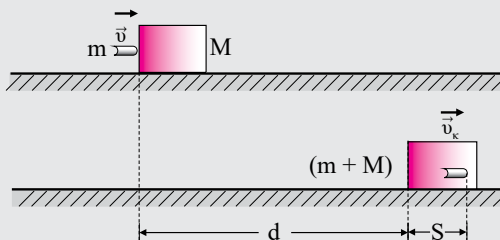
Ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας

βαρύτητας του σώματος Σ_2 τη στιγμή που φτάνει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\frac{dU}{dt} = -m_2 g \cdot \eta\mu\varphi \cdot v_\tau \Rightarrow \frac{dU}{dt} = -90 \frac{\text{J}}{\text{s}}$$

ΘΕΜΑ Δ

1.63 α)



Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ο. για την πλαστική κρούση. Προκύπτει:

$$m|v| = (m + 4m)|v_k| \Rightarrow |v_k| = \frac{|v|}{5}$$

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του βλήματος. Έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m v_k^2 - \frac{1}{2} m v^2 &= -F(d + s) \Rightarrow \\ \frac{1}{2} m \frac{v^2}{25} - \frac{1}{2} m v^2 &= -F(d + s) \Rightarrow \\ -\frac{24}{50} m v^2 &= -F(d + s) \quad (1) \end{aligned}$$

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του κιβωτίου. Ισχύει:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} 4m v_k^2 &= Fd \Rightarrow \frac{1}{2} 4m \frac{v^2}{25} = Fd \Rightarrow \\ \frac{4}{50} m v^2 &= Fd \quad (2) \end{aligned}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει:

$$s = \frac{0,4 m v^2}{F} \Rightarrow s = 2 \text{ m}$$

β) Με τη βοήθεια της σχέσης (2) προκύπτει:

$$d = \frac{4mv^2}{50F} \Rightarrow d = 0,4 \text{ m}$$

γ) Το βλήμα κατά την εισχώρησή του στο κιβώτιο εκτελεί μια ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση. Ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow$$

$$|\alpha| = \frac{|F|}{m} \Rightarrow |\alpha| = 2000 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Προκύπτει:

$$|v_k| = |v| - |\alpha| \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{|v| - |v_k|}{\alpha} \Rightarrow \Delta t = 0,04 \text{ s}$$

δ) Υπολογίζουμε το μέτρο της ταχύτητας του βλήματος μετά από 0,01 s από τη στιγμή που άρχισε να εισχωρεί στο κιβώτιο. Προκύπτει:

$$|v'| = |v| - |\alpha| \cdot \Delta t' \Rightarrow |v'| = 80 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της κινητικής ενέργειας του βλήματος εκείνη τη στιγμή είναι:

$$\left| \frac{dK}{dt} \right| = |\Sigma F| \cdot |v'| \Rightarrow \left| \frac{dK}{dt} \right| = |-F| \cdot |v'| \Rightarrow$$

$$\left| \frac{dK}{dt} \right| = 16 \cdot 10^4 \frac{\text{J}}{\text{s}}$$

1.64 α) Για το μέτρο της ταχύτητας του Σ_1 προκύπτει:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = 0,64 \cdot m_1 gH \Rightarrow |v_1| = 0,8 \sqrt{2gH} \Rightarrow$$

$$|v_1| = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

β) Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση. Προκύπτει:

$$-\frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_k^2 = -(m_1 + m_2) gl \Rightarrow$$

$$|v_k| = \sqrt{2gl} \Rightarrow |v_k| = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Από την εφαρμογή της Α.Δ.Ο. έχουμε:

$$m_1 |v_1| = (m_1 + m_2) |v_k| \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{5}{3}$$

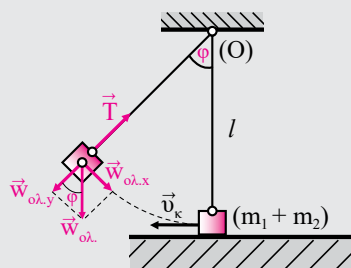
γ) Το ζητούμενο ποσοστό (%) είναι:

$$\Pi(\%) = \frac{\frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_k^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2} \cdot 100\% \Rightarrow$$

$$\Pi(\%) = \frac{m_1 v_1^2 - 1,6 m_1 v_k^2}{m_1 v_1^2} \cdot 100\% \Rightarrow$$

$$\Pi(\%) = 37,5\%$$

δ)



Ισχύει:

$$\sin \varphi = \frac{l-h}{l} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{l-h}{l} \Rightarrow h = \frac{l}{2}$$

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του συσσωματώματος. Έχουμε:

$$\frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_k^2 = -(m_1 + m_2) gh \Rightarrow$$

$$v^2 - 2gl = -gl \Rightarrow |v| = \sqrt{gl}$$

Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\left| \frac{dp}{dt} \right| = |\Sigma F| = \sqrt{\Sigma F_x^2 + \Sigma F_y^2} \Rightarrow$$

$$\left| \frac{dp}{dt} \right| = \sqrt{w_{ol,x}^2 + F_k^2} \Rightarrow$$

$$\left| \frac{dp}{dt} \right| = \sqrt{[(m_1 + m_2)g \cdot \eta \mu \varphi]^2 + \left[\frac{(m_1 + m_2) v^2}{l} \right]^2} \Rightarrow$$

$$\left| \frac{dp}{dt} \right| = 8\sqrt{7}N$$

1.65 α) Αφού η κρούση είναι κεντρική και ελαστική, οι ταχύτητες των Σ_1 και Σ_2 σωμάτων μετά την κρούση (θεωρώντας θετική τη φορά προς τα αριστερά) υπολογίζονται από τις σχέσεις:

$$v_1' = \frac{m-2m}{m+2m} v_0 \Rightarrow v_1' = -2m/s$$

(άρα κινείται προς τα δεξιά) και

$$v_2' = \frac{2m}{m+2m} v_0 \Rightarrow v_2' = 4m/s.$$

Το Σ_3 δε συμμετέχει στην κρούση άρα $v_3' = 0$.

β) Τα σώματα Σ_1 και Σ_2 μετά την κρούση εκτελούν ευθύγραμμες ομαλές κινήσεις.

Το Σ_2 συγκρούεται με τον τοίχο την χρονική

στιγμή $t_1 = \frac{d}{v_2'} \cdot t_1 = 1s$. Έπειτα επειδή η κρούση του με τον τοίχο είναι ελαστική αλλάζει φορά κίνησης χωρίς να αλλάξει το μέτρο της ταχύτητάς του. Έτσι τη χρονική στιγμή $t_2 = 2s$ το Σ_1 θα συγκρουστεί με το Σ_3 που βρισκόταν στην αρχική του θέση. Επειδή η κρούση είναι κεντρική και ελαστική και τα σώματα Σ_2 και Σ_3 έχουν ίσες μάζες θα ανταλλάξουν ταχύτητες άρα το Σ_2 θα σταματήσει και το Σ_3 αρχίζει και κινείται με ταχύτητα $v_3'' = -4 \frac{m}{s}$.

Τη χρονική στιγμή $t' = 3s$ το Σ_3 θα έχει διανύσει απόσταση $x_3 = v_3''(t' - t_2) = 4m$.

Το Σ_1 μετά την 1^η κρούση και μέχρι τη χρονική στιγμή $t' = 3s$ διανύει απόσταση $x_1 = |v_1'| \cdot t' = 6m$. Άρα δεν έχει προλάβει ακόμα το Σ_3 να φτάσει το Σ_1 οπότε και οι ταχύτητες των σωμάτων τη χρονική στιγμή $t' = 3s$

είναι $v_1' = 2 \frac{m}{s}$ (προς τα δεξιά), $v_2'' = 0$ και

$v_3'' = -4 \frac{m}{s}$ (προς τα δεξιά).

γ) Επειδή $|v_3''| > |v_1'|$ τα σώματα Σ_3 και Σ_1 θα συγκρουστούν κάποια χρονική στιγμή t_3 . Όταν συγκρουστούν με αφετηρία τη στιγμή που το Σ_2 συγκρούεται με το Σ_3 πρέπει:

$$x_3' = x_1' + |v_1'| t_2 \Rightarrow |v_3''| t'' = |v_1'| t'' + 4 \Rightarrow t'' = 2s.$$

Οπότε $t_3 = t_2 + t'' \Rightarrow t_3 = 4s$.

Οι ταχύτητές τους μετά την κρούση είναι:

$$v_3''' = \frac{2m-m}{2m+m} v_3'' + \frac{2m}{2m+m} v_1' \Rightarrow v_3''' = -\frac{8}{3} \frac{m}{s}$$

$$v_1'' = \frac{m-2m}{2m+m} v_1' + \frac{2 \cdot 2m}{2m+m} v_3'' \Rightarrow v_1'' = -\frac{14}{3} \frac{m}{s}$$

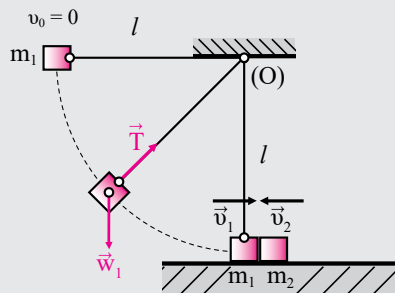
Επειδή $|v_3'''| < |v_1''|$ τα σώματα Σ_3 και Σ_1 δε θα συγκρουστούν άλλη φορά. Άρα ο **συνολικός αριθμός όλων των κρούσεων που πραγματοποιούνται είναι 4** (μαζί με την κρούση του Σ_2 με τον τοίχο).

δ) Ισχύει: $t_3 = 4s$

ε) Ισχύει:

$$\Pi = \frac{K_1''}{K_1} \cdot 100\% = \frac{\frac{1}{2} m v_1''^2}{\frac{1}{2} m v_0^2} \cdot 100\% \Rightarrow \Pi = \frac{4900}{81} \%$$

1.66 α)



Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του σώματος Σ_1 . Προκύπτει:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 - 0 = m_1 g l \Rightarrow |v_1| = \sqrt{2gl} \Rightarrow |v_1| = 4 \frac{m}{s}$$

Ορίζοντας ως θετική τη φορά προς τα δεξιά έχουμε:

$$v_1 = +4 \frac{m}{s}$$

β) Υπολογίζουμε τις αλγεβρικές τιμές τιμές των ταχυτήτων των 2 σωμάτων αμέσως μετά την κρούση:

Ισχύει:

$$0 = |v_k| - |\alpha| \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{|v_k|}{|\alpha|} \Rightarrow \Delta t = 4 \text{ s}$$

Η μέση ισχύς της τριβής ολίσθησης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\bar{P} = \frac{W_T}{\Delta t} \Rightarrow \bar{P} = -50 \text{ W}$$

1.68 α) Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ο. στον οριζόντιο άξονα x'x. Προκύπτει:

$$m|v_\beta| \cdot \sigma \nu \varphi + M|v_0| = (m + M)|v_k| \Rightarrow$$

$$|v_k| = \frac{m|v_\beta| \cdot \sigma \nu \varphi + M|v_0|}{m + M} \Rightarrow |v_k| = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

β) Για τη μεταβολή της ορμής του συστήματος λόγω της κρούσης έχουμε:

$$\Delta \vec{p}_{\sigma \nu \sigma} = \Delta \vec{p}_{\sigma \nu \sigma, x} + \Delta \vec{p}_{\sigma \nu \sigma, y} \Rightarrow$$

$$\Delta \vec{p}_{\sigma \nu \sigma} = \vec{0} + \Delta \vec{p}_y \Rightarrow |\Delta p_{\sigma \nu \sigma}| = m v_\beta \cdot \eta \mu 60^\circ \Rightarrow$$

$$|\Delta p| = 61 \cdot \sqrt{3} \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$

γ) Ισχύει:

$$\frac{dK}{dt} = -\mu(m + M)g v'_k \Rightarrow$$

$$v'_k = \frac{\frac{dK}{dt}}{-\mu(m + M)g} \Rightarrow v'_k = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Τελικά, έχουμε:

$$|p'_k| = (m + M)v'_k \Rightarrow |p'_k| = 60 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$

δ) Ισχύει:

$$\frac{1}{2}(M + m)v_k''^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}(M + m)v_k^2 \Rightarrow$$

$$|v_k''| = \frac{v_k}{2} \Rightarrow |v_k''| = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ο ρυθμός με τον οποίο εκλύεται θερμότητα λόγω της τριβής ολίσθησης είναι:

$$\frac{dQ_T}{dt} = |-T v_k'| \Rightarrow \frac{dQ_T}{dt} = |-\mu(m + M)g v_k''| \Rightarrow$$

$$\frac{dQ_T}{dt} = 200 \frac{\text{J}}{\text{s}}$$

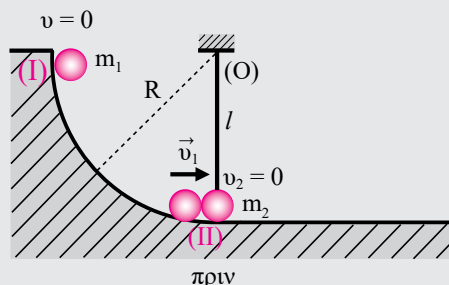
1.69 α) Για την κίνηση του m_1 από τη στιγμή που αφήνεται από το ανώτερο σημείο του τεταρτοκυκλίου και μέχρι τη βάση του, εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας, οπότε έχουμε:

$$\Theta.Μ.Κ.Ε._{(I) \rightarrow (II)}: \Delta K = \Sigma W_F \Rightarrow$$

$$K_{(II)} - K_{(I)} = W_{W_1} + W_{T_1} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 = m_1 g R \Rightarrow$$

$$v_1 = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

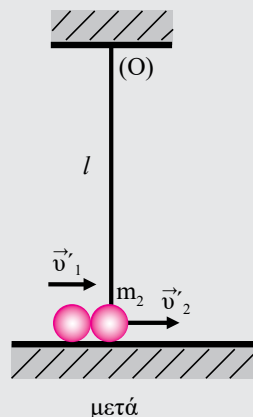


Αφού η κρούση είναι κεντρική και ελαστική, η ταχύτητα του m_1 μετά την κρούση θα δίνεται από τον τύπο:

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \Rightarrow m_1 = 2 \text{ kg}$$

β) Η ταχύτητα του m_2 μετά την κρούση θα δίνεται από τον τύπο:

$$v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \Rightarrow v'_2 = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



Το % ποσοστό της αρχικής δυναμικής ενέργειας του σώματος m_1 που μεταβιβάστηκε στο m_2 , υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\Pi\% = \frac{K'_2}{U_1} \cdot 100\% = \frac{\frac{1}{2} m_2 v_2'^2}{m_1 g R} \cdot 100\% \Rightarrow$$

$$\Pi\% = \frac{800}{9}\%$$

γ) Για την κίνηση του m_1 μετά την κρούση εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας, οπότε έχουμε:

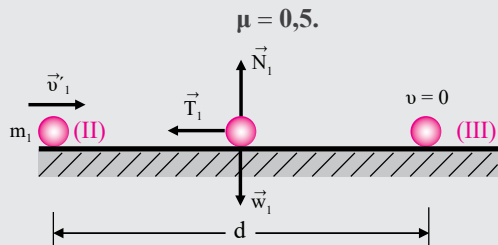
$$\text{Θ.Μ.Κ.Ε.}_{(II) \rightarrow (III)}: \Delta K = \Sigma W_F \Rightarrow$$

$$K_{(III)} - K_{(II)} = W_{T_1} \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2} m_1 v_1'^2 = -T_1 d \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2} m_1 v_1'^2 = -\mu m_1 g d \Rightarrow$$

$$\mu = \frac{v_1'^2}{2gd} \Rightarrow$$



δ) Για να μπορέσει το σώμα m_2 να εκτελέσει την ανακύκλωση, πρέπει να περάσει από το ανώτερο σημείο της κυκλικής τροχιάς του και εκεί το νήμα να είναι τεντωμένο δηλαδή: $T \geq 0$ ($T = 0$ οριακά).

Στη θέση αυτή (Α):

$$\Sigma F = F_k \Rightarrow T + W_2 = \frac{m_2 v^2}{l} \Rightarrow$$

$$T = \frac{m_2 v^2}{l} - m_2 g \quad (1)$$

Αλλά:

$$T \geq 0, \text{ άρα } (1) \Rightarrow \frac{m_2 v^2}{l} - m_2 g \geq 0 \Rightarrow$$

$$v \geq \sqrt{gl} \Rightarrow v_{\min} \geq \sqrt{gl} \Rightarrow$$

$$v_{\min} = \sqrt{18} \frac{m}{s}$$

Για την ταχύτητα που θα έπρεπε να είχε μετά την κρούση έτσι ώστε να φτάσει μέχρι το ανώτερο σημείο της κυκλικής τροχιάς του, εφαρμόζουμε τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας, οπότε έχουμε:

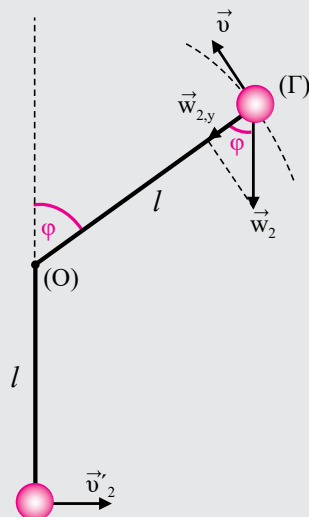
$$\text{Α.Δ.Μ.Ε.}: E_{\text{MHX}(\text{αρχ.})} = E_{\text{MHX}(\text{τελ.})} \Rightarrow$$

$$K_{(\text{αρχ.})} + U_{(\text{αρχ.})} = K_{(\text{τελ.})} + U_{(\text{τελ.})} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = \frac{1}{2} m_2 v_{\min}^2 + m_2 g 2l \Rightarrow$$

$$v_2' = \sqrt{90} \frac{m}{s} > 8 \frac{m}{s}$$

Άρα το m_2 δεν κάνει ανακύκλωση.



Στο ανώτερο σημείο της κυκλικής τροχιάς (θέση Γ) στο οποίο φθάνει τελικά το σώμα m_2 έχει ταχύτητα διάφορη από μηδέν και ισχύει:

$$\Sigma F = F_k \Rightarrow T + W_{2,y} = \frac{m_2 v^2}{l} \Rightarrow$$

$$T = \frac{m_2 v^2}{l} - m_2 g \sin \varphi$$

Στη θέση αυτή όμως το νήμα χαλαρώνει, οπότε:

$$T = 0 \Rightarrow \frac{m_2 v^2}{l} - m_2 g \sin \varphi = 0 \Rightarrow$$

$$v^2 = g / \sin \varphi$$

Ισχύει επίσης λόγω διατήρησης της μηχανικής ενέργειας:

$$\text{Α.Δ.Μ.Ε.: } E_{\text{MHX}(\alpha\rho\chi.)} = E_{\text{MHX}(\tau\epsilon\lambda.)} \Rightarrow$$

$$K_{(\alpha\rho\chi.)} + U_{(\alpha\rho\chi.)} = K_{(\tau\epsilon\lambda.)} + U_{(\tau\epsilon\lambda.)} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = \frac{1}{2} m_2 v^2 + m_2 g l (1 + \sin \varphi) \Rightarrow$$

$$32 = 9 \sin \varphi + 18 + 18 \sin \varphi \Rightarrow \sin \varphi = \frac{14}{27}$$

Άρα $v^2 = g / \sin \varphi = \frac{28}{3} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$. Οπότε έχουμε

$$K_2 = \frac{1}{2} m_2 v^2 \Rightarrow K_2 = \frac{14}{3} \text{ J}$$

1.70 α) Για την κίνηση της σφαίρας μέχρι να συναντήσει την κεκλιμένη επιφάνεια έχουμε:

$$\text{Θ.Μ.Κ.Ε.: } \Delta K = \Sigma W_F \Rightarrow$$

$$K_{(\tau\epsilon\lambda.)} - K_{(\alpha\rho\chi.)} = W_w \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m v^2 = m g h \Rightarrow v = \sqrt{2 g h} \Rightarrow$$

$$v = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

β) Μετά την κρούση της σφαίρας με την κεκλιμένη επιφάνεια, η σφαίρα κινείται οριζόντια με ταχύτητα ίδιου μέτρου με αυτό που είχε πριν την κρούση της με αυτή.

Για τον συνολικό χρόνο έχουμε:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0,4 \text{ s} \quad \text{και} \quad t_2 = \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}} = 0,6 \text{ s}$$

$$\text{οπότε } t_{\text{ολ.}} = t_1 + t_2 \Rightarrow t_{\text{ολ.}} = 1 \text{ s}$$

γ) Για τη θέση του σημείου που η σφαίρα φτάνει στο έδαφος, έχουμε:

$$x = v \cdot t_2 \Rightarrow x = 2,4 \text{ m}$$

δ) Θ.Μ.Κ.Ε.: $\Delta K = \Sigma W_F \Rightarrow$

$$K_{(\tau\epsilon\lambda.)} - K_{(\alpha\rho\chi.)} = W_w \Rightarrow$$

$$K_{(\tau\epsilon\lambda.)} - \frac{1}{2} m v^2 = m g (H - h) \Rightarrow$$

$$K_{(\tau\epsilon\lambda.)} = 52 \text{ J.}$$

1.71 α) Ισχύει:

$$|v'_0| = \frac{|v_0|}{5} \Rightarrow |v'_0| = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Εφαρμόζοντας την Α.Δ.Ο. προκύπτει:

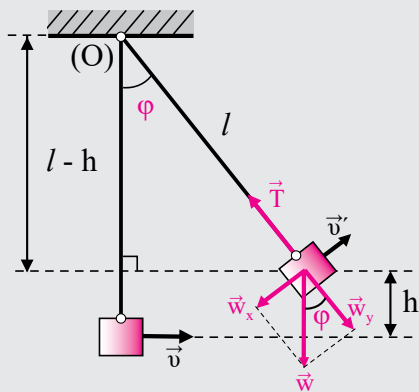
$$m |v_0| = m |v'_0| + M |v| \Rightarrow$$

$$|v| = \frac{m |v_0| - m |v'_0|}{M} \Rightarrow |v| = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

β) Η απώλεια της κινητικής ενέργειας του συστήματος είναι:

$$E_{\text{απωλ.}} = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{1}{2} m v_0'^2 - \frac{1}{2} M v^2 \Rightarrow E_{\text{απωλ.}} = 464 \text{ J}$$

γ)



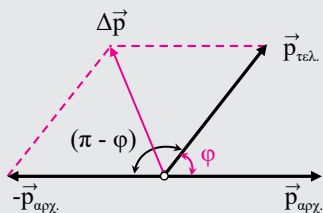
Ισχύει:

$$\sin 60^\circ = \frac{l-h}{l} \quad \text{ή} \quad h = \frac{l}{2}$$

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του σώματος μάζας M μετά την κρούση. Προκύπτει:

$$\frac{1}{2} M v'^2 - \frac{1}{2} M v^2 = -M g h \Rightarrow |v'| = \sqrt{v^2 - 2 g \frac{l}{2}} \Rightarrow$$

$$|v'| = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



Έχουμε:

$$|p_{ap\chi}| = M|v| \Rightarrow |p_{ap\chi}| = 8 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$

$$|p_{τελ}| = M|v'| \Rightarrow |p_{τελ}| = 4 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$

Προκύπτει:

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}_{τελ} - \vec{p}_{ap\chi} \Rightarrow \Delta \vec{p} = \vec{p}_{τελ} + (-\vec{p}_{ap\chi}) \Rightarrow$$

$$|\Delta p| = \sqrt{p_{τελ}^2 + p_{ap\chi}^2 + 2p_{ap\chi}p_{τελ} \cdot \cos 120^\circ} \Rightarrow$$

$$|\Delta p| = 4\sqrt{3} \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$

δ) Ισχύει:

$$\Sigma F_y = F_k \Rightarrow T - w_y = F_k \Rightarrow$$

$$T = Mg \cdot \sin \varphi + F_k (1)$$

Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι η τιμή της τάσης του νήματος T γίνεται μέγιστη όταν $\sin \varphi = 1$, δηλαδή $\varphi = 0^\circ$ (στην κατώτερη θέση αμέσως μετά την κρούση). Προκύπτει:

$$T = Mg + \frac{M \cdot v^2}{l} \Rightarrow T = \frac{140}{3} \text{ N}$$

1.72 Α) α) Οι 2 σφαίρες εκτελούν οριζόντιες βολές ταυτόχρονα. Κάθε χρονική στιγμή βρίσκονται στο ίδιο ύψος από το έδαφος. Όταν συγκρουστούν έχουμε:

$$x_1 + x_2 = d \Rightarrow v_{0,1}t_1 + v_{0,2}t_1 = d \Rightarrow t_1 = 2 \text{ s}$$

β) Για τις ταχύτητες των δύο σφαιρών πριν από την κρούση ισχύουν:

$$v_{1,y} = v_{2,y} = gt_1 = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_1 = v_2 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \Rightarrow v_1 = v_2 = 20\sqrt{2} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

γ) Η γωνία φ που σχηματίζει η ταχύτητα των 2 σωμάτων πριν την κρούση με την οριζόντια διεύθυνση είναι:

$$\eta \mu \varphi = \frac{v_{1,y}}{v_1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = 45^\circ$$

οπότε η γωνία που σχηματίζουν οι 2 ταχύτητες $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ πριν την κρούση είναι:

$$\theta = 2\varphi = 90^\circ$$

$$\text{Α.Δ.Ο.: } \vec{p}_{ολ(πριν)} = \vec{p}_{ολ(μετά)} \Rightarrow$$

$$\sqrt{(m_1v_1)^2 + (m_2v_2)^2} =$$

$$(m_1 + m_2) \cdot V \stackrel{m_1=m_2}{\Rightarrow} V = \frac{\sqrt{2}v_1}{2} \Rightarrow$$

$$V = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Στη συνέχεια το συσσωμάτωμα εκτελεί κατακόρυφη βολή προς τα κάτω από ύψος:

$$h = H - y = H - \frac{1}{2}gt_1^2 = 25 \text{ m}$$

Όταν φτάσει στο έδαφος ισχύει:

$$h = Vt'_1 + \frac{1}{2}gt_1'^2 \Rightarrow 5t_1'^2 + 20t'_1 - 25 = 0 \Rightarrow$$

$$t'_1 = 1 \text{ s}$$

Άρα η χρονική στιγμή t_2 που το συσσωμάτωμα φτάνει στο έδαφος είναι:

$$t_2 = t_1 + t'_1 \Rightarrow t_2 = 3 \text{ s}$$

Β) Όταν το συσσωμάτωμα φτάσει στο έδαφος έχει ταχύτητα:

$$v = V + gt'_1 = 30 \text{ m/s}$$

Αφού το συσσωμάτωμα έχει χάσει το 75% της αρχικής του κινητικής ενέργειας τότε μετά την κρούση με το έδαφος έχει το 25% = $\frac{1}{4}$ της αρχικής του κινητικής ενέργειας.

$$K' = \frac{K}{4} \Rightarrow \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v'^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 \Rightarrow$$

$$v' = \frac{v}{2} = 15 \text{ m/s}$$

δ) Για το μέτρο της μεταβολής της ορμής του συσσωματώματος προκύπτει:

$$\begin{aligned}
 |\Delta p| &= |p_{\text{μετά}} - p_{\text{πριν}}| = \\
 &= |(m_1 + m_2)v' - (-(m_1 + m_2)v)| = \\
 &= |(m_1 + m_2)(v' + v)| \Rightarrow \\
 |\Delta p| &= 9 \text{ kg} \cdot \text{m/s}
 \end{aligned}$$

ε) Θ.Μ.Κ.Ε.:

$$\begin{aligned}
 \Delta K &= \Sigma W_F \Rightarrow \\
 K_{(\text{τελ.})} - K_{(\text{αρχ.})} &= W_w \Rightarrow \\
 -\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v'^2 &= -(m_1 + m_2)gh' \Rightarrow \\
 h' &= \frac{v'^2}{2g} \Rightarrow h = 11,25 \text{ m}
 \end{aligned}$$

Κεφάλαιο 2: Μηχανική στερεού σώματος

ΘΕΜΑ Α

- 2.1** δ) **2.2** β) **2.3** β) **2.4** δ)
2.5 α) **2.6** α) **2.7** α) **2.8** γ)
2.9 γ) **2.10** α) **2.11** β) **2.12** α)
2.13 β) **2.14** α) **2.15** γ) **2.16** β)
2.17 β) **2.18** γ) **2.19** δ)

- 2.20** α) Σ, β) Σ, γ) Σ, δ) Λ, ε) Σ
2.21 α) Σ, β) Σ, γ) Λ, δ) Σ, ε) Λ
2.22 α) Λ, β) Λ, γ) Σ, δ) Λ, ε) Σ
2.23 α) Σ, β) Σ, γ) Λ, δ) Σ, ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

2.24 Σωστή απάντηση είναι η γ).

1) $t_0 = 0 \rightarrow t_1 = 1 \text{ s}$

Ισχύει:

$$\begin{aligned}
 N &= \frac{\Delta \theta}{2\pi} \Rightarrow N = \frac{\omega_0 \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot \Delta t^2}{2\pi} \Rightarrow \\
 N &= \left(\frac{10 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1}{2\pi} \right) \text{περ.} \Rightarrow N = \frac{6}{\pi} \text{περ. (1)}
 \end{aligned}$$

2) $t_1 = 1 \text{ s} \rightarrow t_2 = 2 \text{ s}$

Ισχύει:

$$\begin{aligned}
 N' &= \frac{\Delta \theta'}{2\pi} \Rightarrow N' = \frac{\omega_1 \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot \Delta t^2}{2\pi} \Rightarrow \\
 N' &= \frac{(\omega_0 + \alpha_{\gamma\omega\nu} t_1) \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot \Delta t^2}{2\pi} \Rightarrow \\
 N' &= \left(\frac{14 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1}{2\pi} \right) \text{περ.} \Rightarrow N' = \frac{8}{\pi} \text{περ. (2)}
 \end{aligned}$$

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει:

$$N' = \frac{4}{3} N$$

2.25 Σωστή απάντηση είναι η γ).

Σώμα Σ₁, ισχύει:

$$\alpha_{\gamma\omega\nu,1} = \frac{\Delta \omega}{\Delta t} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu,1} = \frac{\omega - 0}{t_1} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu,1} = \frac{\omega}{t_1}$$

Η χρονική εξίσωση της γωνιακής ταχύτητας του Σ₁ είναι:

$$\omega_{(1)} = \alpha_{\gamma\omega\nu,1} t \Rightarrow \omega_{(1)} = \frac{\omega}{t_1} t$$

Σώμα Σ_2 , ισχύει:

$$\alpha_{\gamma\omega\nu,2} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu,2} = \frac{0,5\omega - 2\omega}{t_1} \Rightarrow$$

$$\alpha_{\gamma\omega\nu,2} = \frac{-1,5\omega}{t_1}$$

Η χρονική εξίσωση της γωνιακής ταχύτητας του Σ_2 είναι:

$$\omega_{(2)} = 2\omega + \alpha_{\gamma\omega\nu,2}t \Rightarrow \omega_{(2)} = 2\omega - \frac{1,5\omega}{t_1}t$$

Τη χρονική στιγμή που οι γωνιακές ταχύτητες των δύο στερεών είναι ίσες, θα ισχύει:

$$\omega_{(1)} = \omega_{(2)} \Rightarrow \frac{\omega}{t_1}t = 2\omega - \frac{1,5\omega}{t_1}t \Rightarrow t = 0,8t_1$$

2.26 Σωστή απάντηση είναι η α).

Βρίσκουμε την αλγεβρική τιμή της γωνιακής επιβράδυνσης κατά τη χρονική διάρκεια $2s \rightarrow 4s$. Ισχύει:

$$\alpha_{\gamma\omega\nu,2} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu,2} = \left(\frac{10-20}{4-2} \right) \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \Rightarrow$$

$$\alpha_{\gamma\omega\nu,2} = -5 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

Υπολογίζουμε την αλγεβρική τιμή της γωνιακής ταχύτητας του στερεού τη χρονική στιγμή $t = 3 \text{ s}$. Προκύπτει:

$$\omega_3 = \omega_2 - |\alpha_{\gamma\omega\nu,2}| \cdot \Delta t \Rightarrow$$

$$\omega_3 = (20 - 5 \cdot 1) \frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow \omega_3 = 15 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Με εμβαδομέτρηση προκύπτει:

$$\Delta\theta = \left[\frac{(10+15) \cdot 1}{2} + 2 \cdot 10 \right] \text{rad} \Rightarrow \Delta\theta = 32,5 \text{ rad}$$

Ο αριθμός των περιστροφών που εκτέλεσε το στερεό από τη χρονική στιγμή $t = 3 \text{ s}$ έως τη χρονική στιγμή $t = 6 \text{ s}$ είναι:

$$N = \frac{\Delta\theta}{2\pi} \Rightarrow N = \frac{16,25}{\pi} \text{ περ.}$$

2.27 Σωστή απάντηση είναι η β).

Ισχύει:

$$\alpha = \sqrt{\alpha_{\varepsilon}^2 + \alpha_{\kappa}^2} \Rightarrow \alpha = \sqrt{(\alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R)^2 + (\omega^2 \cdot R)^2} \Rightarrow$$

$$\alpha = R \cdot \sqrt{\alpha_{\gamma\omega\nu}^2 + \omega^4}$$

2.28 Σωστή απάντηση είναι η β).

Ισχύει:

$$\frac{s_{\Gamma}}{s_{\Delta}} = \frac{\frac{R}{2} \cdot \Delta\theta}{\left(R - \frac{R}{3}\right) \cdot \Delta\theta} \Rightarrow \frac{s_{\Gamma}}{s_{\Delta}} = \frac{\frac{R}{2} \cdot \omega \cdot \Delta t}{\left(R - \frac{R}{3}\right) \cdot \omega \cdot \Delta t} \Rightarrow$$

$$\frac{s_{\Gamma}}{s_{\Delta}} = \frac{3}{4}$$

2.29 Σωστή απάντηση είναι η γ).

Βρίσκουμε την αλγεβρική τιμή της γωνιακής επιτάχυνσης κατά τη χρονική διάρκεια $0 \rightarrow 5s$. Ισχύει:

$$\alpha_{\gamma\omega\nu,1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu,1} = \left(\frac{10-5}{5-0} \right) \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \Rightarrow$$

$$\alpha_{\gamma\omega\nu,1} = 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

Υπολογίζουμε την αλγεβρική τιμή της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου τη χρονική στιγμή $t = 3 \text{ s}$. Προκύπτει:

$$\omega_3 = \omega_0 + \alpha_{\gamma\omega\nu,1} \cdot \Delta t \Rightarrow$$

$$\omega_3 = 8 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Βρίσκουμε την αλγεβρική τιμή της γωνιακής επιτάχυνσης κατά τη χρονική διάρκεια $5s \rightarrow 15s$. Ισχύει:

$$\alpha_{\gamma\omega\nu,2} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu,2} = \left(\frac{-10-10}{15-5} \right) \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \Rightarrow$$

$$\alpha_{\gamma\omega\nu,2} = -2 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

Υπολογίζουμε την αλγεβρική τιμή της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου τη χρονική στιγμή $t = 13 \text{ s}$. Προκύπτει:

$$\omega_{13} = \omega_5 - |\alpha_{\gamma\omega v, 2}| \cdot \Delta t \Rightarrow$$

$$\omega_{13} = [10 - 2 \cdot (13 - 5)] \frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow \omega_{13} = -6 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Προκύπτει:

$$\frac{\alpha_{\kappa 3}}{\alpha_{\kappa 13}} = \frac{\omega_3^2 \cdot R}{\omega_{13}^2 \cdot R} \Rightarrow \frac{\alpha_{\kappa 3}}{\alpha_{\kappa 13}} = \frac{16}{9}$$

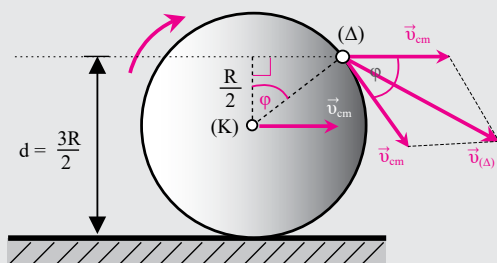
2.30 Σωστή απάντηση είναι η γ).

Έστω ότι ο δίσκος θα ακινητοποιηθεί τη χρονική στιγμή t . Προκύπτει:

$$\omega_{\text{τελ}} = \omega_0 + E_1 + E_2$$

$$0 = 12 + 2 \cdot 2 + (t - 2) \cdot (-4) \Rightarrow t = 6 \text{ s}$$

2.31 Σωστή απάντηση είναι η γ).



Ισχύει:

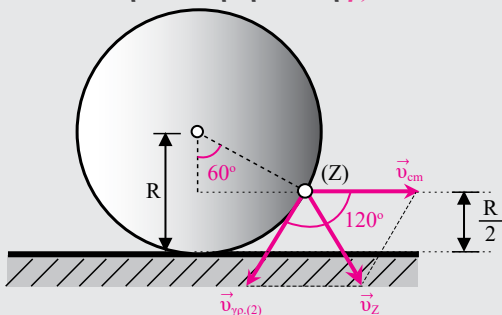
$$v_{\gamma p, \Delta} = v_{\text{cm}} = \omega R$$

Προκύπτει:

$$v_{\Delta} = \sqrt{v_{\gamma p, \Delta}^2 + v_{\text{cm}}^2 + 2v_{\gamma p, \Delta} v_{\text{cm}} \cdot \cos 60^\circ} \Rightarrow$$

$$v_{\Delta} = \sqrt{3} v_{\text{cm}}$$

2.32 Σωστή απάντηση είναι η β).



Ισχύει:

$$v_{\gamma p, Z} = v_{\text{cm}} = \omega R$$

Προκύπτει:

$$v_Z = \sqrt{v_{\gamma p, Z}^2 + v_{\text{cm}}^2 + 2v_{\gamma p, Z} v_{\text{cm}} \cdot \cos 120^\circ} \Rightarrow$$

$$v_Z = v_{\text{cm}}$$

2.33 Σωστή απάντηση είναι η α).

Ισχύει:

$$\alpha_{\gamma\omega v, 1} = \frac{\omega_1}{t_1} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega v, 1} = 5 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

Επίσης ισχύει:

$$\alpha_{\gamma\omega v, 1} R_1 = \alpha_{\gamma\omega v, 2} R_2 \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega v, 2} = \frac{\alpha_{\gamma\omega v, 1} R_1}{R_2} \Rightarrow$$

$$\alpha_{\gamma\omega v, 2} = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

Ο αριθμός των περιστροφών που εκτελεί ο τροχός (1) είναι:

$$N_1 = \frac{\frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega v, 1} t_1^2}{2\pi} \Rightarrow N_1 = \left(\frac{\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 16}{2\pi} \right) \text{περ.} \Rightarrow$$

$$N_1 = \frac{20}{\pi} \text{περ.}$$

Ο αριθμός των περιστροφών που εκτελεί ο τροχός (2) είναι:

$$N_2 = \frac{\frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega v, 2} t_1^2}{2\pi} \Rightarrow N_2 = \left(\frac{\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 16}{2\pi} \right) \text{περ.} \Rightarrow$$

$$N_2 = \frac{40}{\pi} \text{περ.}$$

2.34 Σωστή απάντηση είναι η β).

Επειδή $v_{\Delta} = \sqrt{2} v_{\text{cm}}$ το σημείο Δ ανήκει πάνω στην οριζόντια διάμετρο. Επομένως ισχύει:

$$\Gamma\Delta^2 = R^2 + O\Gamma^2 \Rightarrow \frac{5R^2}{4} = R^2 + O\Gamma^2 \Rightarrow$$

$$O\Gamma = \frac{R}{2}$$

Προκύπτει:

$$v_{\Gamma} = \omega R + \omega \frac{R}{2} \Rightarrow v_{\Gamma} = \frac{3v_{cm}}{2}$$

Τελικά έχουμε:

$$\frac{v_{\Gamma}}{v_{\Delta}} = \frac{\frac{3 \cdot v_{cm}}{2}}{\sqrt{2}v_{cm}} \Rightarrow \frac{v_{\Gamma}}{v_{\Delta}} = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{4}$$

2.35 Σωστή απάντηση είναι η β).

Τη χρονική στιγμή t_1 ισχύει:

$$v_{\Delta,1} = v \Rightarrow \omega R + \omega \frac{R}{2} = v \Rightarrow \frac{3v_{cm}}{2} = v \Rightarrow v_{cm} = \frac{2v}{3}$$

Τη χρονική στιγμή t_2 ισχύει:

$$v_{\Delta,2} = \sqrt{v_{cm}^2 + \left(\frac{v_{cm}}{2}\right)^2} \Rightarrow v_{\Delta,2} = \frac{\sqrt{5}v_{cm}}{2} \Rightarrow v_{\Delta,2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{2v}{3} \Rightarrow v_{\Delta,2} = \frac{\sqrt{5}}{3}v$$

2.36 Σωστή απάντηση είναι η α).

Ισχύει:

$$v_{\Delta} = v_{cm} + \omega R_2 \Rightarrow v_{\Delta} = \omega R_1 + \omega R_2 \Rightarrow v_{\Delta} = \omega \frac{4R}{3}$$

Επίσης ισχύει:

$$v_K = v_{cm} + \omega R_1 \Rightarrow v_K = \omega R_1 + \omega R_1 \Rightarrow v_K = \omega \frac{2R}{3}$$

Τελικά προκύπτει:

$$\frac{v_{\Delta}}{v_K} = \frac{\omega \frac{4R}{3}}{\omega \frac{2R}{3}} \Rightarrow \frac{v_{\Delta}}{v_K} = 2$$

2.37 Σωστή απάντηση είναι η α).

$$\Delta x_A = \Delta x_{cm} + l \Rightarrow \Delta x = \Delta x_{cm} + \Delta \theta \cdot r \Rightarrow$$

$$\Delta x = \Delta x_{cm} + \frac{\Delta x_{cm}}{R} \cdot r \Rightarrow \Delta x = \Delta x_{cm} \left(1 + \frac{r}{R}\right) \Rightarrow$$

$$\Delta x = \Delta x_{cm} \left(\frac{R+r}{R}\right) \Rightarrow \Delta x_{cm} = \frac{R}{R+r} \cdot \Delta x$$

2.38 Σωστή απάντηση είναι η β).

$$v_A = 2v_{cm}$$

$$\frac{S}{\Delta t} = 2 \frac{\Delta x_{cm}}{\Delta t} \Rightarrow S = 2\Delta x_{cm} \quad (1)$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{\gamma p} + \vec{v}_{cm} \Rightarrow v_B = v_{cm} - \omega \frac{R}{2} \Rightarrow$$

$$v_B = v_{cm} - \frac{v_{cm}}{2} \Rightarrow v_B = \frac{v_{cm}}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{S_B}{\Delta t} = \frac{\Delta x_{cm}}{2\Delta t} \Rightarrow S_B = \frac{S}{4}$$

2.39 Σωστή απάντηση είναι η γ).

A. $v_{\gamma p_{\text{τροχ}}} = v_{\Sigma_1} \Rightarrow \omega_{\text{τροχ}} r = 2\omega_1 R \Rightarrow$

$$\frac{\omega_{\text{τροχ}}}{\omega_1} = \frac{2R}{r} = \frac{2R}{\frac{R}{2}} = 4 \Rightarrow \frac{\omega_1}{\omega_{\text{τροχ}}} = \frac{1}{4}$$

B. Σωστή απάντηση είναι η β).

$$v_{\Sigma_2} = 2v_{cm} \quad \text{οπότε} \quad h = 2\Delta x_{cm} \Rightarrow \Delta x_{cm} = \frac{h}{2}$$

$$\text{άρα} \quad \Delta x_A = \frac{h}{2}$$

2.40 Σωστή απάντηση είναι η β).

Ισχύει:

$$\frac{|\tau_{1,2}|}{|\tau_{3,4}|} = \frac{F_1 \cdot \sin 60^\circ \cdot 2R}{F_3 2R} \Rightarrow \frac{|\tau_{1,2}|}{|\tau_{3,4}|} = \frac{1}{2}$$

2.41 Σωστή απάντηση είναι η γ).

Για να ανατραπεί ο κύβος θα πρέπει το μέτρο της ροπής της $\vec{F}$ ως προς τον άξονα περιστροφής του να είναι μεγαλύτερο από το μέτρο της ροπής του βάρους ως προς τον ίδιο άξονα. Δηλαδή να ισχύει:

$$|\tau_F| > |\tau_B| \Rightarrow Fd > w \frac{a}{2} \Rightarrow F > \frac{wa}{2d}$$

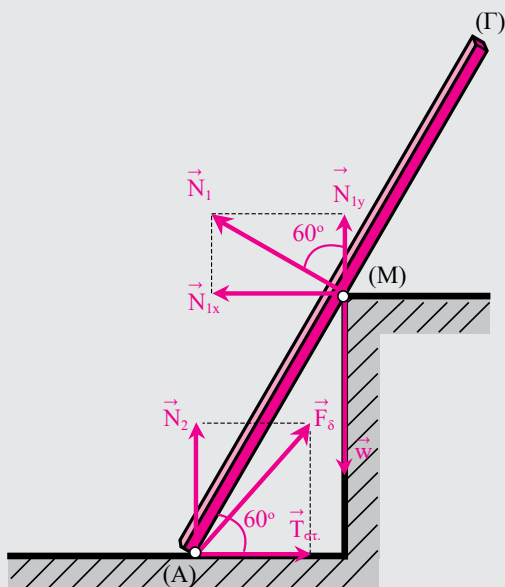
2.42 Σωστή απάντηση είναι η β).

Στη ράβδο ασκούνται η δύναμη $\vec{N}_1$ από το σκαλοπάτι, το βάρος της $\vec{w}$, η κάθετη δύναμη στήριξης $\vec{N}_2$ από το δάπεδο, καθώς και η δύναμη της στατικής τριβής $\vec{T}_{\text{στ}}$ από το δάπεδο.

Ισχύει:

$$\Sigma \tau_A = 0 \Rightarrow N_1 \frac{l}{2} - w \frac{l}{2} \cdot \sin 60^\circ = 0 \Rightarrow$$

$$N_1 = \frac{w}{2} \Rightarrow N_1 = \frac{w}{2}$$



Από τη συνθήκη ισορροπίας στον οριζόντιο άξονα $x'x$ προκύπτει:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T_{\sigma\tau} = N_{1x} \Rightarrow T_{\sigma\tau} = N_1 \eta \mu 60^\circ \Rightarrow$$

$$T_{\sigma\tau} = \frac{w}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow T_{\sigma\tau} = \frac{\sqrt{3}w}{4}$$

Από τη συνθήκη ισορροπίας στον κατακόρυφο άξονα $y'y$ προκύπτει:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow w = N_{1y} + N_2 \Rightarrow$$

$$w = N_1 \sin 60^\circ + N_2 \Rightarrow w = \frac{w}{4} + N_2 \Rightarrow$$

$$N_2 = \frac{3w}{4}$$

Το μέτρο της δύναμης $\vec{F}_\delta$ που δέχεται η ράβδος από το δάπεδο είναι ίσο με:

$$F_\delta = \sqrt{T_{\sigma\tau}^2 + N_2^2} \Rightarrow F_\delta = \sqrt{\frac{3w^2}{16} + \frac{9w^2}{16}} \Rightarrow$$

$$F_\delta = \frac{\sqrt{3}w}{2}$$

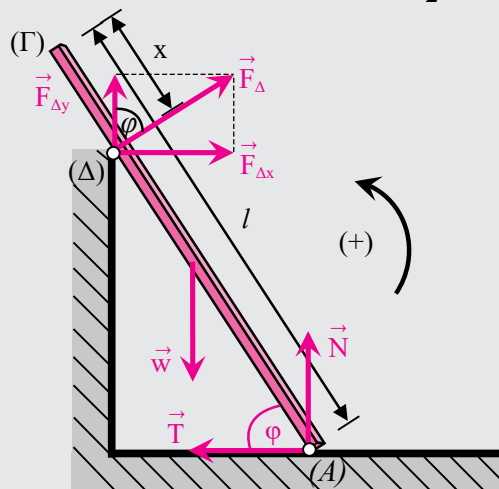
2.43 Α. Σωστή απάντηση είναι η **α**).

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_{\Delta x} = T \Rightarrow F_\Delta \eta \mu \phi = \mu N \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{\Delta y} + N = w \Rightarrow N = w - F_\Delta \sin \phi \quad (2)$$

$$(1) \Rightarrow F_\Delta \eta \mu \phi = \mu (w - F_\Delta \sin \phi) \Rightarrow$$

$$F_\Delta \eta \mu \phi = \mu w - \mu F_\Delta \sin \phi \Rightarrow F_\Delta = \frac{w}{2}$$

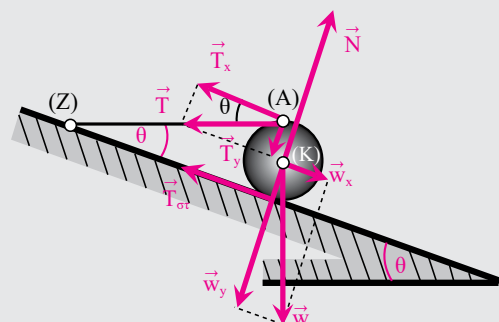


Β. Σωστή απάντηση είναι η **γ**).

$$\Sigma \tau_{(A)} = 0 \Rightarrow F_\Delta (l - x) - w \frac{l}{2} \sin \phi = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{w}{2} (l - x) = w \frac{l}{2} \sin \phi \Rightarrow x = 0, 2l = \frac{l}{5}$$

2.44 Α. Σωστή απάντηση είναι η **α**).



Για να ισορροπεί η σφαίρα πρέπει $\Sigma \tau_{(K)} = 0$. Ροπές προκαλούν οι $\vec{T}$ και η $\vec{T}_{\sigma\tau}$. Έτσι πρέπει η ροπή της τριβής να προκαλεί ωρολογιακή περιστροφή ως προς το K. Για να γίνει αυτό πρέπει να είναι προς τα πάνω.

Β. Σωστή απάντηση είναι η β).

$$\Sigma \vec{\tau}_{(K)} = 0 \Rightarrow T \cdot R = T_{\sigma} \cdot R \Rightarrow T = T_{\sigma} \quad (1)$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T_{\sigma} + T_x = w_x \Rightarrow$$

$$T_{\sigma} + T \sin \theta = mg \eta \mu \theta \Rightarrow T = \frac{mg \eta \mu \theta}{1 + \sin \theta} \quad (1)$$

Γ. Σωστή απάντηση είναι η α).

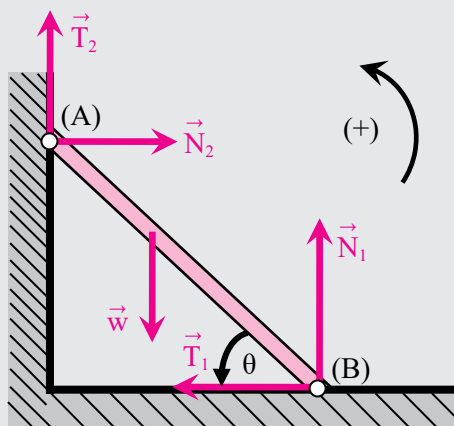
$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = T_y + w_y = T \eta \mu \theta + mg \sin \theta \Rightarrow$$

$$N = \frac{mg \eta \mu \theta}{1 + \sin \theta} \eta \mu \theta + mg \sin \theta \Rightarrow$$

$$N = \frac{mg \eta \mu^2 \theta + mg \sin \theta + mg \sin^2 \theta}{1 + \sin \theta} \Rightarrow$$

$$N = \frac{mg + mg \sin \theta}{1 + \sin \theta} \Rightarrow N = mg$$

2.45 Σωστή απάντηση είναι η α).



$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T_1 = N_2 \Rightarrow \mu_1 N_1 = N_2 \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_1 + T_2 = w \Rightarrow N_1 + \mu_2 N_2 = w \Rightarrow N_1 + \mu_2 \mu_1 N_1 = w \Rightarrow N_1 (1 + \mu_1 \mu_2) = w \Rightarrow$$

$$N_1 = \frac{w}{1 + \mu_1 \mu_2} \quad \text{και} \quad N_2 = \frac{\mu_1 w}{1 + \mu_1 \mu_2}$$

$$\Sigma \vec{\tau}_{(B)} = 0 \Rightarrow w \frac{l}{2} \sin \theta = N_2 l \eta \mu \theta + T_2 l \sin \theta \Rightarrow$$

$$\frac{w}{2} \sin \theta = N_2 \eta \mu \theta + \mu_2 N_2 \sin \theta \Rightarrow$$

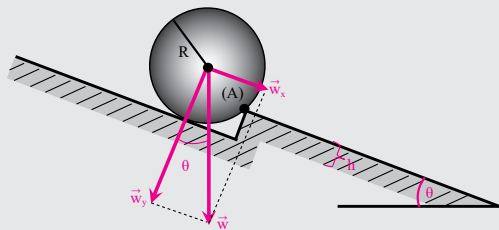
$$\frac{w}{2} \sin \theta = \frac{\mu_1 w}{1 + \mu_1 \mu_2} \eta \mu \theta + \mu_2 \frac{\mu_1 w}{1 + \mu_1 \mu_2} \sin \theta \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \sin \theta - \frac{\mu_2 \mu_1}{1 + \mu_1 \mu_2} \sin \theta = \frac{\mu_1}{1 + \mu_1 \mu_2} \eta \mu \theta \Rightarrow$$

$$\sin \theta \frac{1 + \mu_1 \mu_2 - 2 \mu_1 \mu_2}{2(1 + \mu_1 \mu_2)} = \frac{\mu_1}{1 + \mu_1 \mu_2} \eta \mu \theta \Rightarrow$$

$$\epsilon \phi \theta = \frac{1 - \mu_1 \mu_2}{2 \mu_1}$$

2.46 Σωστή απάντηση είναι η γ).



$$\tau_{w_x(A)} \geq \tau_{w_y(A)} \Rightarrow$$

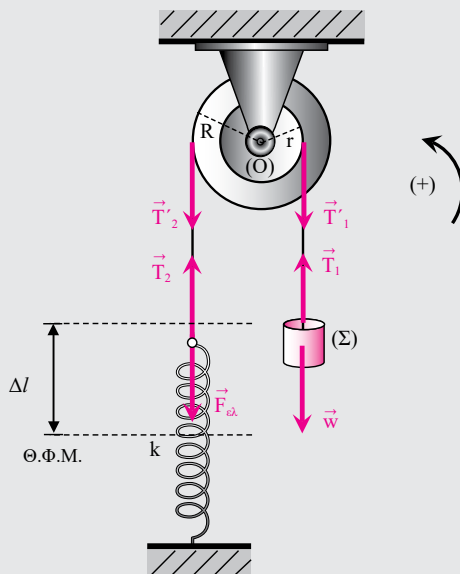
$$w_x (R - h) \geq w_y \sqrt{R^2 - (R - h)^2} \Rightarrow$$

$$w \cdot \eta \mu \theta \frac{R}{2} \geq w \cdot \sin \theta \cdot \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} \Rightarrow$$

$$\eta \mu \theta \cdot \frac{R}{2} \geq \sin \theta \cdot R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$\epsilon \phi \theta \geq \sqrt{3} \Rightarrow \theta_{\min} = 60^\circ$$

2.47 Σωστή απάντηση είναι η α).



Αφού το σώμα Σ ισορροπεί ισχύει ότι:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T_1 = mg$$

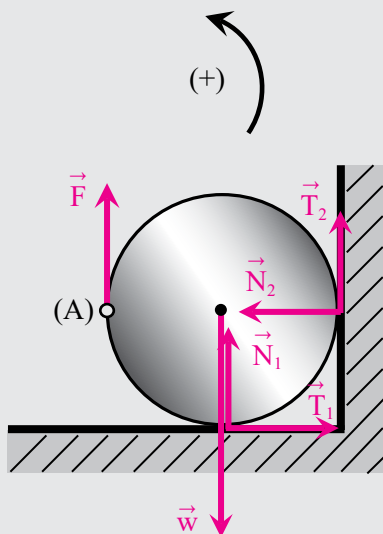
Το νήμα είναι αβαρές άρα $T'_1 = T_1 = mg$

Η τροχαλία ισορροπεί άρα ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(O)} = 0 \Rightarrow T'_2 R - T'_1 r = 0 \Rightarrow T'_2 = \frac{T'_1}{2} = \frac{mg}{2}$$

$$T'_2 = T_2 = F_{ελ} = k \Delta l \Rightarrow \frac{mg}{2} = k \Delta l \Rightarrow \Delta l = \frac{mg}{2k}$$

2.48 Σωστή απάντηση είναι η α).



$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T_1 = N_2 \Rightarrow \mu N_1 = N_2 \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F + T_2 + N_1 = w \Rightarrow F + \mu N_2 + N_1 = w \quad (1)$$

$$F + \mu^2 N_1 + N_1 = w \Rightarrow F + 1,25 N_1 = w \quad (2)$$

$$\Sigma \tau_{(K)} = 0 \Rightarrow -FR + T_2 R + T_1 R = 0 \Rightarrow$$

$$F = T_1 + T_2 \Rightarrow F = \mu N_1 + \mu N_2 \quad (1)$$

$$F = \mu N_1 + \mu^2 N_1 = 0,75 N_1 \Rightarrow N_1 = \frac{4F}{3} \quad (3)$$

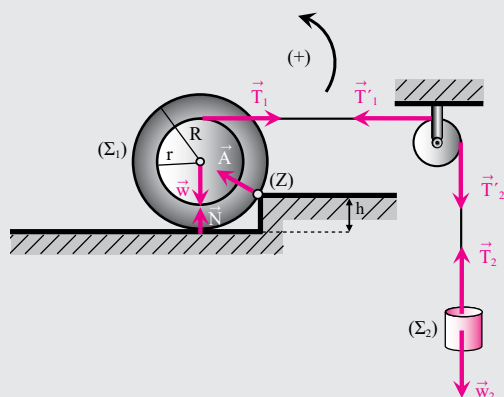
$$(2) \Rightarrow F + 1,25 \frac{4F}{3} = w \Rightarrow F = \frac{3w}{8}$$

2.49 Σωστή απάντηση είναι η α).

Το σώμα Σ₂ ισορροπεί άρα $\Sigma F = 0 \Rightarrow T_2 = m_2 g$

Η τροχαλία είναι αβαρής άρα:

$$T_1 = T'_1 = T_2 = T'_2 = m_2 g \quad (1)$$



Για να υπερπηδήσει το εμπόδιο πρέπει:

$$\tau_{T_1(Z)} \geq \tau_{w(Z)} \Rightarrow$$

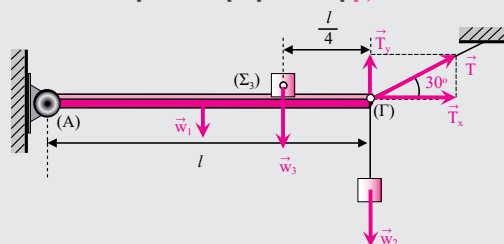
$$T_1 (R + r - h) \geq w \sqrt{R^2 - (R - h)^2} \Rightarrow$$

$$T_1 \left(R + \frac{2R}{3} - \frac{R}{2} \right) \geq w \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} \Rightarrow$$

$$T_1 \frac{7R}{6} \geq w \frac{R\sqrt{3}}{2} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} m_2 g \frac{7}{3} \geq mg\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$m_2 \geq \frac{3\sqrt{3}m}{7}$$

2.50 Σωστή απάντηση είναι η β).



Ισχύει:

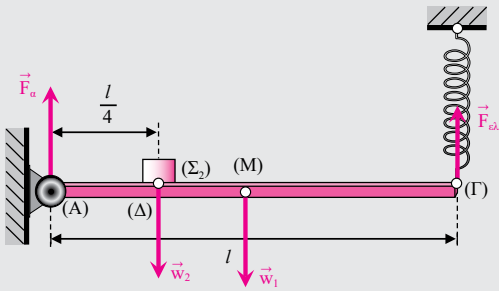
$$\Sigma \tau_A = 0 \Rightarrow T_{0p} \cdot \eta \mu 30^\circ = w_1 \frac{l}{2} + w_3 \frac{3l}{4} + w_2 l \Rightarrow$$

$$10w \frac{l}{2} = 2w \frac{l}{2} + w_3 \frac{3l}{4} + wl \Rightarrow w_3 = 4w$$

2.51 Σωστή απάντηση είναι η β).

Το μέτρο της δύναμης που ασκεί το ελατήριο στη ράβδο είναι:

$$F_{ελ} = k \cdot \Delta l \Rightarrow F_{ελ} = k \cdot \frac{2w}{k} \Rightarrow F_{ελ} = 2w$$



Ισχύει:

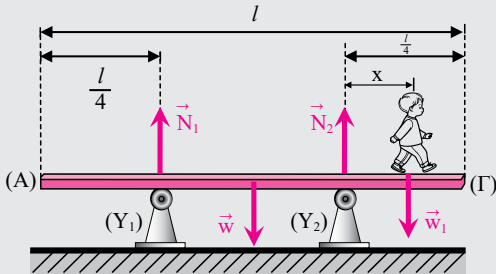
$$\Sigma \tau_A = 0 \Rightarrow F_{\alpha} l = w_2 \frac{l}{4} + w_1 \frac{l}{2} \Rightarrow$$

$$2wl = w_2 \frac{l}{4} + w \frac{l}{2} \Rightarrow w_2 = 6w$$

Από την ισορροπία της ράβδου προκύπτει:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{\alpha} + F_{\epsilon\lambda} = w_1 + w_2 \Rightarrow F_{\alpha} = 5w$$

2.52 Σωστή απάντηση είναι η α).



Έστω x η θέση του παιδιού ως προς το υποστήριγμα (2).

Έχουμε:

$$\Sigma \tau_{(2)} = 0 \Rightarrow -N_1 \frac{l}{2} + w \frac{l}{4} - w_1 x = 0 \Rightarrow$$

$$-N_1 \frac{l}{2} + w \frac{l}{4} - 2wx = 0 \Rightarrow N_1 = \frac{2w}{l} \left(\frac{l}{4} - 2x \right)$$

Για να μην ανατρέπεται η ράβδος θα πρέπει:

$$N_1 \geq 0 \Rightarrow \frac{2w}{l} \left(\frac{l}{4} - 2x \right) \geq 0 \Rightarrow$$

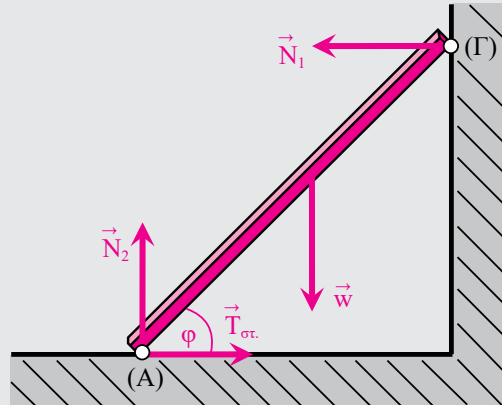
$$x \leq \frac{l}{8} \Rightarrow x_{\max} = \frac{l}{8}$$

2.53 Σωστή απάντηση είναι η β).

Στη ράβδο ασκούνται η δύναμη $\vec{N}_1$ από τον κατακόρυφο τοίχο, το βάρος της $\vec{w}$, η κάθετη δύναμη στήριξης $\vec{N}_2$ από το δάπεδο καθώς και η δύναμη της στατικής τριβής $\vec{T}_{\sigma\tau}$. Από το δάπεδο. Ισχύει:

$$\Sigma \tau_A = 0 \Rightarrow N_1 l \cdot \eta \mu \varphi - w \frac{l}{2} \cdot \sigma \upsilon \nu \varphi = 0 \Rightarrow$$

$$N_1 = \frac{3w}{8}$$



Από τη συνθήκη ισορροπίας στον οριζόντιο άξονα x'x προκύπτει:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T_{\sigma\tau} = N_1 \Rightarrow T_{\sigma\tau} = \frac{3w}{8}$$

Από τη συνθήκη ισορροπίας στον κατακόρυφο άξονα y'y έχουμε:

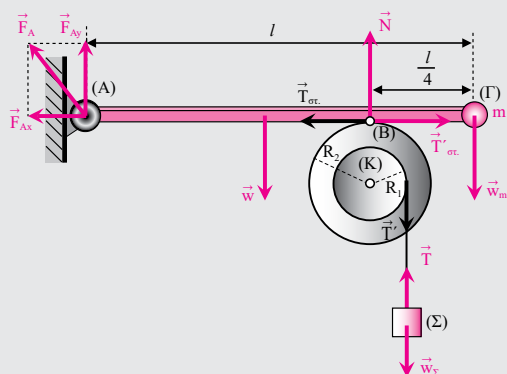
$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_2 = w$$

Γενικά ισχύει:

$$T_{\sigma\tau} \leq \mu_{\sigma} N_2 \Rightarrow \frac{3w}{8} \leq \mu_{\sigma} w \Rightarrow \mu_{\sigma} \geq \frac{3}{8}$$

$$\mu_{\sigma, \min} = \frac{3}{8}$$

2.54 Σωστή απάντηση είναι η γ).



Από την ισορροπία της ράβδου προκύπτει:

$$\Sigma \tau_A = 0 \Rightarrow N \frac{3l}{4} = w \frac{l}{2} + \frac{w}{2} l \Rightarrow N = \frac{4w}{3}$$

Από την ισορροπία του σώματος Σ, προκύπτει:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T = \frac{w}{2}$$

Από την ισορροπία του στερεού προκύπτει:

$$\Sigma \tau_{(O)} = 0 \Rightarrow TR = T_{\sigma} 2R \Rightarrow \frac{w}{2} = 2T_{\sigma} \Rightarrow$$

$$T_{\sigma} = \frac{w}{4}$$

Ισχύει:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow \vec{F}_{Ax} = T'_{\sigma} \Rightarrow \vec{F}_{Ax} = T_{\sigma} \Rightarrow \vec{F}_{Ax} = \frac{w}{4}$$

Επίσης ισχύει:

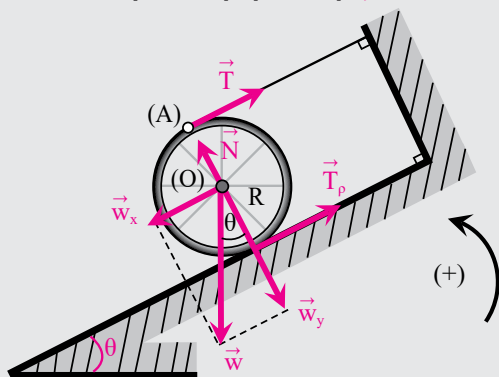
$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{Ay} + N = w + \frac{w}{2} \Rightarrow F_{Ay} = \frac{w}{6}$$

Τελικά έχουμε:

$$F_A = \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2} \Rightarrow F_A = \sqrt{\frac{w^2}{16} + \frac{w^2}{36}} \Rightarrow$$

$$F_A = \sqrt{13} \frac{w}{12}$$

2.55 Σωστή απάντηση είναι η α).



$$\Sigma \tau_{(O)} = 0 \Rightarrow TR = T_p R \Rightarrow T = T_p \quad (1)$$

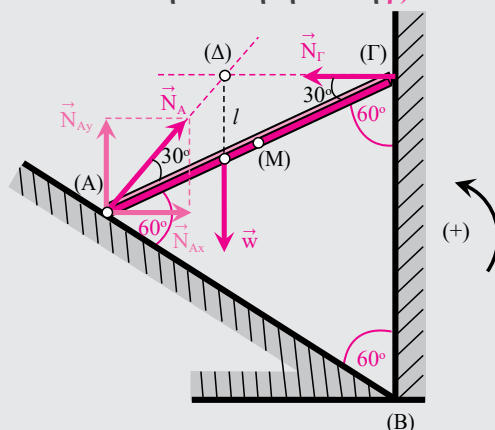
$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T + T_p = w_x \Rightarrow$$

$$2T_p = mg \sin \theta \Rightarrow T_p = \frac{mg \sin \theta}{2} \quad (2)$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = w_y \Rightarrow N = mg \cos \theta \quad (3)$$

$$T_p = \mu_{op} N \Rightarrow \frac{mg \sin \theta}{2} = \mu_{op} mg \cos \theta \Rightarrow \mu_{op} = \frac{\tan \theta}{2}$$

2.56 A. Σωστή απάντηση είναι η β).



Η $\vec{N}_A$ και η $\vec{N}_G$ τέμνονται στο Δ και σχηματίζουν ισοσκελές τρίγωνο ΑΓΔ. Για να ισορροπεί η δοκός πρέπει το $\vec{w}$ να διέρχεται από το Δ. Αν ήταν ομογενής η δοκός, ο φορέας του $\vec{w}$ δεν θα διερχόταν από το Δ αφού για να διερχόταν θα έπρεπε $\vec{w} \perp \text{ΑΓ}$, το οποίο είναι άτοπο.

B. Σωστή απάντηση είναι η α).

$$\Sigma \tau_{(A)} = 0 \Rightarrow N_G l \sin 30^\circ - w x \sin 30^\circ = 0 \Rightarrow$$

$$N_G l = w x \sqrt{3} \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_{Ay} = w \Rightarrow N_A \sin 60^\circ = w \Rightarrow$$

$$N_A \frac{\sqrt{3}}{2} = w \quad (2)$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N_G = N_{Ax} \Rightarrow N_G = N_A \cos 60^\circ \Rightarrow$$

$$N_G = \frac{N_A}{2} \quad (3)$$

$$(1) \Rightarrow \frac{(2),(3)}{2} N_A l = \frac{N_A \sqrt{3}}{2} x \sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{l}{3}$$

2.57 Σωστή απάντηση είναι η α).

Εφαρμόζοντας την Αρχή Διατήρησης της Στροφορμής για το σφαιρίδιο προκύπτει:

$$L_{\text{αρχ}} = L_{\text{τελ}} \Rightarrow mvR = mv' \frac{R}{2} \Rightarrow$$

$$m\omega R^2 = m\omega' \frac{R^2}{4} \Rightarrow \omega' = 4\omega$$

2.58 Σωστή απάντηση είναι η β).

Από την εφαρμογή της Αρχής Διατήρησης της Στροφορμής έχουμε:

$$L_{\text{αρχ}} = L_{\text{τελ}} \Rightarrow p_{\alpha} r_{\alpha} = p_{\pi} r_{\pi} \Rightarrow \frac{p_{\alpha}}{p_{\pi}} = \frac{r_{\pi}}{r_{\alpha}} \Rightarrow \frac{p_{\alpha}}{p_{\pi}} = \frac{3}{4}$$

2.59 Σωστή απάντηση είναι η β).

Το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας της σφαίρας (1) είναι:

$$v_1 = \omega d \quad (1)$$

Το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας της σφαίρας (2) είναι:

$$v_2 = \omega 3d \Rightarrow v_2 = 3v_1 \quad (2)$$

Για το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας της σφαίρας (1), επίσης ισχύει:

$$L = mv_1 d \Rightarrow v_1 = \frac{L}{md} \quad (3)$$

Για την κινητική ενέργεια του συστήματος έχουμε:

$$K = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 \Rightarrow K = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}m9v_1^2 \Rightarrow$$

$$K = 5mv_1^2 \Rightarrow K = 5m \frac{L^2}{m^2 d^2} \Rightarrow K = \frac{5L^2}{md^2}$$

ΘΕΜΑ Γ-Δ

2.60 α) Το νήμα είναι μη εκτατό και δεν γλιστρά στο αυλάκι του δίσκου, επομένως ισχύει:

$$v_z = v_A \quad \text{ή} \Rightarrow v_z = v_{\text{cm}} + \omega r \Rightarrow$$

$$\alpha_z = \alpha_{\gamma\omega\nu} R + \alpha_{\gamma\omega\nu} r \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\alpha_z}{R+r} \Rightarrow$$

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = 20 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

β) Ο δίσκος εκτελεί κύλιση χωρίς ολίσθηση. Επομένως ισχύει:

$$\frac{dv_{\text{cm}}}{dt} = \alpha_{\text{cm}} = \alpha_{\gamma\omega\nu} R \Rightarrow \frac{dv_{\text{cm}}}{dt} = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

γ) Ισχύει:

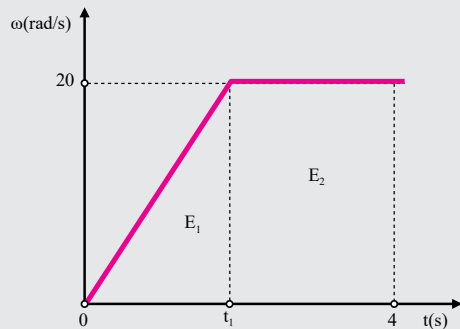
$$\Delta x_{\text{cm}} = \frac{1}{2} \alpha_{\text{cm}} t_1^2 \Rightarrow \Delta x_{\text{cm}} = 16 \text{ m}$$

δ) Για το μήκος του νήματος που έχει ξετυλιχτεί έχουμε:

$$l_{\text{νημ}} = \Delta x_z - \Delta x_{\text{cm}} \Rightarrow l_{\text{νημ}} = \frac{1}{2} \alpha_z t_1^2 - \Delta x_{\text{cm}} \Rightarrow$$

$$l_{\text{νημ}} = 4 \text{ m}$$

2.61 α) Σχεδιάζουμε το διάγραμμα του μέτρου της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου σε συνάρτηση με τον χρόνο.



Από εμβαδομέτρηση προκύπτει:

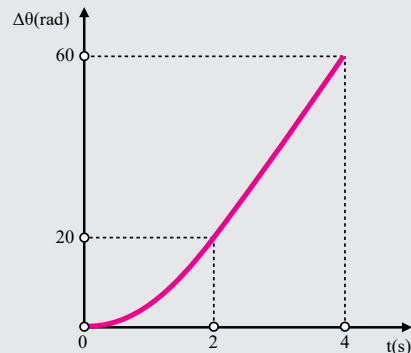
$$\frac{20t_1}{2} + 20(4-t_1) = 60 \Rightarrow t_1 = 2 \text{ s}$$

β) Ισχύει:

$$0 \rightarrow 2 \text{ s}: \Delta\theta_1 = E_1 \Rightarrow \Delta\theta_1 = 20 \text{ rad}$$

$$2 \text{ s} \rightarrow 4 \text{ s}: \Delta\theta_2 = E_2 \Rightarrow \Delta\theta_2 = 40 \text{ rad}$$

Το διάγραμμα της γωνίας $\Delta\theta$ που διαγράφει ο δίσκος σε συνάρτηση με τον χρόνο είναι το εξής:



Επίσης ισχύει:

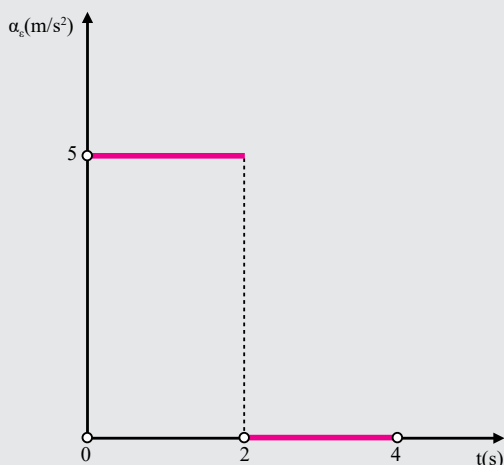
$0 \rightarrow 2\text{s}$:

$$\alpha_{\varepsilon,1} = \alpha_{\gamma\omega\nu,1} R \Rightarrow \alpha_{\varepsilon,1} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$2\text{s} \rightarrow 4\text{s}$:

$$\alpha_{\varepsilon,2} = \alpha_{\gamma\omega\nu,2} R \text{ ή } \alpha_{\varepsilon,2} = 0$$

Το διάγραμμα του μέτρου της επιτάχυνσης επιτάχυνσης ενός σημείου της περιφέρειας του δίσκου σε συνάρτηση με τον χρόνο είναι το εξής:



γ) Τη χρονική στιγμή $t = 1$ s το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου είναι:

$$\omega = \alpha_{\gamma\omega\nu,1} t \Rightarrow \omega = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Με εμβαδομέτρηση προκύπτει:

$$\Delta\theta = \left[\frac{(10+20) \cdot 1}{2} + 20 \cdot (3-2) \right] \text{rad} \Rightarrow \Delta\theta = 35 \text{rad}$$

Το τόξο που διαγράφει το σημείο Δ είναι:

$$s = r \cdot \Delta\theta \Rightarrow s = 7 \text{ m}$$

δ) Το μέτρο της επιτάχυνσης ενός σημείου της περιφέρειας του δίσκου τη χρονική στιγμή $t = 1$ s είναι:

$$\alpha = \sqrt{\alpha_{\kappa}^2 + \alpha_{\varepsilon}^2} \Rightarrow \alpha = \sqrt{(\omega^2 R)^2 + (\alpha_{\gamma\omega\nu} R)^2} \Rightarrow \alpha = 5\sqrt{101} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

2.62 α) Ισχύει:

$$0 = \omega_0 - \alpha_{\gamma\omega\nu} t_1 \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\omega_0}{t_1} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = 2 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

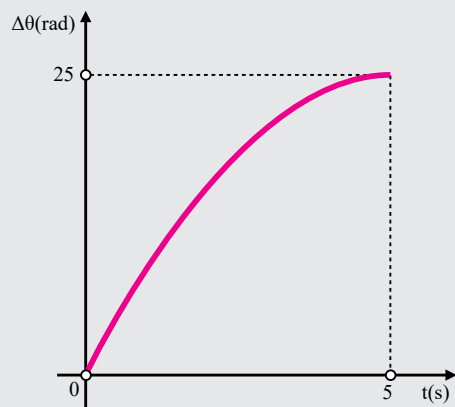
Το μέτρο της επιτρόχιας επιβράδυνσης ενός σημείου της περιφέρειας του δίσκου είναι:

$$\alpha_{\varepsilon} = \alpha_{\gamma\omega\nu} R \Rightarrow \alpha_{\varepsilon} = 0,4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

β) Προκύπτει:

$$\Delta\theta_{\text{ολ}} = \frac{\omega_0^2}{2\alpha_{\gamma\omega\nu}} \Rightarrow \Delta\theta_{\text{ολ}} = 25 \text{rad}$$

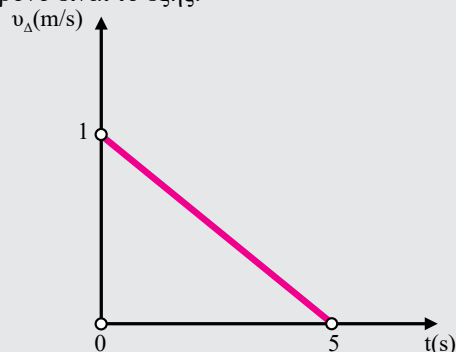
Το διάγραμμα της γωνίας $\Delta\theta$ που διαγράφει ο δίσκος σε συνάρτηση με τον χρόνο είναι το εξής:



γ) Το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του σημείου Δ τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ είναι:

$$v_{\Delta} = \omega_0 r \Rightarrow v_{\Delta} = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Το διάγραμμα του μέτρου της γραμμικής ταχύτητας του σημείου Δ σε συνάρτηση με τον χρόνο είναι το εξής:



δ) Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου τη χρονική στιγμή $t_2 = 2 \text{ s}$ είναι:

$$\omega_2 = \omega_0 - \alpha_{\gamma\omega\nu} t_2 \Rightarrow \omega_2 = 6 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

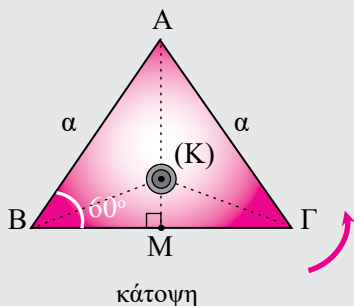
Ο αριθμός των περιστροφών που εκτελεί ο δίσκος κατά το τρίτο δευτερόλεπτο της κίνησής του υπολογίζεται από τον τύπο:

$$N = \frac{\Delta\theta_{2-3}}{2\pi} \Rightarrow N = \frac{\omega_2 \cdot \Delta t - \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot \Delta t^2}{2\pi} \Rightarrow$$

$$N = \frac{2,5}{\pi} \text{ περ.}$$

2.63 α) Ισχύει:

$$\omega = \alpha_{\gamma\omega\nu} t_1 \Rightarrow \omega = 2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$



$$\eta\mu 60^\circ = \frac{(AM)}{\alpha} \Rightarrow (AM) = \alpha \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow (AM) = 3 \text{ m}$$

$$(AK) = \frac{2}{3} (AM) = 2 \text{ m}$$

$$v_{\gamma p(A)} = \omega (AK) \Rightarrow v_{\gamma p(A)} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

β) Έχουμε:

$$v_{\gamma p(Z)} = \omega \frac{1}{3} (\Gamma Z) \Rightarrow v_{\gamma p(Z)} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

γ) Προκύπτει:

$$\Delta\theta = \frac{2\pi}{3} \text{ rad} \Rightarrow \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} t_2^2 = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{3} t_2^2 = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow t_2 = 2 \text{ s}$$

δ) Ισχύει:

$$\alpha_{\kappa} = \omega^2 (\Gamma K) = (\alpha_{\gamma\omega\nu} t_2)^2 (\Gamma K) \Rightarrow \alpha_{\kappa} = \frac{80 \text{ m}}{\text{s}^2}$$

2.64 α) Σύνθετη κίνηση (Επιβραδυνόμενη μεταφορική και ομαλή στροφική)

β) Ισχύει:

$$\alpha_{\text{cm}} = g \Rightarrow \alpha_{\text{cm}} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

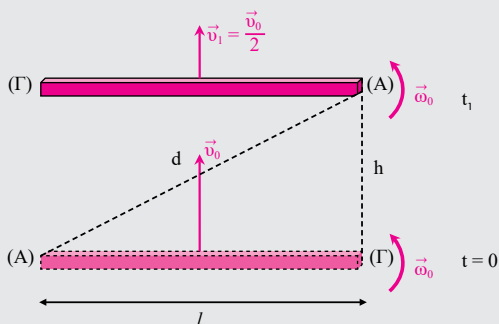
$$h = v_o t - \frac{1}{2} |\alpha_{\text{cm}}| t^2 \Rightarrow h = 0,8 \text{ m}$$

γ) Προκύπτει:

$$\Delta\theta = \omega_o t \Rightarrow \Delta\theta = 10\pi \text{ rad}$$

$$N = \frac{\Delta\theta}{2\pi} \Rightarrow N = 5 \text{ περιστροφές}$$

δ) Έχουμε:



$$v = v_o - |\alpha_{\text{cm}}| t_1 \Rightarrow t_1 = 0,2 \text{ s} \Rightarrow$$

$$\Delta\theta = \omega_o t_1 \Rightarrow \Delta\theta = 5\pi \text{ rad}$$

$$N = \frac{\Delta\theta}{2\pi} \Rightarrow N = 2,5 \text{ περιστροφές}$$

$$h' = v_o t_1 - \frac{1}{2} |\alpha_{\text{cm}}| t_1^2 \Rightarrow h' = 0,6 \text{ m}$$

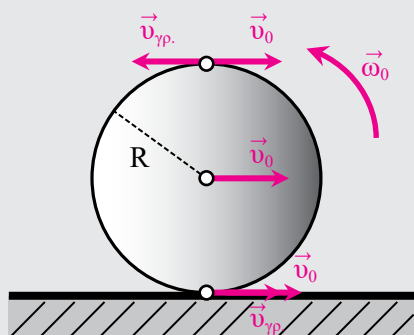
$$d = \sqrt{l^2 + h^2} \Rightarrow d = 1 \text{ m}$$

2.65 α) Για το κατώτερο σημείο ισχύει:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{\gamma p} + \vec{v}_0 \Rightarrow v_A = v_{\gamma p} + v_o \Rightarrow$$

$$v_A = \omega_o R + v_o \neq 0$$

Άρα η σφαίρα κυλίζει ολισθαίνοντας.



β) Για το ανώτερο σημείο ισχύει:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{gp} + \vec{v}_0 \Rightarrow v_B = v_0 - \omega_0 R \Rightarrow v_B = 0$$

γ) Για το ανώτερο σημείο ισχύει:

$$v = v_0 - \alpha_{cm} t_1 \stackrel{v=0}{\Rightarrow} t_1 = \frac{v_0}{\alpha_{cm}} \Rightarrow t_1 = 5s$$

δ) Ισχύει:

$$\omega = \omega_0 - \alpha_{\gamma\omega\nu} t_1 \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\omega_0}{t_1} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = 4 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

2.66 α) Αφού όλα τα σημεία της ράβδου δεν έχουν την ίδια ταχύτητα τότε η σανίδα δεν εκτελεί μεταφορική κίνηση. Επιπλέον, αφού το κέντρο μάζας της έχει ταχύτητα δεν εκτελεί στροφική. Άρα η κίνηση της ράβδου είναι σύνθετη.

β) Ισχύει:

$$v_A = v_{cm} + v_{gp} \Rightarrow$$

$$3v_0 = v_0 + v_{gp} \Rightarrow$$

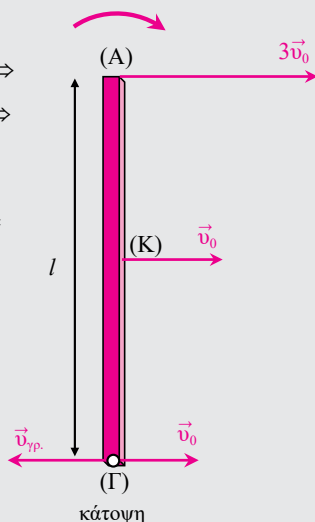
$$v_{gp} = 2v_0$$

$$v_{\Gamma} = v_{cm} - v_{gp} =$$

$$v_0 - 2v_0 \Rightarrow$$

$$v_{\Gamma} = -v_0 \Rightarrow$$

$$v_{\Gamma} = -4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



γ) Έχουμε:

$$(t_1) \rightarrow v_{gp} = 2v_0 \Rightarrow$$

$$\omega \frac{l}{2} = 2v_0 \Rightarrow$$

$$v_0 = \frac{\omega l}{4}$$

Θέλουμε σε ένα σημείο Δ να ισχύει:

$$v_{\Delta} = 0 \Rightarrow \vec{v}_{cm} = -\vec{v}_{gp(r)}$$

Άρα το σημείο Δ είναι μεταξύ των σημείων (Κ) και (Γ) οπότε κατά μέτρο ισχύει:

$$v_0 = \frac{\omega l}{4}$$

$$v_{cm} = v_{gp(r)} \Rightarrow v_0 = \omega r \Rightarrow$$

$$\frac{\omega l}{4} = \omega r \Rightarrow$$

$$r = \frac{l}{4} \Rightarrow r = 0,25 \text{ m}$$

$$\left. \begin{aligned} \delta) \quad v'_A = 4v_0 &\Rightarrow v_{cm} + \frac{\omega' l}{2} = 4v_0 \\ v'_{\Gamma} = 0 &\Rightarrow v_{cm} = \frac{\omega' l}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

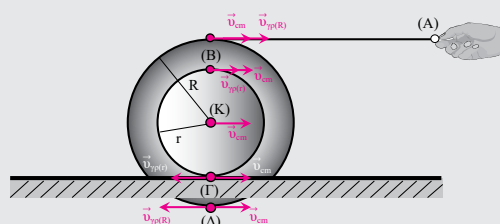
$$2v_{cm} = 4v_0 \Rightarrow v_{cm} = 2v_0 \Rightarrow v_{cm} = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\mathbf{2.67 \alpha)} \quad v_{\Gamma} = 0 \Rightarrow v_{cm} = v_{gp(r)} \Rightarrow v_{cm} = \omega r$$

$$v_A = v_{cm} + v_{gp(R)} \Rightarrow v_A = v_{cm} + \omega R \Rightarrow$$

$$v_A = v_{cm} + \frac{v_{cm}}{r} R \Rightarrow v_A = v_{cm} \left(1 + \frac{R}{r} \right) \Rightarrow$$

$$v_{cm} = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



β) Προκύπτει:

$$v_B = v_{cm} + v_{\gamma p(r)} = v_{cm} + \omega r \Rightarrow$$

$$v_B = 2v_{cm} \Rightarrow v_B = 6 \frac{m}{s}$$

$$v_r = 0$$

$$v_A = v_{cm} - v_{\gamma p(R)} = v_{cm} - \omega R \Rightarrow$$

$$v_A = v_{cm} - \frac{v_{cm}}{r} R \Rightarrow$$

$$v_A = v_{cm} \left(1 - \frac{R}{r} \right) \Rightarrow$$

$$v_A = -3 \frac{m}{s}$$

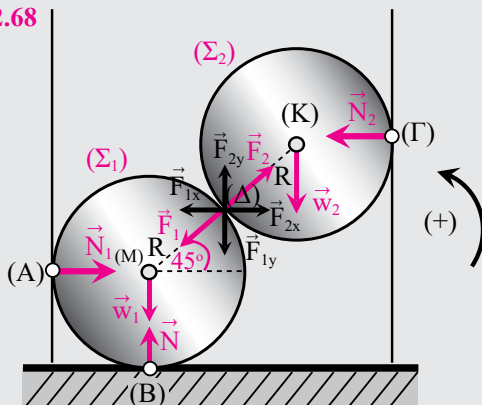
γ) Ισχύει:

$$l = \Delta\theta \cdot R \Rightarrow l = \frac{\Delta x}{r} \cdot R \Rightarrow l = 8 \text{ m}$$

δ) Προκύπτει:

$$N = \frac{\Delta x}{2\pi r} \Rightarrow N = \frac{4}{\pi} \text{ περιστροφές}$$

2.68



$$F_1 = F_2 \text{ (δράση αντίδραση)}$$

α) Για το Σ_1 : $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = w_1 + F_{1y}$ (1)

Για το Σ_2 : $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{2y} = w_2$ (2)

Όμως $F_{1y} = F_{2y}$ άρα: (1), (2) $\Rightarrow$

$$N = w_1 + w_2 \Rightarrow N = 2Mg \Rightarrow N = 20 \text{ N}$$

β) Για το Σ_1 : $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N_1 = F_{1x}$ (3)

Για το Σ_2 : $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N_2 = F_{2x}$ (4)

Όμως $F_{1x} = F_{2x}$ άρα (3), (4) $\Rightarrow N_1 = N_2$

Για το Σ_1 : $\Sigma \tau_{(\Delta)} = 0 \Rightarrow$

$$N_1 R \sin 45^\circ + w_1 R \cos 45^\circ - N R \sin 45^\circ = 0 \Rightarrow$$

$$N_1 + w_1 = N \Rightarrow N_1 = 10 \text{ N}$$

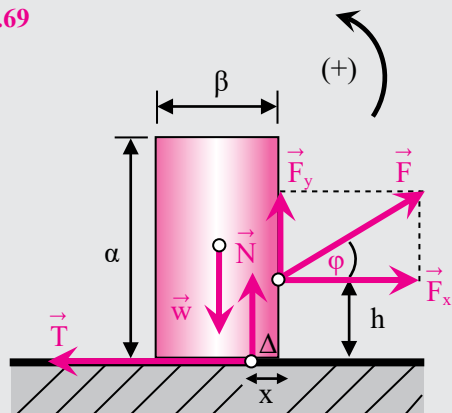
γ) Ισχύει:

$$N_1 = N_2 = 10 \text{ N}$$

δ) (3) $\Rightarrow N_1 = F_{1x} = F_1 \sin 45^\circ \Rightarrow F_1 = 10\sqrt{2} \text{ N}$

$$\text{άρα } F_2 = F_1 = 10\sqrt{2} \text{ N}$$

2.69



$$F_x = F \sin \varphi = 160 \text{ N} \text{ και } F_y = F \cos \varphi = 120 \text{ N}$$

α) $\Sigma \tau_{(\Delta)} = 0 \Rightarrow F_y x - F_x h + w \left(\frac{\beta}{2} - x \right) = 0 \Rightarrow$

$$x = 0,2 \text{ m}$$

β) $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_x = T \Rightarrow T = 160 \text{ N}$

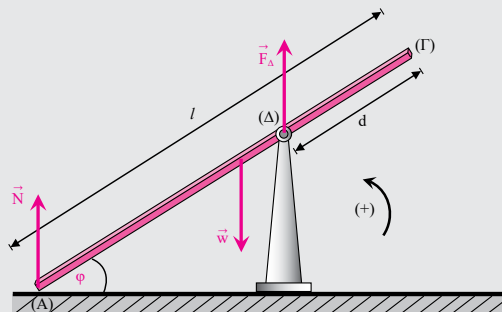
$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N + F_y = w \Rightarrow N = 280 \text{ N}$$

$$T = \mu N \Rightarrow \mu = \frac{T}{N} \Rightarrow \mu = \frac{4}{7}$$

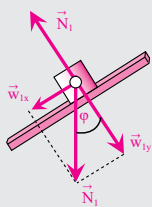
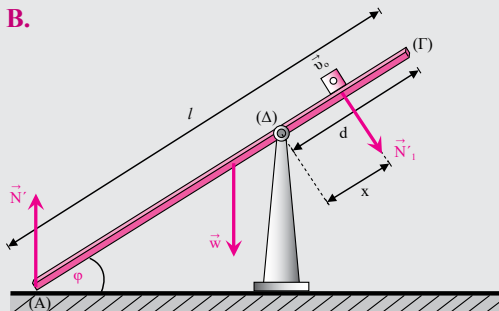
2.70 A. Ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(\Delta)} = 0 \Rightarrow -N \frac{2l}{3} \sin \varphi + Mg \left(\frac{l}{2} - \frac{l}{3} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$N = 2,5 \text{ N}$$



B.



α) Για το σώμα μάζας m:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_1 = w_{1y} = mg \sin \varphi \text{ και}$$

$$N'_1 = N_1 = mg \sin \varphi$$

Όταν χάνεται η επαφή $N' = 0$ άρα, οριακά:

$$\Sigma \tau_{(\Delta)} = 0 \Rightarrow Mg \left(\frac{l}{2} - \frac{l}{3} \right) \sin \varphi - N'_1 x = 0 \Rightarrow$$

$$Mg \frac{l}{6} \sin \varphi = mg \sin \varphi x \Rightarrow x = 0,5m$$

άρα, το σώμα μάζας m έχει διανύσει απόσταση:

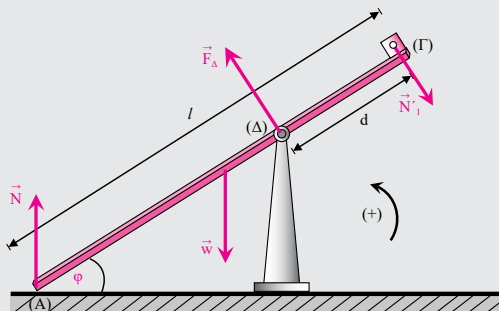
$$S = \frac{2l}{3} + x \Rightarrow S = 2,5m$$

$$\Sigma F_x = ma \Rightarrow -w_{1x} = ma \Rightarrow$$

$$-mg \sin \varphi = ma \Rightarrow a = 8m/s^2$$

$$S = v_0 t - \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow 2,5 = 7t - 4t^2 \Rightarrow t_1 = 0,5s$$

β) Όταν φτάσει το σώμα μάζας m στο Γ πρέπει $N > 0$



$$\Sigma \tau_{(\Delta)} = 0 \Rightarrow$$

$$-N \frac{2l}{3} \sin \varphi + Mg \left(\frac{l}{2} - \frac{l}{3} \right) \sin \varphi - N'_1 \frac{l}{3} = 0 \Rightarrow$$

$$-N \frac{2l}{3} \sin \varphi + Mg \frac{l}{6} \sin \varphi - mg \sin \varphi \frac{l}{3} = 0 \Rightarrow$$

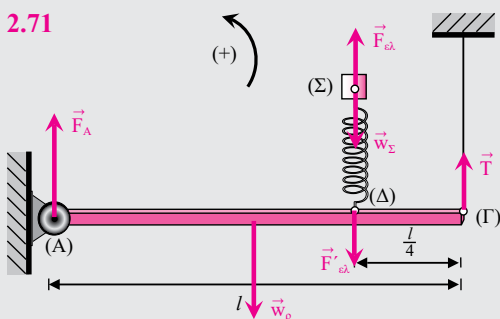
$$N = 2,5 - 5m$$

Θέλουμε:

$$N \geq 0 \Rightarrow 2,5 - 5m \geq 0 \Rightarrow$$

$$m \leq 0,5kg \Rightarrow m_{\max} = 0,5kg$$

2.71



A. Το σώμα Σ ισορροπεί:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{ελ} = w_{\Sigma} = mg \Rightarrow F_{ελ} = 10N$$

Ισχύει: $F'_{ελ} = F_{ελ} = 10N$

Η ράβδος ισορροπεί άρα:

$$\Sigma \tau_{(A)} = 0 \Rightarrow Tl - F'_{ελ} \frac{3l}{4} - w_{\rho} \frac{l}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$T - F'_{ελ} \frac{3}{4} - \frac{Mg}{2} = 0 \Rightarrow T = 12,5N$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_A + T = w_{\rho} + F'_{ελ} \Rightarrow F_A = 7,5N$$

B. i) Τυχαία θέση της ταλάντωσης:

$$\Sigma F = -kx \Rightarrow F_{ελ} - mg = -kx \Rightarrow$$

$$F_{ελ} = 10 - 100x \text{ (SI)}$$

Επειδή η ράβδος ισορροπεί έχουμε:

$$\Sigma \tau_{(A)} = 0 \Rightarrow T = \frac{3}{4} F_{ελ} + \frac{Mg}{2} \Rightarrow T = 12,5 - 75x \text{ (S.I.)}$$

ii) Η τάση παίρνει τη μέγιστη τιμή της όταν $x = -A = -0,1m$ (κάτω ακραία)

Το σώμα φτάνει στην κάτω ακραία θέση τη

χρονική στιγμή $t_1 = \frac{3T}{4}$.

$$\text{Ισχύει: } T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 0,2\pi s$$

$$\text{άρα } t_1 = 0,15\pi s$$

Γ. $T = 12,5 - 75x$

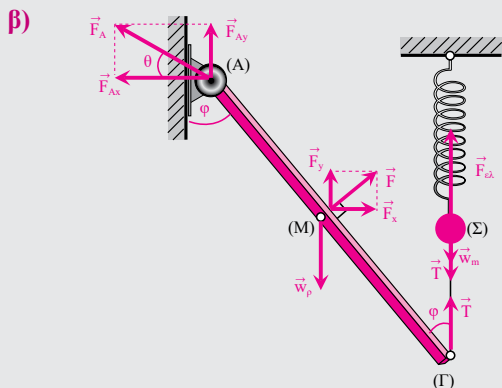
Για $T \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{1}{6}$ άρα $x_{\max} = \frac{1}{6} \text{ m}$

2.72 α) Το μέτρο της δύναμης που ασκεί το ελατήριο στο σώμα Σ είναι:

$$F_{\varepsilon\lambda} = k \cdot \Delta l \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = 40 \text{ N}$$

Σύμφωνα με τον 3ο νόμο του Νεύτωνα το μέτρο της δύναμης που ασκεί το σώμα Σ στο ελατήριο είναι:

$$F'_{\varepsilon\lambda} = F_{\varepsilon\lambda} \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = 40 \text{ N}$$



Από την ισορροπία του σώματος Σ προκύπτει:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = w_m + T \Rightarrow T = k \cdot \Delta l - mg \Rightarrow$$

$$T = 20 \text{ N}$$

γ) Από την ισορροπία της ράβδου προκύπτει:

$$\Sigma \tau_A = 0 \Rightarrow F \frac{l}{2} + Tl \cdot \eta\mu\varphi - w_p \frac{l}{2} \cdot \eta\mu\varphi = 0 \Rightarrow$$

$$M = \frac{F + 2T \cdot \eta\mu\varphi}{g \cdot \eta\mu\varphi} \Rightarrow M = 8 \text{ kg}$$

δ) Η ράβδος ισορροπεί. Επομένως ισχύουν:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_{\alpha,x} = F_x \Rightarrow$$

$$F_{\alpha,x} = F \cdot \sigma\upsilon\upsilon\eta\varphi \Rightarrow F_{\alpha,x} = 10\sqrt{3} \text{ N}$$

και:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{\alpha,y} + T + F_y = w_p \Rightarrow$$

$$F_{\alpha,y} = Mg - F \cdot \eta\mu\varphi - T \Rightarrow F_{\alpha,y} = 50 \text{ N}$$

Τελικά έχουμε:

$$F_{\alpha} = \sqrt{F_{\alpha,x}^2 + F_{\alpha,y}^2} \Rightarrow F_{\alpha} = 20\sqrt{7} \text{ N}$$

και:

$$\varepsilon\phi\theta = \frac{F_{\alpha,y}}{F_{\alpha,x}} \Rightarrow \varepsilon\phi\theta = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

2.73 α) Ισχύει $A = d = 0,2 \text{ m}$. Επίσης έχουμε:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \omega = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ ισχύει $x = +A$ επομένως (με απόδειξη) η αρχική φάση είναι $\varphi_0 = \pi/2 \text{ rad}$.

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης έχει τη μορφή:

$$x = A \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow$$

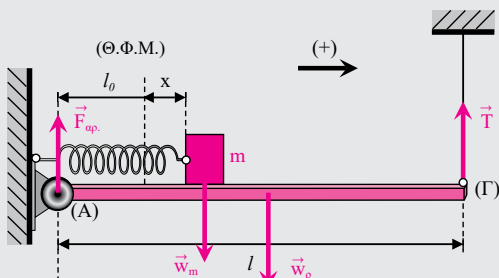
$$x = 0,2\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) (\text{S.I.})$$

β) Από την ισορροπία της ράβδου έχουμε:

$$\Sigma \tau_A = 0 \Rightarrow Tl - w_m(l_0 + x) - w_p \frac{l}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$T = 20 + 20 \cdot (0,2 + x) \Rightarrow$$

$$T = 24 + 20x (\text{S.I.}) \text{ για } -0,2\text{ m} \leq x \leq 0,2\text{ m}$$



γ) Ισχύει: $x = 0,2\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) (\text{S.I.})$

Τελικά προκύπτει:

$$T = 24 + 20x \Rightarrow T = 24 + 20 \cdot 0,2\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$$

$$T = 24 + 4\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) (\text{S.I.})$$

δ) Τη χρονική στιγμή t_1 έχουμε:

$$T' = 24 + 4\eta\mu\left(10 \cdot \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow T' = 24 \text{ N}$$

Από την ισορροπία της ράβδου έχουμε:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{\alpha p} = w_m + w_p - T' \Rightarrow F_{\alpha p} = 36 \text{ N}$$

2.74 α) Από την ισορροπία της ράβδου έχουμε:

$$\Sigma \tau_O = 0 \Rightarrow T \cdot \eta\mu\varphi \cdot l - mg l_0 - Mg \frac{l}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$T = \frac{mg l_0 + Mg \frac{l}{2}}{\eta\mu\varphi \cdot l} \Rightarrow T = 55 \text{ N}$$

β) Ισχύει:

$$U_{ελ, \max} = \frac{1}{2} k \cdot \Delta l_{\max}^2 \Rightarrow U_{ελ, \max} = \frac{1}{2} k \cdot A^2 \Rightarrow$$

$$A = \sqrt{\frac{2U_{ελ, \max}}{k}} \Rightarrow A = 0,5 \text{ m}$$

γ) Αν θεωρήσουμε ως θετική τη φορά προς τα δεξιά το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής του Σ μεγιστοποιείται για δεύτερη φορά μετά την $t_0 = 0$ τη στιγμή που βρίσκεται στην ακραία αρνητική του θέση. Από την ισορροπία της ράβδου έχουμε:

$$\Sigma \tau_0 = 0 \Rightarrow$$

$$T' \cdot \eta \mu \phi \cdot l - mg(l_0 - A) + Mg \frac{l}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$T' = \frac{mg(l_0 - A) + Mg \frac{l}{2}}{\eta \mu \phi \cdot l} \Rightarrow T' = 50 \text{ N}$$

δ) Το μέτρο της τάσης του νήματος θα έχει τη μέγιστη τιμή της κάθε φορά που το σώμα Σ θα βρίσκεται στην ακραία θετική του θέση. Από την ισορροπία της ράβδου έχουμε:

$$\Sigma \tau_0 = 0 \Rightarrow$$

$$T_{\max} \cdot \eta \mu \phi \cdot l - mg(l_0 + A) + Mg \frac{l}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$T_{\max} = \frac{mg(l_0 + A) + Mg \frac{l}{2}}{\eta \mu \phi \cdot l} \Rightarrow T_{\max} = 60 \text{ N}$$

2.75 α) Από την ισορροπία του Σ_1 προκύπτει:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T_1 = m_1 g \Rightarrow T_1 = 20 \text{ N}$$

Για τη διπλή τροχαλία ισχύει:

$$\Sigma \tau_0 = 0 \Rightarrow T_1 R_2 = T_2 R_1 \Rightarrow T_2 = \frac{T_1 R_2}{R_1} \Rightarrow T_2 = 40 \text{ N}$$

Από την ισορροπία του Σ_2 προκύπτει:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T_2 = F_{ελ} \Rightarrow T_2 = k \cdot \Delta l \Rightarrow$$

$$\Delta l = \frac{T_2}{k} \Rightarrow \Delta l = 0,2 \text{ m}$$

β) Το νήμα δεν ολισθαίνει στο αυλάκι του δίσκου (2) επομένως ισχύει:

$$\alpha_{\epsilon} = \alpha = \alpha_{\gamma \omega \nu} R_2 \Rightarrow \alpha_{\epsilon} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

γ) Υπολογίζουμε τη χρονική στιγμή t_1 :

$$t_1 = \frac{3T}{4} \Rightarrow t_1 = \frac{3 \cdot 2\pi \sqrt{\frac{m_2 + m_3}{k}}}{4} \Rightarrow t_1 = 0,3\pi \text{ s}$$

Ισχύει:

$$l_{\nu \eta \mu} = R_2 \cdot \Delta \theta \Rightarrow l_{\nu \eta \mu} = R_2 \cdot \frac{1}{2} \alpha_{\gamma \omega \nu} t_1^2 \Rightarrow$$

$$l_{\nu \eta \mu} = \frac{1}{2} \alpha_{\epsilon} t_1^2 \Rightarrow l_{\nu \eta \mu} = 1,8 \text{ m}$$

δ) Το πλάτος της α.α.τ. είναι:

$$A = \Delta l \Rightarrow A = 0,2 \text{ m}$$

Βρίσκουμε τη γωνιακή συχνότητα:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_2 + m_3}} \Rightarrow \omega = 5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Ισχύει:

$$\Sigma F = -D_3 x \Rightarrow \Sigma F = -m_3 \omega^2 x \Rightarrow$$

$$T_{\sigma \tau} = -50x \text{ (S.I.)} (3)$$

Θέτοντας στη σχέση (3) όπου $x = -0,2 \text{ m}$ έχουμε:

$$T_{\sigma \tau} = -[50(-0,2)] \text{ N} \Rightarrow T_{\sigma \tau} = 10 \text{ N}$$

Προκύπτει:

$$T_{\sigma \tau} \leq T_{\sigma \tau, \max} \Rightarrow T_{\sigma \tau} \leq \mu_{\sigma} N_3 \Rightarrow \mu_{\sigma} \geq \frac{T_{\sigma \tau}}{m_3 g} \Rightarrow$$

$$\mu_{\sigma, \min} = \frac{T_{\sigma \tau}}{m_3 g} \Rightarrow \mu_{\sigma, \min} = \frac{T_{\sigma \tau}}{m_3 g} \Rightarrow \mu_{\sigma, \min} = 0,5$$

2.76 α) Από την ισορροπία του σώματος Σ_1 προκύπτει:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F = T_1 \Rightarrow T_1 = 10 \text{ N}$$

Από την ισορροπία της τροχαλίας προκύπτει:

$$\Sigma \tau_0 = 0 \Rightarrow T_1 R_2 = T_2 R_1 \Rightarrow T_2 = \frac{T_1 R_2}{R_1} \Rightarrow$$

$$T_2 = 20 \text{ N}$$

Από την ισορροπία του σώματος Σ_2 προκύπτει:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T_2 = m_2 g \Rightarrow m_2 = \frac{T_2}{g} \Rightarrow m_2 = 2 \text{ kg}$$

β) Ισχύει:

$$\alpha = \alpha_{\gamma \omega \nu} R_1 \Rightarrow \alpha = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Για τον ρυθμό μεταβολής της ορμής του Σ_2 , ισχύει:

$$\frac{dp}{dt} = \Sigma F = m_2 \alpha \Rightarrow \frac{dp}{dt} = 4 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

γ) Υπολογίζουμε το μέτρο της ταχύτητας του Σ_2 λίγο πριν την κρούση:

$$v_2 = \alpha \cdot \Delta t \text{ ή } v_2 = \alpha \sqrt{\frac{2h}{\alpha}} \Rightarrow v_2 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Από την Α.Δ.Ο. προκύπτει:

$$m_2 v_2 = (m_2 + m_3) v_k \text{ ή } v_k = \frac{m_2 v_2}{m_2 + m_3} \Rightarrow v_k = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Βρίσκουμε την αρχική απομάκρυνση του συσσωματώματος:

$$x = \frac{(m_2 + m_3)g}{k} - \frac{m_3 g}{k} \Rightarrow x = \frac{m_2 g}{k} \Rightarrow x = 0,2 \text{ m}$$

Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας στην ταλάντωση. Προκύπτει:

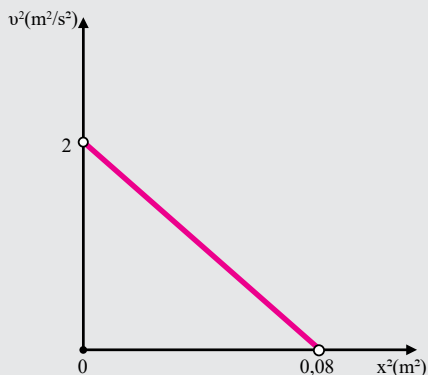
$$\frac{1}{2} (m_2 + m_3) v_k^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2 \Rightarrow$$

$$A = \sqrt{\frac{(m_2 + m_3) v_k^2 + k x^2}{k}} \Rightarrow A = 0,2\sqrt{2} \text{ m}$$

δ) Ισχύει:

$$\frac{1}{2} (m_2 + m_3) v^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2 \Rightarrow v^2 = 2 - 25 x^2 \text{ (S.I.)}$$

Το ζητούμενο διάγραμμα έχει τη μορφή:



2.77 α) Ισχύει:

$$\Delta t = \frac{T}{2} \Rightarrow T = 2 \cdot \Delta t \Rightarrow T = 0,1 \pi \text{ s}$$

Επίσης ισχύει:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow m = \frac{k T^2}{4\pi^2} \Rightarrow m = 0,5 \text{ kg}$$

β) Στη θέση ισορροπίας του σώματος έχουμε:

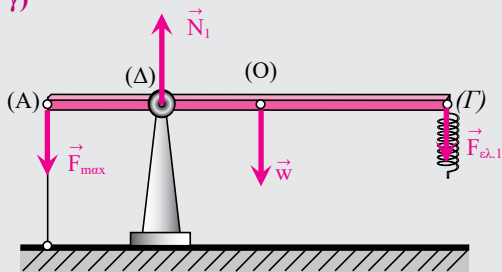
$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow k \cdot \Delta l = mg \Rightarrow \Delta l = \frac{mg}{k} \Rightarrow$$

$$\Delta l = 0,025 \text{ m}$$

Επειδή ισχύει $A = d = 0,1 \text{ m}$ και επίσης $A > \Delta l$ προκύπτει ότι:

$$U_{\text{ελ},\min} = 0$$

γ)



Τη στιγμή που το σώμα θα βρεθεί στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσης του η δύναμη του ελατηρίου θα έχει μέτρο:

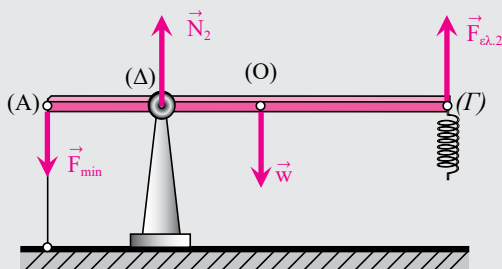
$$F_{\text{ελ},1} = k(A + \Delta l) \Rightarrow F_{\text{ελ},1} = 25 \text{ N}$$

Σε αυτή την περίπτωση η τάση του νήματος θα έχει τη μέγιστη τιμή της.

Η ράβδος ισορροπεί επομένως ισχύει:

$$\Sigma \tau_{\Delta} = 0 \text{ ή } T_{\max} \cdot A\Delta - Mg \cdot \Delta O - F_{\text{ελ},1} \cdot \Delta \Gamma = 0 \Rightarrow$$

$$T_{\max} = \frac{Mg \cdot \Delta O + F_{\text{ελ},1} \cdot \Delta \Gamma}{A\Delta} \Rightarrow T_{\max} = 175 \text{ N}$$



Τη στιγμή που το σώμα θα βρεθεί στην πάνω ακραία θέση της ταλάντωσής του η δύναμη του ελατηρίου θα έχει μέτρο:

$$F_{ελ,2} = k(A - \Delta l) \Rightarrow F_{ελ,2} = 15 \text{ N}$$

Σε αυτή την περίπτωση η τάση του νήματος θα έχει την ελάχιστη τιμή της.

Η ράβδος ισορροπεί επομένως ισχύει:

$$\Sigma \tau_{\Delta} = 0 \Rightarrow T_{\min} \cdot A\Delta - Mg \cdot \Delta O + F_{ελ,2} \cdot \Delta \Gamma = 0 \Rightarrow$$

$$T_{\min} = \frac{Mg \cdot \Delta O - F_{ελ,2} \cdot \Delta \Gamma}{A\Delta} \Rightarrow T_{\min} = 55 \text{ N}$$

δ) Αναζητούμε την κατάλληλη τιμή της δύναμης του ελατηρίου έτσι ώστε οριακά το μέτρο της τάσης του νήματος να γίνει ίσο με μηδέν. Αυτό συμβαίνει μόνο όταν το ελατήριο είναι συσπειρωμένο και επομένως η δύναμη του ελατηρίου έχει φορά προς τα πάνω. Από την ισορροπία της ράβδου προκύπτει:

$$\Sigma \tau_{\Delta} = 0 \quad -Mg \cdot \Delta O + F'_{ελ} \cdot \Delta \Gamma = 0 \Rightarrow$$

$$F'_{ελ} = \frac{Mg \cdot \Delta O}{\Delta \Gamma} \Rightarrow F'_{ελ} = \frac{100}{3} \text{ N}$$

Ισχύει:

$$F'_{ελ} = k(A_{\max} - \Delta l) \Rightarrow A_{\max} = \frac{F'_{ελ}}{k} + \Delta l \Rightarrow$$

$$A_{\max} = \frac{23}{120} \text{ m}$$

2.78 α) Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας είναι αρχικά:

$$\omega_1 = 2\pi f_1 \Rightarrow \omega_1 = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Το μέτρο της αρχικής στροφορμής του συστήματος είναι:

$$L_{\text{συσ,αρχ}} = L_1 + L_2 \Rightarrow L_{\text{συσ,αρχ}} = m v_1 \frac{l}{4} + m v_1 \frac{l}{4} \Rightarrow$$

$$L_{\text{συσ,αρχ}} = m \omega_1 \frac{l}{4} \frac{l}{4} + m \omega_1 \frac{l}{4} \frac{l}{4} \Rightarrow$$

$$L_{\text{συσ,αρχ}} = 2m \omega_1 \frac{l^2}{16} \Rightarrow$$

$$L_{\text{συσ,αρχ}} = 0,02 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

β) Από την εφαρμογή της Αρχής Διατήρησης της Στροφορμής, έχουμε:

$$L_{\text{συσ,αρχ}} = L_{\text{συσ,τελ}} \Rightarrow 2m \omega_1 \frac{l^2}{16} = 2m \omega_2 \frac{l^2}{16} \Rightarrow$$

$$\omega_1 = 4\omega_2 \Rightarrow \omega_2 = \frac{\omega_1}{4} \Rightarrow \omega_2 = 2,5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Για τη μεταβολή του μέτρου της γωνιακής ταχύτητας έχουμε:

$$\Delta \omega = \omega_2 - \omega_1 \Rightarrow \Delta \omega = -7,5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

γ) Η νέα συχνότητα περιστροφής είναι:

$$f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} \Rightarrow f_2 = \frac{1}{2\pi} \frac{\omega_2}{4} \Rightarrow f_2 = \frac{f_1}{4}$$

Το ποσοστό επί τοις εκατό της μεταβολής της συχνότητας είναι:

$$\Pi(\%) = \frac{f_2 - f_1}{f_1} \cdot 100\% \Rightarrow$$

$$\Pi(\%) = \frac{\frac{f_1}{4} - f_1}{f_1} \cdot 100\% \Rightarrow \Pi(\%) = -75\%$$

δ) Η αρχική κινητική ενέργεια του συστήματος είναι:

$$K_{\text{αρχ}} = 2 \cdot \frac{1}{2} m v_1^2 \Rightarrow K_{\text{αρχ}} = 2 \cdot \frac{1}{2} m \left(\omega_1 \frac{l}{4} \right)^2 \Rightarrow$$

$$K_{\text{αρχ}} = 0,1 \text{ J}$$

Η τελική κινητική ενέργεια του συστήματος είναι:

$$K_{\text{τελ}} = 2 \cdot \frac{1}{2} m v_2^2 \Rightarrow K_{\text{τελ}} = 2 \cdot \frac{1}{2} m \left(\omega_2 \frac{l}{2} \right)^2 \Rightarrow$$

$$K_{\text{τελ}} = 0,025 \text{ J}$$

Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συστήματος είναι:

$$\Delta K = K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} \Rightarrow \Delta K = -0,075 \text{ J}$$

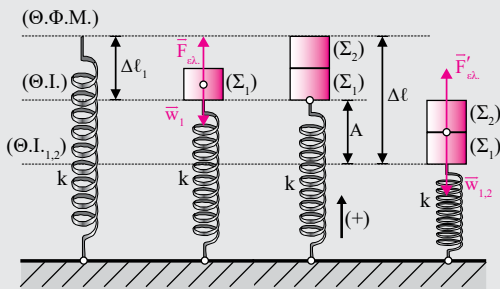
Κεφάλαιο 3: Ταλαντώσεις

ΘΕΜΑ Α

- 3.1 β) 3.2 γ) 3.3 δ) 3.4 α)
 3.5 γ) 3.6 β) 3.7 δ) 3.8 β)
 3.9 γ) 3.10 β) 3.11 α) 3.12 β)
 3.13 β) 3.14 β) 3.15 α) 3.16 β)
 3.17 α) 3.18 β) 3.19 γ) 3.20 β)
 3.21 β) 3.22 β) 3.23 γ) 3.24 γ)
 3.25 β) 3.26 α) 3.27 β) 3.28 β)
 3.29 δ) 3.30 γ) 3.31 α) 3.32 β)
 3.33 α) 3.34 α) 3.35 α) 3.36 δ)
 3.37 γ) 3.38 β) 3.39 β) 3.40 γ)

ΘΕΜΑ Β

3.41 Σωστή απάντηση το β).



Θεωρώντας ως θετική φορά, την ομόρροπη του βάρους του σώματος, τότε για τη θέση ισορροπίας του σώματος έχουμε:

$$(\Theta.Ι.) : \Sigma \vec{F}_y = 0 \Rightarrow \vec{F}_{ελ.} + \vec{w}_1 = 0 \Rightarrow$$

$$F_{ελ.} - w_1 = 0 \Rightarrow F_{ελ.} = w_1 \Rightarrow$$

$$k\Delta l_1 = m_1 g \Rightarrow \Delta l_1 = \frac{mg}{k} (1)$$

Στη θέση ισορροπίας του συστήματος σωμάτων έχουμε:

$$\Sigma \vec{F}_y = 0 \Rightarrow \vec{F}'_{ελ.} + \vec{w}_{1,2} = 0 \Rightarrow \vec{F}'_{ελ.} - w_{1,2} = 0 \Rightarrow$$

$$F_{ελ.} = w_{1,2} \Rightarrow k\Delta l = (m_1 + m_2)g \Rightarrow$$

$$\Delta l = \frac{2mg}{k} (2)$$

Το πλάτος της ταλάντωσης του συστήματος των δύο σωμάτων είναι:

$$A = \Delta l - \Delta l_1 \Rightarrow A = \frac{mg}{k} (3)$$

Η μέγιστη επιτάχυνση του συστήματος ισούται με:

$$\alpha_{\max} = \omega^2 A \Rightarrow \alpha_{\max} = \frac{k}{2m} A \Rightarrow$$

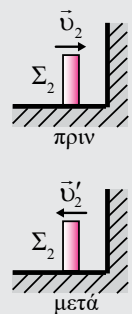
$$\alpha_{\max} = \frac{k}{2m} \frac{mg}{k} \Rightarrow \alpha_{\max} = \frac{g}{2}$$

3.42 Σωστή απάντηση το α).

Το σώμα Σ_2 μετά την εκτόξευσή του, εκτελεί Ευθύγραμμη Ομαλή Κίνηση με ταχύτητα μέτρου v_2 και μέχρι να συγκρουστεί με τον κατακόρυφο τοίχο θα έχει διανύσει απόσταση d . Επειδή η κρούση με τον τοίχο είναι κεντρική και ελαστική, η κινητική ενέργεια του σώματος Σ_2 δε μεταβάλλεται, επομένως και το μέτρο της ταχύτητας που αποκτά μετά την κρούση δεν μεταβάλλεται, δηλαδή $v'_2 = v_2$. Έτσι για όλο το χρονικό διάστημα Δt_2 από τη στιγμή της εκτόξευσης και μέχρι να επιστρέψει στο σημείο (Γ), το σώμα Σ_2 έχει το ίδιο μέτρο ταχύτητας v_2 . Στο χρονικό αυτό διάστημα το σώμα Σ_2 διανύει απόσταση ίση με $2d$. Ισχύει:

$$2d = v_2 \cdot \Delta t_2 \Rightarrow \Delta t_2 = \frac{2d}{v_2} (1)$$

Το σώμα Σ_1 μετά την εκτόξευσή του εκτελεί Απλή Αρμονική Ταλάντωση με πλάτος A και περίοδο T . Το χρονικό διάστημα Δt_1 από τη στιγμή της εκτόξευσής του και μέχρι να επιστρέψει στο σημείο (Γ) (Θέση Ισορροπίας) για πρώτη φορά είναι:



$$\Delta t_1 = \frac{T}{2} (2)$$

Όμως για τα χρονικά διαστήματα Δt_1 και Δt_2 ισχύει:

$$\Delta t_1 = \Delta t_2 \Rightarrow \frac{T}{2} = \frac{2d}{v_2} \xrightarrow{T=\frac{2\pi}{\omega}} \Rightarrow \frac{2\pi}{2\omega} = \frac{2d}{v_2} \Rightarrow$$

$$\frac{\pi}{\omega} = \frac{2d}{v_2} \xrightarrow{A=\frac{d}{\pi} \Rightarrow d=\pi A} \frac{\pi}{\omega} = \frac{2\pi A}{v_2} \Rightarrow 2\omega A = v_2 (3)$$

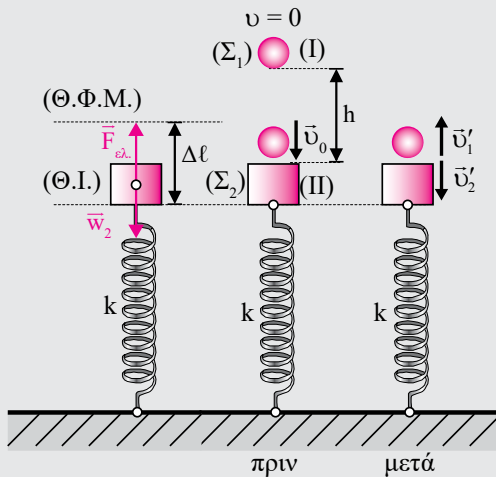
Όμως επειδή το Σ_1 εκτοξεύεται τη χρονική στιγμή $t = 0$ από τη Θέση Ισορροπίας του, το μέτρο της αρχικής του ταχύτητας εκτόξευσης v_1 θα είναι ίσο με τη μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσης που θα εκτελέσει. Δηλαδή ισχύει:

$$v_1 = v_{\max} = \omega A (4)$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) τελικά προκύπτει:

$$2v_1 = v_2 \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{1}{2}$$

3.43 Σωστή απάντηση το β).



Στη θέση ισορροπίας του σώματος (Σ_2) ισχύει:

$$(\Theta.I.): \Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{ελ.} + \vec{w}_2 = 0 \Rightarrow F_{ελ.} = w_2 \Rightarrow$$

$$k\Delta l = 3mg \Rightarrow \Delta l = \frac{3mg}{k} (1)$$

Για την κίνηση του (Σ_1) καθώς πέφτει ελεύθερα έχουμε:

$$\Theta.M.K.E._{(I) \rightarrow (II)}: \Delta K = \Sigma W_F \Rightarrow$$

$$K_{τελ.} - K_{αρχ.} = W_{w_1} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh \Rightarrow v_0 = \sqrt{2gh} (2)$$

Η ταχύτητα του (Σ_2) μετά την κεντρική ελαστική κρούση είναι:

$$v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_0 \Rightarrow v'_2 = \frac{2m}{m + 3m} \cdot v_0 \Rightarrow$$

$$v'_2 = \frac{v_0}{2} \xrightarrow{(2)} v'_2 = \frac{\sqrt{2gh}}{2}$$

Όμως επειδή η κρούση γίνεται στη Θέση Ισορροπίας του σώματος (Σ_2), η ταχύτητα που αυτό αποκτά μετά την κρούση θα αποτελεί τη μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσής του. Άρα:

$$v'_2 = v_{\max} \Rightarrow \frac{\sqrt{2gh}}{2} = \omega A \Rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{2gh}}{2} = \sqrt{\frac{k}{3m}} \cdot A \Rightarrow \frac{2gh}{4} = \frac{k}{3m} \cdot A^2 \Rightarrow$$

$$\frac{3gh}{2} = \frac{k}{m} \cdot A^2 (3)$$

Μετά την κρούση, το σώμα (Σ_2) εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση κατά τη διάρκεια της οποίας η μέγιστη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου είναι τετραπλάσια της ολικής ενέργειας της ταλάντωσης. Τη μέγιστη δυναμική ενέργεια το ελατήριο την έχει στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσής του. Ισχύει:

$$U_{ελ.(max)} = 4E_{ολ.} \Rightarrow \frac{1}{2}k(A + \Delta l)^2 \Rightarrow 4 \cdot \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow$$

$$(A + \Delta l)^2 = 4A^2 \Rightarrow A = \Delta l (4)$$

$$(3) \Rightarrow \frac{3gh}{2} = \frac{k}{m} \cdot \Delta l^2 \xrightarrow{(1)} \frac{3gh}{2} = \frac{k}{m} \cdot \frac{9m^2 g^2}{k^2} \Rightarrow$$

$$\frac{h}{2} = \frac{3mg}{k} \xrightarrow{(1)} \frac{h}{2} = \Delta l \Rightarrow h = 2\Delta l \Rightarrow$$

$$h = 2A$$

3.44 Σωστή απάντηση το β).

Από το διάγραμμα παρατηρούμε ότι το πλάτος της ταλάντωσης των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 υποδιπλασιάζεται τις χρονικές στιγμές t_1 και t_2 αντίστοιχα.

Για τον χρόνο υποδιπλασιασμού του πλάτους t' , σε μια φθίνουσα ταλάντωση της οποίας το πλάτος μειώνεται εκθετικά με τον χρόνο, σύμφωνα με τη σχέση $A = A_0 e^{-\Lambda t}$, έχουμε:

$$A = A_0 e^{-\Lambda t} \xrightarrow{A=\frac{A_0}{2}} \frac{A_0}{2} = A_0 e^{-\Lambda t'} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\Lambda t'} \Rightarrow$$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(e^{-\Lambda t'}) \Rightarrow -\ln 2 = -\Lambda t' \Rightarrow$$

$$t' = \frac{\ln 2}{\Lambda}$$

Έτσι για τις χρονικές στιγμές t_1 και t_2 αντίστοιχα ισχύει:

$$t_1 = \frac{\ln 2}{\Lambda_1} (1) \text{ και } t_2 = \frac{\ln 2}{\Lambda_2} (2)$$

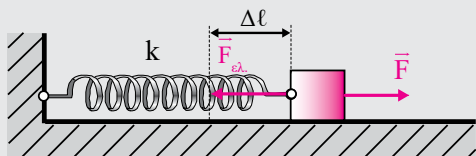
$$\text{Όμως } t_2 = 2t_1 \Rightarrow \frac{(1),(2) \ln 2}{\Lambda_2} = 2 \cdot \frac{\ln 2}{\Lambda_1} \Rightarrow \Lambda_1 = 2\Lambda_2$$

3.45 Σωστή απάντηση το γ).

Πείραμα 1: Στην περίπτωση αυτή η θέση ισορροπίας της ταλάντωσης και η θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου δεν ταυτίζονται. Για τον υπολογισμό της θέσης ισορροπίας έχουμε:

$$\Theta.I.: \Sigma F = 0 \Rightarrow k \cdot \Delta l = F \Rightarrow \Delta l = \frac{F}{k} (1)$$

Θ.Φ.Μ. Θ.Ι.



Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ που το σώμα βρίσκεται στη θέση όπου το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος, η ταχύτητα του σώματος είναι μηδέν ($v = 0$), τότε η θέση αυτή είναι μία από τις 2 ακραίες θέσεις της ταλάντωσής του.

$$\text{Οπότε } A_1 = \Delta l \Rightarrow A_1 = \frac{F}{k} (2)$$

Πείραμα 2: Στην περίπτωση αυτή η ενέργεια που προσφέρεται στο σύστημα μέσω του έργου της δύναμης $\vec{F}$ αποτελεί την ολική ενέργεια της ταλάντωσης που θα εκτελέσει στη συνέχεια το σώμα μετά την κατάργηση της δύναμης.

Το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$ θα γίνει ίσο με το μέτρο της δύναμης του ελατηρίου όταν το ελατήριο είναι επιμηκυμένο κατά $\Delta l = \frac{F}{k}$ όπως αποδείχτηκε στην περίπτωση του πειράματος 1. Έχουμε:

$$E_{\text{ολ.}(2)} = W_F \Rightarrow \frac{1}{2} k A_2^2 = F \cdot \Delta l \xrightarrow{\Delta l = \frac{F}{k}} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} k A_2^2 = F \cdot \frac{F}{k} \Rightarrow A_2^2 = 2 \cdot \frac{F^2}{k^2} \Rightarrow A_2 = \sqrt{2} \cdot \frac{F}{k} (2)$$

$$A_2 = \sqrt{2} A_1$$

3.46 Σωστή απάντηση το β).

Τη χρονική στιγμή t_1 το πλάτος της ταλάντωσης του αρμονικού ταλαντωτή έχει υποδιπλασιαστεί. Οπότε έχουμε:

$$A = A_0 e^{-\left(\frac{\ln 2}{2}\right)t} \xrightarrow{t=t_1, A=\frac{A_0}{2}} \frac{A_0}{2} = A_0 e^{-\left(\frac{\ln 2}{2}\right)t_1} \Rightarrow$$

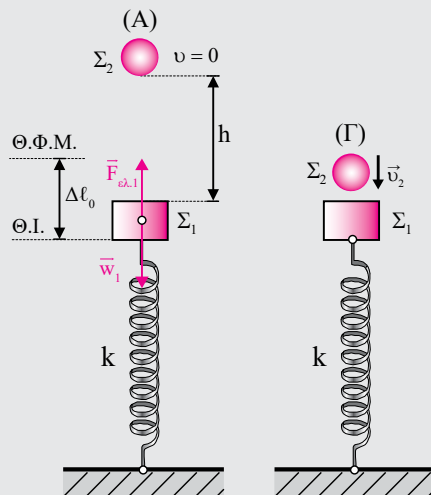
$$e^{-\left(\frac{\ln 2}{2}\right)t_1} = \frac{1}{2} \Rightarrow -\left(\frac{\ln 2}{2}\right) \cdot t_1 = -\ln 2 \Rightarrow t_1 = 2s$$

Για τον αριθμό N των ταλαντώσεων που εκτελεί ο αρμονικός ταλαντωτής μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 έχουμε:

$$N = \frac{t_1}{T} = 4 \text{ ταλαντώσεις}$$

3.47 Σωστή απάντηση το γ).

Για τα δύο πειράματα ισχύει:



Μελετάμε την κίνηση του σώματος Σ_2 κατά την πτώση του από ύψος h . Εφαρμόζουμε την Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας (Α.Δ.Μ.Ε.) για τις θέσεις Α, Γ θεωρώντας ως επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο όπου βρίσκεται το σημείο Γ:

$$E_{\text{MHX.A}} = E_{\text{MHX.Γ}} \Rightarrow K_A + U_A = K_\Gamma + U_\Gamma \Rightarrow$$

$$0 + m_2gh = \frac{1}{2}m_2v_2^2 + 0 \Rightarrow v_2 = \sqrt{2gh} \Rightarrow$$

$$v_2 = 2\sqrt{g\Delta\ell_0} \quad (1)$$

Στη θέση ισορροπίας του σώματος Σ_1 ισχύει:

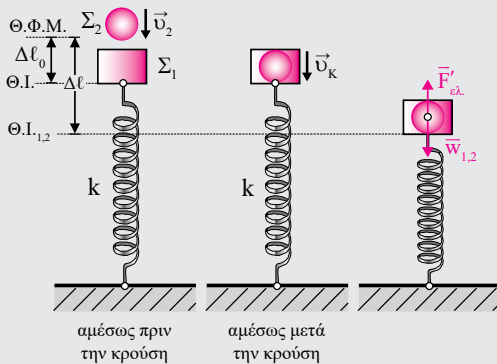
$$\Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{\text{ελ1}} + \vec{w} = 0 \Rightarrow F_{\text{ελ1}} - w_1 = 0 \Rightarrow$$

$$F_{\text{ελ1}} = m_1g \Rightarrow k\Delta\ell_0 = m_1g \Rightarrow \Delta\ell_0 = \frac{m_1g}{k} \quad (2)$$

Η σχέση (1) λόγω της (2) γίνεται:

$$v_2 = 2g\sqrt{\frac{m_1}{k}} \quad (3)$$

Πείραμα 1



Το σύστημα των δύο σωμάτων Σ_1 και Σ_2 είναι μονωμένο οπότε ισχύει η Αρχή διατήρησης της Ορμής (Α.Δ.Ο):

$$\vec{p}_{\text{πριν}} = \vec{p}_{\text{μετά}} \Rightarrow m_2v_2 = (m_1 + m_2)v_k \Rightarrow$$

$$v_k = \frac{v_2}{2} \Rightarrow v_k = g\sqrt{\frac{m_1}{k}} \quad (4)$$

Για τη θέση ισορροπίας του συσσωματώματος (Ν.Θ.Ι) ισχύει:

$$\Sigma \vec{F}_y = 0 \Rightarrow \vec{F}'_{\text{ελ}} + \vec{w} = 0 \Rightarrow F'_{\text{ελ}} - w_{1,2} = 0 \Rightarrow$$

$$F'_{\text{ελ}} = (m_1 + m_2)g \Rightarrow k\Delta\ell = 2m_1g \Rightarrow \Delta\ell = \frac{2m_1g}{k} \quad (5)$$

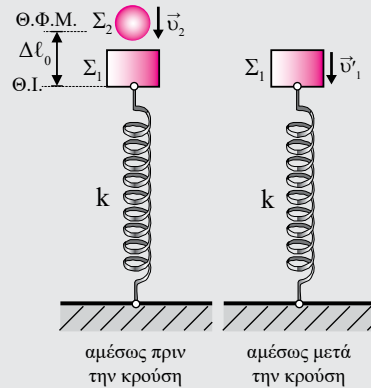
Εφαρμόζουμε Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας-ας Ταλάντωσης για τη θέση της κρούσης.

$$(Α.Δ.Ε.Τ.) \text{ για } y = \Delta l - \Delta l_0 \Rightarrow y = \frac{m_1g}{k} \quad (6)$$

$$E_1 = K + U \Rightarrow E = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_k^2 + \frac{1}{2}ky^2 \Rightarrow$$

$$E_1 = \frac{3m_1^2g^2}{2k} \quad (7)$$

Πείραμα 2



Η κρούση των δύο σωμάτων είναι κεντρική και ελαστική. Τα σώματα έχουν ίσες μάζες άρα ανταλλάσσουν ταχύτητες. Οπότε:

$$v'_1 = v_2 = 2g\sqrt{\frac{m_1}{k}} \quad (8)$$

Η ταχύτητα αυτή είναι η μέγιστη κατά μέτρο ταχύτητα ταλάντωσης του σώματος Σ_1 εφόσον η κρούση γίνεται στη θέση ισορροπίας του. Άρα $v'_1 = v_{\text{max}}$ (9)

Η ενέργεια ταλάντωσης του σώματος Σ_1 μετά την κρούση είναι:

$$E_2 = \frac{1}{2}m_1 \cdot v_{\text{max}}^2 \Rightarrow E_2 = \frac{2m_1^2g^2}{k} \quad (10)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις (7), (10) προκύπτει:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{3}{4}$$

3.48 Σωστή απάντηση το β).

Έστω A_1 και A_2 το πλάτος της φθίνουσας ταλάντωσης μετά από μία και μετά από δύο περιόδους αντίστοιχα. Από το διάγραμμα προκύπτει ότι $A_1 = \frac{A_0}{2}$.

$$\frac{A_0}{A_1} = \frac{A_1}{A_2} \Rightarrow \frac{A_0}{\frac{A_0}{2}} = \frac{2}{A_2} \Rightarrow A_2 = \frac{A_0}{4}$$

$$\frac{A_0}{A_1} = \frac{A_1}{A_2} \Rightarrow \frac{A_0}{\frac{A_0}{2}} = \frac{\frac{A_0}{2}}{A_2} \Rightarrow A_2 = \frac{A_0}{4}$$

$$W_{F_{avt.}} = E_2 - E_1 = \frac{1}{2}DA_2^2 - \frac{1}{2}DA_1^2 =$$

$$\begin{aligned} W_{F_{\text{avt.}}} &= E_2 - E_1 = \frac{1}{2} D A_2^2 - \frac{1}{2} D A_1^2 = \\ &= \frac{1}{2} D \cdot \left(\frac{A_0}{4} \right)^2 - \frac{1}{2} D \cdot \left(\frac{A_0}{2} \right)^2 = \frac{E_0}{16} - \frac{E_0}{4} \Rightarrow \\ W_{F_{\text{avt.}}} &= -\frac{3E_0}{16} \end{aligned}$$

$$\Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{e\lambda} + \vec{T} + \vec{w} = 0 \Rightarrow$$

$$F_{e\lambda} - T - w = 0 \Rightarrow F_{e\lambda} = T + mg \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}\Sigma \vec{F} &= 0 \Rightarrow \vec{F}_{e\lambda} + \vec{T} + \vec{w} = 0 \Rightarrow \\ F_{e\lambda} - T - w &= 0 \Rightarrow F_{e\lambda} = T + mg \Rightarrow \\ k\Delta\ell &= 2mg \Rightarrow \Delta\ell = \frac{2mg}{k} \quad (1)\end{aligned}$$

$$\Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F}'_{\varepsilon\lambda} + \vec{w} = 0 \Rightarrow F'_{\varepsilon\lambda} - w = 0 \Rightarrow$$

$$\Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F}'_{\varepsilon\lambda} + \vec{w} = 0 \Rightarrow F'_{\varepsilon\lambda} - w = 0 \Rightarrow$$

Η θέση που κόβεται το νήμα αποτελεί ακραία θέση για την ταλάντωση του σώματος άρα το πλάτος της ταλάντωσης θα είναι:

$$A = \Delta \ell - \Delta \ell_0^{(1),(2)} \Rightarrow A = \frac{2mg}{k} - \frac{mg}{k} \Rightarrow A = \frac{mg}{k} \quad (3)$$

$$U_{\varepsilon\lambda\max} = \frac{1}{2} k (\Delta\ell_0 + A)^2 \Rightarrow^{(2),(3)}$$

$$U_{\varepsilon\lambda \max} = \frac{1}{2} k \left(\frac{2mg}{k} \right)^2 \Rightarrow U_{\varepsilon\lambda \max} = 2 \frac{m^2 g^2}{k}$$

$$\Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{\varepsilon_{\lambda}(\mathbf{A})} + \vec{w}_A = 0 \Rightarrow$$

$$F_{\varepsilon\lambda(A)} - w_A = 0 \Rightarrow k_A \Delta l = m_A g(1)$$

$$\Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{\varepsilon \lambda. (B)} + \vec{W}_B = 0 \Rightarrow$$

$$F_{\varepsilon\lambda.(B)} - w_B = 0 \Rightarrow k_B \Delta l = m_B g (2)$$

Διαιρούμε κατά μέλη τις (1) και (2) οπότε έχουμε:

$$\frac{k_A}{k_B} = \frac{m_A}{m_B} \xRightarrow{m_A=2m_B} k_A = 2k_B \Rightarrow m_A \omega_A^2 = 2m_B \omega_B^2$$

$$\xRightarrow{m_A=2m_B} 2m_B \omega_A^2 = 2m_B \omega_B^2 \Rightarrow \omega_A = \omega_B \quad (3)$$

Για τις μέγιστες επιταχύνσεις που αποκτούν τα δύο σώματα κατά τη διάρκεια των ταλαντώσεών τους έχουμε:

$$\alpha_{A(\max)} = \omega_A^2 d \quad (3)$$

$$\alpha_{B(\max)} = \omega_B^2 d \Rightarrow \alpha_{A(\max)} = \alpha_{B(\max)}$$

3.51 Σωστή απάντηση το β).

Ο ρυθμός με τον οποίο μετατρέπεται η μηχανική ενέργεια σε θερμότητα εκφράζεται μέσω των δυνάμεων αντίστασης, δηλαδή ισχύει:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\Delta W_{F_{\text{αντ.}}}}{\Delta t} = \frac{F_{\text{αντ.}} \cdot \Delta x}{\Delta t} \xRightarrow{F_{\text{αντ.}} = -b \cdot v} = \frac{-b \cdot v \cdot \Delta x}{\Delta t}$$

$$= -b \cdot v \cdot v \Rightarrow \frac{\Delta W_{F_{\text{αντ.}}}}{\Delta t} = -b \cdot v^2$$

Οπότε ο ρυθμός με τον οποίο μετατρέπεται η μηχανική ενέργεια σε θερμότητα είναι ανάλογος του τετραγώνου της ταχύτητας του σώματος.

3.52 Σωστή απάντηση είναι το α).

Αρχικά εκτρέπουμε το σώμα κατά d και το αφήνουμε ελεύθερο, άρα $d = A$.

Όταν το σώμα διέρχεται από τη θέση φυσικού μήκους του, που είναι και θέση ισορροπίας έχει ταχύτητα $v_{\max}$. Ταυτόχρονα επιδρά και το δεύτερο ελατήριο στο σώμα χωρίς να του αλλάξει τη θέση ισορροπίας. Επομένως:

$$v_{\max} = v'_{\max} \Rightarrow \omega d = \omega' A' \Rightarrow$$

$$\sqrt{\frac{k}{m}} d = \sqrt{\frac{4k}{m}} A' \Rightarrow A' = \frac{d}{2}$$

Το σώμα από την $t = 0$ έχει διανύσει απόσταση $s = d + A' = d + \frac{d}{2} = 1,5d$

3.53 Α) Σωστή απάντηση είναι το β).

Από τη συνθήκη ισορροπίας προκύπτει:

$$(\Theta.I.): \Sigma F = 0 \Rightarrow F = F_{\text{ελ}} \Rightarrow F = k\Delta l \Rightarrow \Delta l = \frac{F}{k}$$

Την $t = 0$ το σώμα βρίσκεται σε ακραία θέση της ταλάντωσης ($v = 0$), οπότε $A = \Delta l = \frac{F}{k}$

$$E = \frac{1}{2} k A^2 \Rightarrow E = \frac{1}{2} k \left(\frac{F}{k} \right)^2 \quad \text{άρα} \quad E = \frac{F^2}{2k}$$

Β) Σωστή απάντηση είναι το α).

Πριν την κατάργηση της $\vec{F}$ το σώμα ταλαντώνεται με πλάτος $A_1 = \Delta l$. Η $\vec{F}$ καταργείται όταν η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου παίρνει τη μέγιστη τιμή της, δηλαδή όταν απέχει από τη θέση φυσικού μήκους $2\Delta l$. Αυτό σημαίνει ότι τόσο θα είναι και το νέο πλάτος της ταλάντωσης.

Για τις ολικές ενέργειες ισχύει:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\frac{1}{2} k A_1^2}{\frac{1}{2} k A_2^2} \Rightarrow \frac{E_1}{E_2} = \frac{\Delta l^2}{(2\Delta l)^2} \Rightarrow \frac{E_1}{E_2} = \frac{1}{4}$$

3.54 Σωστή απάντηση είναι το α).

Από τη συνθήκη ισορροπίας προκύπτει:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow w = F_{\text{ελ}} \Rightarrow mg = k\Delta l \Rightarrow \Delta l = \frac{mg}{k}$$

Εφαρμόζοντας Αρχή Διατήρησης Ενέργειας Ταλάντωσης για τη χρονική στιγμή που το σώμα έρχεται σε επαφή με το ελατήριο:

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k \Delta l^2 \quad (1)$$

Όταν το σώμα έρθει σε επαφή με το ελατήριο θα έχει ταχύτητα:

$$v = gt = g \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow v = \sqrt{2gh}$$

Επίσης, το πλάτος της ταλάντωσης θα είναι:

$$A = d - \Delta l$$

Οπότε η (1) γίνεται:

$$k(d - \Delta l)^2 = m(\sqrt{2gh})^2 + k\Delta l^2 \Rightarrow$$

$$kd^2 - 2kd\Delta l + k\Delta l^2 = 2mgh + k\Delta l^2 \Rightarrow$$

$$kd^2 - 2kd\Delta l = 2mgh$$

$$kd^2 - 2kd \frac{mg}{k} = 2mgh \Rightarrow$$

$$kd^2 = 2mgh + 2dmg \Rightarrow m = \frac{kd^2}{2g(h+d)}$$

3.55 Σωστή απάντηση είναι το β).

Παίρνουμε συνθήκη ισορροπίας για το χρονικό διάστημα που ασκείται η $\vec{F}$.

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F = F_{ελ} \Rightarrow F = k\Delta l \Rightarrow \Delta l = \frac{F}{k} = A$$

Όταν το σώμα διέρχεται από τη θέση μηδενικής επιτάχυνσης, δηλαδή τη θέση ισορροπίας, η δύναμη υποδιπλασιάζεται. Για τη νέα θέση ισορροπίας ισχύει:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow \frac{F}{2} = F_{ελ} \Rightarrow \frac{F}{2} = k\Delta l' \Rightarrow \Delta l' = \frac{F}{2k} = \frac{A}{2}$$

Άρα η δύναμη υποδιπλασιάστηκε όταν το σώμα απείχε από τη νέα θέση ισορροπίας του $\Delta l'$.

Επίσης κατά τον υποδιπλασιασμό το σώμα διερχόταν από τη θέση ισορροπίας του, άρα είναι μέγιστη ταχύτητα $v = v_{\max} = \omega A = \omega \frac{F}{k}$.

Εφαρμόζοντας Αρχή Διατήρησης Ενέργειας Ταλάντωσης για τη χρονική στιγμή που η δύναμη υποδιπλασιάζεται, έχουμε:

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2} k A'^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k \Delta l'^2 \Rightarrow$$

$$k A'^2 = m \omega^2 A^2 + k \frac{A^2}{4} \Rightarrow A' = \frac{A\sqrt{5}}{2}$$

3.56 Σωστή απάντηση είναι το β).

Από τους τύπους της ταχύτητας μετά την ελαστική κρούση του m_2 με το m_3 και θέτοντας θετική φορά προς τα δεξιά παίρνουμε:

$$v'_2 = \frac{m_2 - m_3}{m_2 + m_3} v_2 + \frac{2m_3}{m_2 + m_3} v_0 = \frac{2m}{3m} v_0 \Rightarrow$$

$$v'_2 = \frac{2}{3} v_0$$

και

$$v'_3 = \frac{m_3 - m_2}{m_2 + m_3} v_0 + \frac{2m_2}{m_2 + m_3} v_2 = -\frac{m}{3m} v_0 \Rightarrow$$

$$v'_3 = -\frac{1}{3} v_0$$

Οπότε το σώμα μάζας m_3 μετά την κρούση με το m_2 συνεχίζει προς τα αριστερά με ταχύτητα

τα μέτρου $\frac{1}{3} v_0$, με την οποία και συγκρούεται με το σώμα μάζας m_1 .

Από τους τύπους της ταχύτητας μετά την ελαστική κρούση του m_1 με το m_3 παίρνουμε:

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_3}{m_1 + m_3} v_1 + \frac{2m_3}{m_1 + m_3} \left(-\frac{v_0}{3} \right) = -\frac{2m}{2m} \frac{v_0}{3} \Rightarrow v'_1 = -\frac{1}{3} v_0$$

Επειδή οι κρούσεις έγιναν στις θέσεις ισορροπίας των σωμάτων m_1 και m_2 αντίστοιχα, οι ταχύτητες που απέκτησαν τα σώματα μετά τις κρούσεις είναι οι μέγιστες. Η ολική ενέργεια λοιπόν θα ισούται με την κινητική ενέργεια στη θέση της κρούσης.

$$E_1 = K_{\max 1} \Rightarrow \frac{1}{2} k_1 A^2 = \frac{1}{2} m v_1'^2 \Rightarrow k_1 A^2 = \frac{m v_0^2}{9} \quad (1)$$

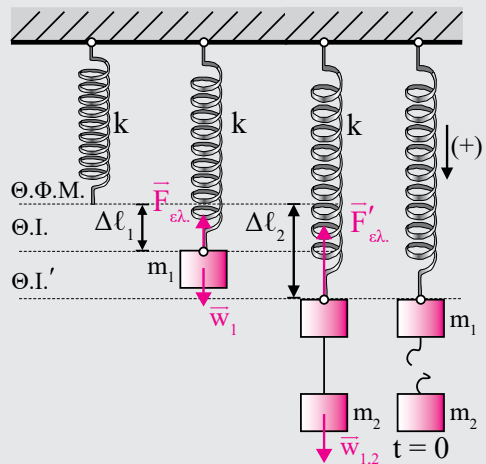
και

$$E_2 = K_{\max 2} \Rightarrow \frac{1}{2} k_2 4A^2 = \frac{1}{2} 2m v_2'^2 \Rightarrow$$

$$k_2 4A^2 = \frac{8m v_0^2}{9} \quad (2)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις (1), (2) ισχύει:

$$\frac{k_1}{4k_2} = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{k_1}{k_2} = \frac{1}{2}$$

3.57 Σωστή απάντηση είναι α).

Στην αρχική θέση ισορροπίας ισχύει:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow w_{1,2} = F'_{ελ} \Rightarrow$$

$$(m_1 + m_2)g = k \cdot \Delta l_2 \Rightarrow \Delta l_2 = \frac{(m_1 + m_2)g}{k}$$

Στη νέα θέση ισορροπίας ισχύει:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow w_1 = F_{ελ} \Rightarrow m_1 g = k \cdot \Delta l_1 \Rightarrow$$

$$\Delta l_1 = \frac{m_1 g}{k}$$

Για το πλάτος της ταλάντωσης έχουμε:

$$A = \Delta l_2 - \Delta l_1 \Rightarrow A = \frac{(m_1 + m_2)g}{k} - \frac{m_1 g}{k} \Rightarrow$$

$$A = \frac{m_2 g}{k} \Rightarrow A = \frac{4mg}{k}$$

Η μέγιστη τιμή της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου μετά το κόψιμο του νήματος είναι:

$$U_{ελ,max} = \frac{1}{2} k \cdot \Delta l_{max}^2 \Rightarrow U_{ελ,max} = \frac{1}{2} k \cdot (\Delta l_1 + A)^2 \Rightarrow$$

$$U_{ελ,max} = \frac{1}{2} k \cdot \left(\frac{mg}{k} + \frac{4mg}{k} \right)^2 \Rightarrow$$

$$U_{ελ,max} = \frac{25m^2 g^2}{2k}$$

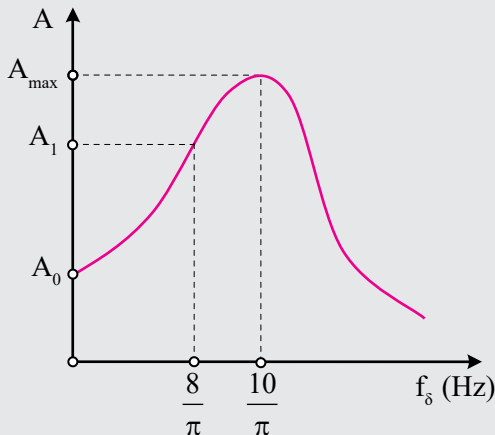
3.58 i) Σωστή απάντηση είναι η α).

Η ιδιοσυχνότητα της ταλάντωσης είναι:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow f_0 = \frac{10}{\pi} \text{ Hz}$$

Η συχνότητα της εξωτερικής περιοδικής δύναμης (διεγέρτης) είναι:

$$f_{\delta} = \frac{\omega_{\delta}}{2\pi} \Rightarrow f_{\delta} = \frac{16}{2\pi} \text{ Hz} \Rightarrow f_{\delta} = \frac{8}{\pi} \text{ Hz}$$

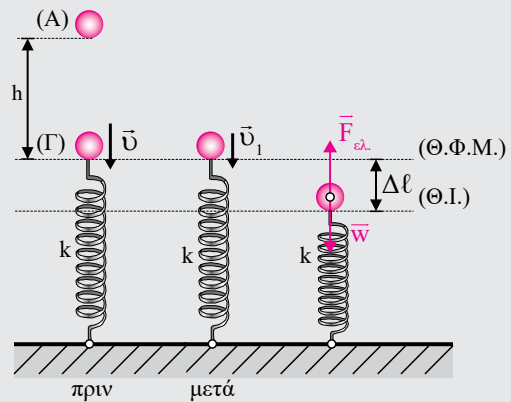


Με τη βοήθεια του παραπάνω διαγράμματος προκύπτει ότι με τη μείωση της συχνότητας του διεγέρτη, το πλάτος της ταλάντωσης μειώνεται συνεχώς.

ii) Σωστή απάντηση είναι η γ).

Με τη βοήθεια του παραπάνω διαγράμματος προκύπτει ότι με την αύξηση της συχνότητας του διεγέρτη το πλάτος της ταλάντωσης αρχικά αυξάνεται και έπειτα μειώνεται.

3.59 Σωστή απάντηση είναι α).



Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του σώματος από τη θέση Α μέχρι τη θέση Γ. Προκύπτει:

$$\frac{1}{2} m v^2 - 0 = mgh \Rightarrow v = \sqrt{2gh}$$

Ισχύει:

$$\frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow v_1 = \frac{v}{2} \Rightarrow v_1 = \frac{\sqrt{2gh}}{2}$$

Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{ελ} = w \Rightarrow k \cdot \Delta l = mg \Rightarrow \Delta l = \frac{mg}{k}$$

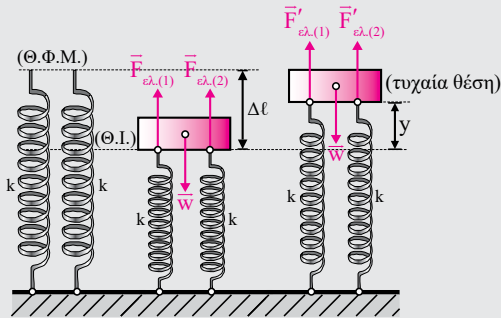
Από την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας Ταλάντωσης προκύπτει:

$$K + U = E \Rightarrow \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} k \Delta l^2 = \frac{1}{2} k A^2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{4} m 2gh + k \left(\frac{mg}{k} \right)^2 = k A^2 \Rightarrow$$

$$\frac{3m^2 g^2}{k} + \frac{m^2 g^2}{k} = k A^2 \Rightarrow A = \frac{2mg}{k}$$

3.60 Σωστή απάντηση είναι α).



Από τη συνθήκη ισορροπίας στη θέση ισορροπίας προκύπτει:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow W = F_{ελ,1} + F_{ελ,2} \Rightarrow W = 2k \cdot \Delta l(1).$$

Στην τυχαία θέση ισχύει:

$$\Sigma F = -W + F'_{ελ,1} + F'_{ελ,2} \Rightarrow$$

$$\Sigma F = -W + k \cdot (\Delta l - y) + k \cdot (\Delta l - y) \Rightarrow$$

$$\Sigma F = -2ky$$

Επομένως το σύστημα σώμα-ελατήριο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με $D = 2k$.

Από τη σχέση (1) προκύπτει:

$$mg = 2k \cdot \Delta l \Rightarrow \Delta l = \frac{mg}{2k}$$

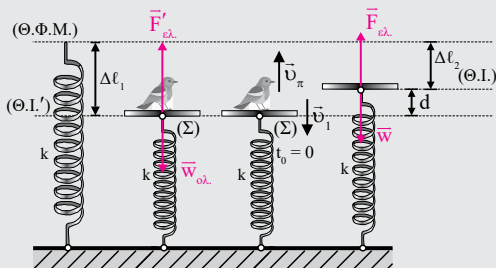
Από την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας Ταλάντωσης προκύπτει:

$$K + U = E \Rightarrow \frac{1}{2} m v_{εκ}^2 + \frac{1}{2} 2k \Delta l^2 = \frac{1}{2} 2k A^2 \Rightarrow$$

$$A = \sqrt{\frac{m v_{εκ}^2 + 2k \Delta l^2}{2k}} \Rightarrow$$

$$A = \sqrt{\frac{m \frac{3g^2 m}{2k} + 2k \frac{m^2 g^2}{4k^2}}{2k}} \Rightarrow A = \frac{mg}{k}$$

3.61 Σωστή απάντηση είναι γ).



Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ο. Προκύπτει:

$$0 = m v_{\pi} - m v_1 \Rightarrow v_1 = v_{\pi}$$

Από τη συνθήκη ισορροπίας στη Θ.Ι. έχουμε:

$$F'_{ελ} = W_{ολ} \Rightarrow k \cdot \Delta l_1 = 2mg \Rightarrow \Delta l_1 = \frac{2mg}{k}$$

Από τη συνθήκη ισορροπίας στη Θ.Ι. έχουμε:

$$F_{ελ} = W \Rightarrow k \cdot \Delta l_2 = mg \Rightarrow \Delta l_2 = \frac{mg}{k}$$

Προκύπτει:

$$d = \Delta l_1 - \Delta l_2 \Rightarrow d = \frac{mg}{k}$$

Από την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας Ταλάντωσης προκύπτει:

$$K + U = E \Rightarrow \frac{1}{2} m v_{\pi}^2 + \frac{1}{2} k d^2 = \frac{1}{2} k A^2 \Rightarrow$$

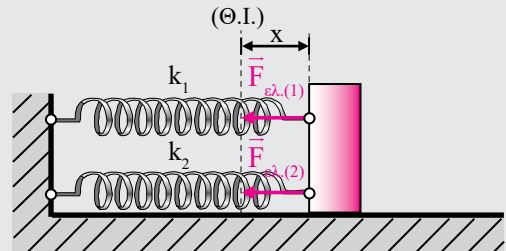
$$m \frac{8g^2}{k} + k \left(\frac{mg}{k} \right)^2 = k A^2 \Rightarrow A = \frac{3mg}{k}$$

Η μέγιστη τιμή της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου μετά το κόψιμο του νήματος είναι:

$$U_{ελ,max} = \frac{1}{2} k \cdot \Delta l_{max}^2 \Rightarrow U_{ελ,max} = \frac{1}{2} k \cdot (\Delta l_2 + A)^2 \Rightarrow$$

$$U_{ελ,max} = \frac{1}{2} k \cdot \left(\frac{mg}{k} + \frac{3mg}{k} \right)^2 \Rightarrow U_{ελ,max} = \frac{8m^2 g^2}{k}$$

3.62 Σωστή απάντηση είναι η α).



Σε μια τυχαία θέση ισχύει:

$$\Sigma F = -F'_{ελ,1} - F'_{ελ,2} \Rightarrow \Sigma F = -(k_1 + k_1) x$$

Επομένως το σώμα Σ εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με $D = k_1 + k_1 \Rightarrow D = 2k$

Έχουμε:

$$W_F = E \Rightarrow Fd = \frac{1}{2} 2k A^2 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{Fd}{k}}$$

Από την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας Ταλάντωσης προκύπτει:

$$K + U = E \Rightarrow K + \frac{1}{2} 2k \cdot d^2 = \frac{1}{2} 2kA^2 \Rightarrow$$

$$K = k \frac{Fd}{k} - k \cdot d^2 \Rightarrow k = d(F - kd)$$

3.63 Σωστή απάντηση είναι το β).

Στο σώμα ασκούνται δύο δυνάμεις, το βάρος και η τάση του νήματος που παίζουν τον ρόλο της δύναμης επαναφοράς.

$$\Sigma F = F_{\epsilon\pi\alpha\nu} \Rightarrow w - T = -Kx \Rightarrow T = w + Kx$$

Για να μη χαλαρώσει το νήμα πρέπει η ελάχιστη τιμή της τάσης του νήματος να είναι:

$$T_{\min} \geq 0$$

Η τάση του νήματος παίρνει την ελάχιστη τιμή της στην ακραία θέση -Α. Άρα :

$$T_{\min} = w - kA \Rightarrow T_{\min} = mg - kA$$

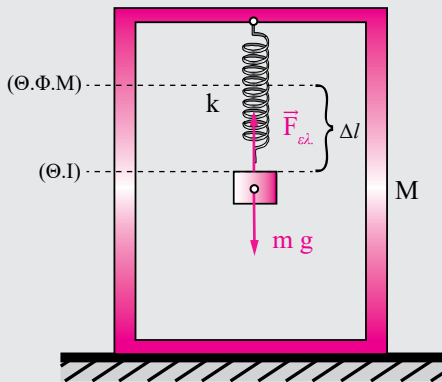
Αφού πρέπει:

$$T_{\min} \geq 0 \Rightarrow mg - kA \geq 0 \Rightarrow A \leq \frac{mg}{k}$$

άρα το μέγιστο πλάτος πρέπει να είναι:

$$A_{\max} = \frac{mg}{k}$$

3.64 Σωστή απάντηση είναι το γ).



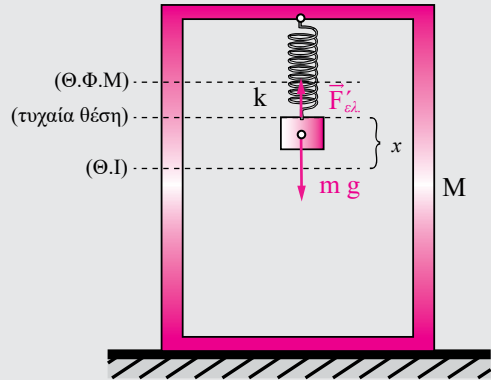
Αρχικά το σώμα μάζας m ισορροπεί όπως φαίνεται στο σχήμα. Έχουμε:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow w = F_{\epsilon\lambda} \Rightarrow mg = k\Delta l \Rightarrow \Delta l = \frac{mg}{k}$$

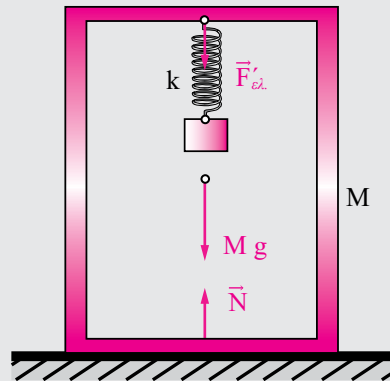
Σε μια τυχαία θέση της ταλάντωσης του σώματος, μάζας m, έχουμε:

$$\Sigma F = -kx \Rightarrow F'_{\epsilon\lambda} - w = -kx \Rightarrow$$

$$F'_{\epsilon\lambda} = mg - kx \quad (1)$$



Στο ακόλουθο σχήμα φαίνονται οι δυνάμεις που ασκούνται στο κιβώτιο, μάζας M, την ίδια στιγμή. Επειδή το κιβώτιο ισορροπεί, πρέπει:



$$\Sigma F = 0 \Rightarrow N - F'_{\epsilon\lambda} - Mg = 0 \Rightarrow N = F'_{\epsilon\lambda} + Mg \Rightarrow$$

$$N = mg - kx + Mg \quad (2)$$

Για να μη χαθεί η επαφή πρέπει:

$$N \geq 0 \Rightarrow mg - kx + Mg \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{(m+M)g}{k} \Rightarrow$$

$$x_{\max} = \frac{(m+M)g}{k} \Rightarrow A = \frac{(M+m)g}{k}$$

3.65 Σωστή απάντηση είναι το α).

Εφαρμόζουμε Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας για το σώμα μάζας m_2 :

$$K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \Rightarrow U_{αρχ} = K_{τελ} \Rightarrow m_2 gh = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \Rightarrow v_2 = \sqrt{2gh}$$

όπου v_2 είναι η ταχύτητα του σώματος μάζας m_2 ελάχιστα πριν την κρούση.

Υπολογίζουμε την κοινή ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση εφαρμόζοντας Αρχή Διατήρησης της Ορμής:

$$\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ} \Rightarrow m_2 v_2 = (m_2 + m_1) v_k \Rightarrow$$

$$m v_2 = 2m v_k \Rightarrow v_k = \frac{v_2}{2}$$

$$\text{οπότε η } v_k \text{ γίνεται: } v_k = \frac{v_2}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{2gh} \quad (1)$$

Από τη συνθήκη ισορροπίας του m_1 :

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow mg = k \Delta l_1 \Rightarrow \Delta l_1 = \frac{mg}{k}$$

Από τη συνθήκη ισορροπίας της ταλάντωσης του συσσωματώματος ισχύει:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow (m_1 + m_2) g = k \Delta l \Rightarrow$$

$$2mg = k \Delta l \Rightarrow \Delta l = \frac{2mg}{k} = 2 \Delta l_1$$

Από την Αρχή Διατήρησης Ενέργειας Ταλάντωσης για το συσσωμάτωμα τη χρονική στιγμή αμέσως μετά την κρούση παίρνουμε:

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_k^2 + \frac{1}{2} k x^2 \quad (2)$$

όπου x η απόσταση της θέσης ισορροπίας του συσσωματώματος από τη θέση που έγινε η κρούση, για την οποία ισχύει:

$$x = \Delta l - \Delta l_1 = \Delta l_1 = \frac{mg}{k} \quad (3)$$

Η (2) λόγω της (1) και της (3) γίνεται:

$$\frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} 2m \frac{1}{4} 2gh_{\max} + \frac{1}{2} k \frac{m^2 g^2}{k^2} \Rightarrow$$

$$k A^2 = mgh_{\max} + \frac{m^2 g^2}{k} \quad (4)$$

Σε τυχαία θέση της ταλάντωσης του συσσωματώματος πάνω από τη Θ.Φ.Μ. ισχύει:

$$\Sigma F = F_{\epsilon\pi\alpha\nu} \Rightarrow -w_{\sigma\upsilon\sigma} - F_{\epsilon\lambda} = -kx \Rightarrow$$

$$F_{\epsilon\lambda} = kx - (m_1 + m_2) g \Rightarrow F_{\epsilon\lambda} = kx - 2mg \quad (5)$$

Στο σώμα μάζας m_3 ασκούνται οι δυνάμεις του βάρους, της επαφής με το δάπεδο και της

αντίδρασης της δύναμης του ελατηρίου. Από τη συνθήκη ισορροπίας του έχουμε:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow N + F'_{\epsilon\lambda} - m_3 g = 0 \Rightarrow$$

(5)

$$N + F'_{\epsilon\lambda} - 2mg = 0 \Rightarrow N + kx - 2mg - 2mg = 0 \Rightarrow$$

$$N = 4mg - kx$$

όπου $F'_{\epsilon\lambda} = F_{\epsilon\lambda}$ ως δυνάμεις δράσης-αντίδρασης.

Για να μη χαθεί η επαφή πρέπει:

$$N \geq 0 \Rightarrow 4mg - kA \geq 0 \text{ και } A \leq \frac{4mg}{k} \quad (6)$$

άρα το μέγιστο πλάτος πρέπει να είναι:

$$A_{\max} = \frac{4mg}{k} \quad (7)$$

Η (4) λόγω της (1) και της (7) γίνεται:

$$k \frac{16m^2 g^2}{k^2} = mgh_{\max} + \frac{m^2 g^2}{k} \Rightarrow h_{\max} = \frac{15mg}{k}$$

3.66 Σωστή απάντηση είναι το α).

Στο σώμα, μάζας M , ασκούνται δύο δυνάμεις, η στατική τριβή και η αντίδραση της δύναμης ελατηρίου από το σώμα m που εκτελεί ταλάντωση. Το σώμα μάζας M παραμένει ακίνητο άρα:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow T_{\sigma\tau} - F'_{\epsilon\lambda} = 0 \Rightarrow T_{\sigma\tau} = F'_{\epsilon\lambda}$$

όπου $F'_{\epsilon\lambda} = F_{\epsilon\lambda}$ ως δυνάμεις δράσης-αντίδρασης.

Η στατική τριβή παίρνει τη μέγιστη τιμή της όταν το σώμα μάζας m βρίσκεται σε ακραία θέση και η δύναμη του ελατηρίου είναι μέγιστη, επομένως:

$$T_{\sigma\tau, \max} = F'_{\epsilon\lambda, \max} \Rightarrow \mu N = kA \Rightarrow$$

$$\mu Mg = kA \Rightarrow \mu 2mg = kA \quad (1)$$

Το σώμα μάζας m εκτοξεύεται με ταχύτητα v_0 από τη θέση ισορροπίας του, άρα είναι η μέγιστη ταχύτητα που αποκτά και ισχύει:

$$v_0 = \omega A \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} A \Rightarrow A = \sqrt{\frac{m}{k}} v_0$$

Οπότε η (1) γίνεται:

$$\mu 2mg = k \sqrt{\frac{m}{k}} v_0 \Rightarrow v_0 = \frac{2\mu mg}{k} \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow$$

$$v_0 = 2\mu g \sqrt{\frac{m^2 k}{mk^2}} \Rightarrow v_0 = 2\mu g \sqrt{\frac{m}{k}}$$

ΘΕΜΑ Γ

3.67 α) Από την εξίσωση της απομάκρυνσης του συστήματος συμπεραίνουμε τα εξής:

$$A = 0,1\text{m}, \omega = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{rad}$$

$$\text{Ισχύει } k = (m_1 + m_2) \omega^2 \Rightarrow k = 400 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

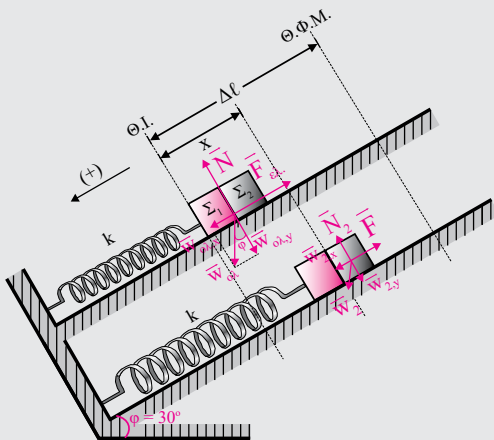
$$\text{και } D_1 = m_1 \omega^2 \Rightarrow D_1 = 300 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

β) Έστω ότι η επαφή χάνεται σε απομάκρυνση x από τη Θέση Ισορροπίας (Θ.Ι.).

Ισχύει:

$$\Sigma F_{x2} = -D_2 x \Rightarrow F - w_{2x} = -m_2 \omega^2 x \Rightarrow$$

$$F = m_2 g \eta \mu \varphi + m_2 \omega^2 x$$



Η επαφή χάνεται όταν $F = 0$, οπότε:

$$x = -\frac{g \eta \mu \varphi}{\omega^2} \Rightarrow x = -0,05\text{m} \text{ δηλαδή σε απόσταση } 0,05\text{m} \text{ πάνω από τη } (\Theta.Ι.)$$

Στη Θ.Ι. ισχύει:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_{ελ} = w_{ολx} \Rightarrow$$

$$k \Delta l = (m_1 + m_2) g \cdot \eta \mu \varphi \Rightarrow \Delta l = 0,05\text{m},$$

άρα η επαφή χάνεται στη θέση φυσικού μήκους (Θ.Φ.Μ.).

γ) Για τον υπολογισμό της χρονικής στιγμής εργαζόμαστε t_1 ως εξής:

$$x = 0,1 \eta \mu \left(10t + \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow$$

$$-0,05 = 0,1 \eta \mu \left(10t_1 + \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow \eta \mu \left(10t_1 + \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$t_1 = \frac{\pi}{15} \text{s}$$

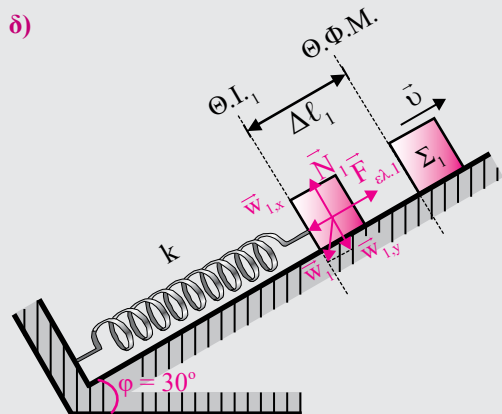
Εφαρμόζουμε Αρχή Διατήρησης Ενέργειας της ταλάντωσης για τη θέση $x = 0,05\text{m}$:

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 + \frac{1}{2} k x^2 \Rightarrow$$

$$(m_1 + m_2) v^2 = k A^2 + k x^2$$

$$v^2 = \frac{k(A^2 - x^2)}{m_1 + m_2} \Rightarrow |v| = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

δ)



Το σώμα Σ_1 μετά τον αποχωρισμό έχει ταχύ-

$$\text{τητα } v_1 = v = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ m/s.}$$

Για τη Θ.Ι. ισχύει:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_{ελ1} = w_{1x} \Rightarrow k \Delta l_1 = m_1 g \eta \mu \varphi \Rightarrow$$

$$\Delta l_1 = \frac{m_1 g \eta \mu \varphi}{k} \Rightarrow \Delta l_1 = \frac{3}{80} \text{m}$$

Εφαρμόζουμε Αρχή Διατήρησης Ενέργειας της ταλάντωσης για τη θέση $x = \Delta l_1$:

$$E = K + U \Rightarrow E = \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} k \Delta l_1^2 \Rightarrow$$

$$E = 1,40625\text{J}$$

3.68 α) Σε κάθε ταλάντωση η κινητική ενέργεια μεγιστοποιείται 2 φορές επομένως σε $\Delta t = 16 \text{ s}$ ο ταλαντωτής εκτελεί 4 ταλαντώσεις. Ισχύει:

$$T = \frac{\Delta t}{N} \Rightarrow T = 4 \text{ s}$$

β) Ισχύει:

$$D = m\omega^2 \Rightarrow D = m \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \Rightarrow D = 50 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Υπολογίζουμε το πλάτος της ταλάντωσης:

$$E_{\text{προσφ}} = E = \frac{1}{2} DA^2 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2E_{\text{προσφ}}}{D}} \Rightarrow A = 0,4 \text{ m}$$

Το διανυόμενο διάστημα σε χρόνο μιας περιόδου είναι:

$$s = 4A \Rightarrow s = 1,6 \text{ m}$$

γ) Έχουμε:

$$U = \frac{25}{100} E \Rightarrow \frac{1}{2} Dx^2 = \frac{25}{100} \cdot \frac{1}{2} DA^2 \Rightarrow$$

$$|x| = \frac{A}{2} \Rightarrow |x| = 0,2 \text{ m}$$

Για το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ταχύτητας ισχύει:

$$\frac{dv}{dt} = a = -\omega^2 x \Rightarrow \left| \frac{dv}{dt} \right| = \omega^2 |x| \Rightarrow$$

$$\left| \frac{dv}{dt} \right| = \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 |x| \Rightarrow$$

$$\left| \frac{dv}{dt} \right| = 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

δ) Τη χρονική στιγμή t_1 ο ταλαντωτής βρίσκεται στη θέση $x_1 = +0,2 \text{ m}$ με $v > 0$.

Από την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας Ταλάντωσης προκύπτει:

$$K + U = E \Rightarrow \frac{1}{2} mv_1^2 + \frac{1}{2} Dx_1^2 = \frac{1}{2} DA^2 \Rightarrow$$

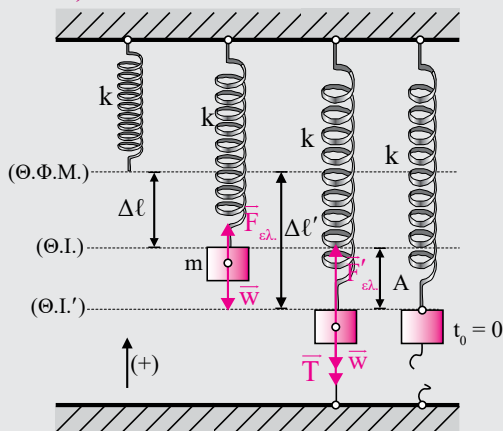
$$v_1 = +\sqrt{\frac{DA^2 - Dx_1^2}{m}} \Rightarrow v_1 = +0,1 \cdot \sqrt{30} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Για τον ζητούμενο ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας έχουμε:

$$\frac{dK}{dt} = \Sigma F \cdot v_1 \Rightarrow \frac{dK}{dt} = -Dx_1 v_1 \Rightarrow$$

$$\frac{dK}{dt} = -\sqrt{30} \frac{\text{J}}{\text{s}}$$

3.69 α)



Η περίοδος ταλάντωσης του σώματος είναι διπλάσια από την περίοδο με την οποία μεταβάλλεται η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης, δηλαδή:

$$T = 0,2\pi \text{ s}$$

Ισχύει:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow m = \frac{T^2 k}{4\pi^2} \quad \text{ή} \quad m = 2 \text{ kg}$$

Από τη συνθήκη ισορροπίας στη Θ.Ι. έχουμε:

$$F_{\text{ελ}} = W \Rightarrow k \cdot \Delta l = mg \Rightarrow \Delta l = \frac{mg}{k} \Rightarrow \Delta l = 0,1 \text{ m}$$

Από τη συνθήκη ισορροπίας στη Θ.Ι.΄ έχουμε:

$$F'_{\text{ελ}} = W + T \Rightarrow k \cdot \Delta l' = mg + T \Rightarrow$$

$$\Delta l' = \frac{T + mg}{k} \Rightarrow \Delta l' = 0,2 \text{ m}$$

Το πλάτος της ταλάντωσης θα είναι:

$$A = \Delta l' - \Delta l \Rightarrow A = 0,1 \text{ m}$$

β) Ισχύει:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Τη χρονική στιγμή t_1 : ισχύει $x_1 = +0,05 \text{ m} = +A/2$ με $v_1 > 0$.

Από την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας Ταλάντωσης προκύπτει:

$$K + U = E \Rightarrow \frac{1}{2} mv_1^2 + \frac{1}{2} Dx_1^2 = \frac{1}{2} DA^2 \Rightarrow$$

$$v_1 = +\omega \sqrt{A^2 - x_1^2} \Rightarrow v_1 = +0,5\sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Για τον ζητούμενο ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας έχουμε:

$$\frac{dK}{dt} = \Sigma F \cdot v_1 \Rightarrow \frac{dK}{dt} = -kx_1 v_1 \Rightarrow$$

$$\frac{dK}{dt} = -5\sqrt{3} \frac{J}{s}$$

γ) Αρχικά ($t_0 = 0$): $x_{\text{αρχ}} = -0,1 \text{ m}$, $\Delta l_{\text{αρχ}} = 0,2 \text{ m}$
 Τελικά (t_1): $x_{\text{τελ}} = +0,05 \text{ m}$, $\Delta l_{\text{τελ}} = 0,05 \text{ m}$.
 Το έργο της δύναμης επαναφοράς για τη συγκεκριμένη μετάβαση είναι:

$$W_{F_{\text{επ}}} = \frac{1}{2} kx_{\text{αρχ}}^2 - \frac{1}{2} kx_{\text{τελ}}^2 \Rightarrow$$

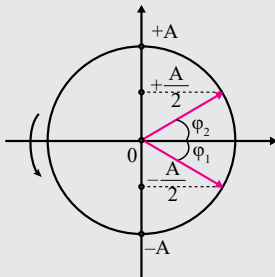
$$W_{F_{\text{επ}}} = 0,75 \text{ J}$$

Το έργο της δύναμης του ελατηρίου για τη συγκεκριμένη μετάβαση είναι:

$$W_{F_{\text{ελ}}} = \frac{1}{2} k\Delta l_{\text{αρχ}}^2 - \frac{1}{2} k\Delta l_{\text{τελ}}^2 \Rightarrow$$

$$W_{F_{\text{ελ}}} = 3,75 \text{ J}$$

δ) Υπολογίζουμε τον ελάχιστο χρόνο μετάβασης από τη θέση $x = -A/2$ στη θέση $x = +A/2$ με τη βοήθεια του περιστρεφόμενου διανύσματος:



Ισχύει:

$$\eta\mu\varphi_1 = \frac{A/2}{A} \Rightarrow \eta\mu\varphi_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

Επίσης, ισχύει:

$$\eta\mu\varphi_2 = \frac{A/2}{A} \Rightarrow \eta\mu\varphi_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi_2 = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

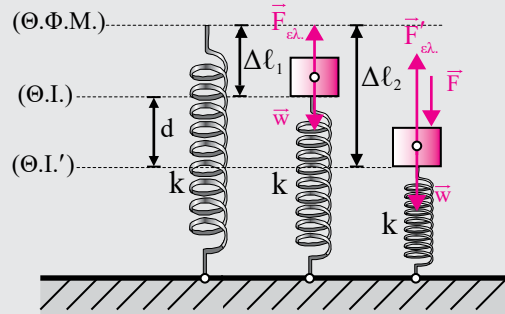
Έχουμε:

$$\Delta\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \Rightarrow \Delta\varphi = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

Για την ελάχιστη χρονική διάρκεια μετάβασης προκύπτει:

$$\Delta\varphi = \omega \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta\varphi}{\omega} \Rightarrow \Delta t = \frac{\pi}{30} \text{ s}$$

3.70 α)



Από τη συνθήκη ισορροπίας στη Θ.Ι. έχουμε:

$$F_{\text{ελ}} = w \Rightarrow k \cdot \Delta l_1 = mg \Rightarrow$$

$$\Delta l_1 = \frac{mg}{k} \Rightarrow \Delta l_1 = 0,1 \text{ m}$$

Από τη συνθήκη ισορροπίας στη Θ.Ι.΄ έχουμε:

$$F'_{\text{ελ}} = w + F \Rightarrow k \cdot \Delta l_2 = mg + F \Rightarrow$$

$$\Delta l_2 = \frac{mg + F}{k} \Rightarrow \Delta l_2 = 0,2 \text{ m}$$

Προκύπτει:

$$A = d = \Delta l_2 - \Delta l_1 \Rightarrow A = 0,1 \text{ m}$$

Επίσης, ισχύει:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow T = 0,2\pi \text{ s}$$

Έχουμε:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε την αρχική φάση φ_0 της ταλάντωσης.

Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, $x = +0,1 \text{ m}$, $v = 0$.

Από τη σχέση $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$ παίρνουμε:

$$0,1 = 0,1\eta\mu\varphi_0 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = 1 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = \eta\mu\frac{\pi}{2}$$

Από τις ομάδες λύσεων της παραπάνω τριγωνομετρικής εξίσωσης και λαμβάνοντας υπόψη ότι $0 \leq \varphi_0 < 2\pi \text{ rad}$ προκύπτει η λύση:

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

Τελικά προκύπτει:

$$v = \omega A \sin(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow$$

$$v = 1 \sin\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) (\text{S.I.})$$

β) Τη χρονική στιγμή $t_{\text{αρχ}} = \frac{T}{4}$ η ταχύτητα του σώματος είναι:

$$v_{\text{αρχ}} = \left[1 \sin\left(10 \cdot \frac{0,2\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right)\right] \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_{\text{αρχ}} = -1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Τη χρονική στιγμή που το σώμα διέρχεται από τη Θ.Φ.Μ. ισχύει $v_{\text{τελ}} = 0$.

Προκύπτει:

$$\Delta p = mv_{\text{τελ}} - mv_{\text{αρχ}} \Rightarrow \Delta p = 4 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Το μέτρο της μεταβολής της ορμής είναι:

$|\Delta p| = 4 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$ με διεύθυνση κατακόρυφη και φορά προς τα κάτω.

γ) Θέση (1):

Από την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας Ταλάντωσης προκύπτει:

$$K + U = E \Rightarrow 4K = E \Rightarrow 4 \cdot \frac{1}{2} mv_1^2 = \frac{1}{2} kA^2 \Rightarrow$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{kA^2}{4m}} \Rightarrow |v_1| = 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Θέση (2):

Από την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας Ταλάντωσης προκύπτει:

$$K + U = E \Rightarrow 2K = E \Rightarrow 2 \cdot \frac{1}{2} mv_2^2 = \frac{1}{2} kA^2 \Rightarrow$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{kA^2}{2m}} \Rightarrow |v_2| = 0,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Τελικά προκύπτει:

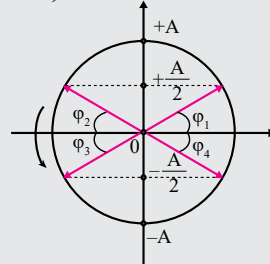
$$|\Delta p| = |p_{\text{τελ}}| - |p_{\text{αρχ}}| \Rightarrow |\Delta p| = |mv_2| - |mv_1| \Rightarrow$$

$$|\Delta p| = 0,8 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

δ) Βρίσκουμε τις θέσεις όπου $v = \frac{\sqrt{3}v_{\text{max}}}{2}$ εφαρμόζοντας την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας Ταλάντωσης. Ισχύει:

$$K + U = E \Rightarrow \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} kA^2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{\sqrt{3}}{2} v_{\text{max}} \right)^2 + \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} kA^2 \Rightarrow x = \pm \frac{A}{2}$$



Κάνουμε χρήση του περιστρεφόμενου διανύσματος. Έχουμε:

$$\eta \mu \varphi_1 = \frac{A/2}{A} \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

Προκύπτει:

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

Ισχύει:

$$\Delta \varphi = \omega \cdot \Delta t \Rightarrow \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = \omega \cdot \Delta t \Rightarrow$$

$$\Delta t = \frac{\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4}{\omega} \Rightarrow$$

$$\Delta t = \frac{\pi}{15} \text{ s}$$

3.71 α) Ισχύει:

$$d = \frac{1}{2} \alpha \cdot \Delta t^2 \Rightarrow \Delta t = \sqrt{\frac{2d}{\alpha}} \Rightarrow \Delta t = 0,2 \text{ s}$$

Προκύπτει:

$$v = \alpha \cdot \Delta t \Rightarrow v = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

β) Από την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας Ταλάντωσης προκύπτει:

$$K + U = E \Rightarrow \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} kd^2 = \frac{1}{2} kA^2 \Rightarrow$$

$$A = \sqrt{\frac{mv^2 + kd^2}{k}} \Rightarrow A = 0,4 \text{ m}$$

γ) Ισχύει:

$$\frac{dp}{dt}_{\max} = kA \Rightarrow \frac{dp}{dt}_{\max} = 40 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

δ) Από τη συνθήκη ισορροπίας στη Θ.Ι. έχουμε:

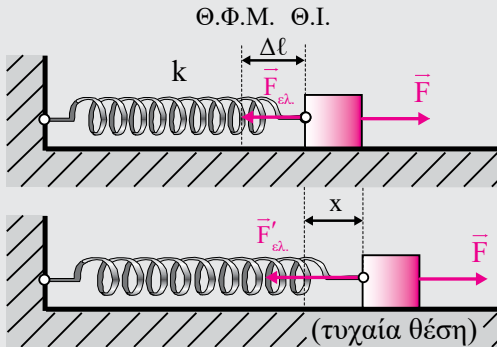
$$F_{\varepsilon\lambda} = w \Rightarrow k \cdot \Delta l = mg \Rightarrow \Delta l = \frac{mg}{k} \Rightarrow \Delta l = 0,3 \text{ m}$$

Προκύπτει:

$$F_{\varepsilon\lambda, \max} = k \cdot \Delta l_{\max} \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda, \max} = k \cdot (\Delta l + A) \Rightarrow$$

$$F_{\varepsilon\lambda, \max} = 70 \text{ N}$$

3.72 α)



Από τη συνθήκη ισορροπίας στη θέση ισορροπίας προκύπτει:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F = F_{\varepsilon\lambda} \Rightarrow F = k \cdot \Delta l (1)$$

Στην τυχαία θέση ισχύει:

$$\Sigma F = F - F'_{\varepsilon\lambda} \Rightarrow \Sigma F = F - k \cdot (\Delta l + x) \Rightarrow \Sigma F = -kx$$

Επομένως το σύστημα σώμα-Σ-ελατήριο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με $D = k$.

β) Από τη σχέση (1) προκύπτει:

$$\Delta l = \frac{F}{k} \Rightarrow \Delta l = 0,8 \text{ m}$$

Ισχύει:

$$A = \Delta l \Rightarrow A = 0,8 \text{ m}$$

Για τη μέγιστη τιμή του ρυθμού μεταβολής της ορμής του σώματος, έχουμε:

$$\frac{dp}{dt}_{\max} = kA \Rightarrow \frac{dp}{dt}_{\max} = 160 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

γ) Ισχύει:

$$U_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2} k \cdot \Delta l^2 \Rightarrow \Delta l = \sqrt{\frac{2U_{\varepsilon\lambda}}{k}} \Rightarrow \Delta l = 1,6 \text{ m}$$

Επομένως η δύναμη καταργείται στην ακραία θετική θέση. Το νέο πλάτος της ταλάντωσης είναι:

$$A' = 2A \Rightarrow A' = 1,6 \text{ m}$$

δ) i. Ισχύει:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \omega = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε την αρχική φάση φ_0 της ταλάντωσης.

Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, $x = +1,6 \text{ m}$, $v = 0$.

Από τη σχέση $x = A \eta \mu(\omega t + \varphi_0)$ παίρνουμε:

$$1,6 = 1,6 \eta \mu \varphi_0 \Rightarrow \eta \mu \varphi_0 = 1 \Rightarrow \eta \mu \varphi_0 = \eta \mu \frac{\pi}{2}$$

Από τις ομάδες λύσεων της παραπάνω τριγωνομετρικής εξίσωσης και λαμβάνοντας υπόψη ότι $0 \leq \varphi_0 < 2\pi \text{ rad}$ προκύπτει η λύση:

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

Τελικά προκύπτει:

$$x = A' \eta \mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow$$

$$x = 1,6 \eta \mu \left(10t + \frac{\pi}{2} \right) (\text{S.I.})$$

ii. Την $t_0 = 0$ έχουμε $x_{\text{αρχ}} = +1,6 \text{ m}$.

Την $t_1 = \frac{\pi}{6} \text{ s}$ έχουμε:

$$x_{\text{τελ}} = 1,6 \eta \mu \left(10 \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow x_{\text{τελ}} = 0,8 \text{ m}$$

Τελικά έχουμε:

$$W_{\text{F}_{\varepsilon\lambda}} = \frac{1}{2} k x_{\text{αρχ}}^2 - \frac{1}{2} k x_{\text{τελ}}^2 \Rightarrow$$

$$W_{\text{F}_{\varepsilon\lambda}} = 192 \text{ J}$$

3.73 α) Η επιτάχυνση του σώματος Σ_1 είναι ίση με μηδέν στη θέση ισορροπίας. Ισχύει:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1}} \Rightarrow \omega = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Προκύπτει:

$$v_1 = \omega A \Rightarrow v_1 = \omega d \Rightarrow v_1 = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Από την εφαρμογή της Α.Δ.Ο. στον οριζόντιο άξονα $x'x$ προκύπτει:

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_k \Rightarrow v_k = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} \Rightarrow$$

$$v_k = 2 \frac{m}{s}$$

β) Για την α.α.τ. του συσσωματώματος έχουμε:

$$v_k = \omega' A' \Rightarrow A' = \frac{v_k}{\sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}}} \Rightarrow A' = 0,4 \text{ m}$$

Ισχύει:

$$\frac{dp}{dt}_{\max} = kA' \Rightarrow \frac{dp}{dt}_{\max} = 80 \text{ kg} \cdot \frac{m}{s^2}$$

γ) Η κρούση γίνεται τη χρονική στιγμή t_1 για την οποία ισχύει:

$$t_1 = \frac{3T}{4} \quad \text{ή} \quad t_1 = \frac{3 \cdot \frac{2\pi}{\omega}}{4} \Rightarrow t_1 = 0,15\pi \text{ s}$$

Προκύπτει:

$$h = \frac{1}{2} g t_1^2 \Rightarrow h = 1,125 \text{ m}$$

δ) Βρίσκουμε το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_2 λίγο πριν την κρούση:

$$v_2 = g t_1 \Rightarrow v_2 = 1,5\pi \frac{m}{s}$$

Τελικά ισχύει:

$$K_{\alpha\pi} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_k^2 \Rightarrow$$

$$K_{\alpha\pi} = 115,5 \text{ J}$$

3.74 α) Ισχύει:

$$E = \frac{6,25}{100} E_0 \Rightarrow \frac{1}{2} D A^2 = \frac{6,25}{100} \cdot \frac{1}{2} D A_0^2 \Rightarrow A = \frac{A_0}{4}$$

Για τη χρονική στιγμή t_1 προκύπτει:

$$A = A_0 e^{-(\ln 2)t_1} \Rightarrow \frac{A_0}{4} = A_0 e^{-(\ln 2)t_1} \quad \text{ή} \quad t_1 = 2 \text{ s}$$

β) Κατά τη χρονική διάρκεια $t_0 = 0 \rightarrow t_1$ το σύστημα έχει εκτελέσει:

$$N = \frac{t_1}{T} \Rightarrow N = 10 \text{ ταλ.}$$

Κατά τη χρονική διάρκεια $t_0 = 0 \rightarrow t_2$ το σύστημα έχει εκτελέσει:

$$N' = N + 10 \Rightarrow N' = 20 \text{ ταλ.}$$

Επομένως ισχύει:

$$t_2 = N'T \Rightarrow t_2 = 4 \text{ s}$$

Τελικά προκύπτει:

$$A_2 = 0,64 e^{-(\ln 2)t_2} \Rightarrow A_2 = 0,04 \text{ m}$$

γ) Κατά τη χρονική διάρκεια $t_0 = 0 \rightarrow t_3$ το σύστημα έχει εκτελέσει:

$$N'' = 3N \Rightarrow N'' = 30 \text{ ταλ.}$$

Επομένως ισχύει:

$$t_3 = N''T \Rightarrow t_3 = 6 \text{ s}$$

Το πλάτος της ταλάντωσης τη χρονική στιγμή t_2 θα είναι:

$$A_3 = 0,64 e^{-(\ln 2)t_3} \Rightarrow A_3 = 0,01 \text{ m}$$

δ) Ισχύει:

$$\frac{A_0 - A}{A_0} = 50\% \Rightarrow A = \frac{A_0}{2}$$

Επίσης ισχύει:

$$E = \frac{1}{2} D A^2 \Rightarrow E = \frac{1}{2} D \frac{A_0^2}{4} \Rightarrow E = \frac{E_0}{4}$$

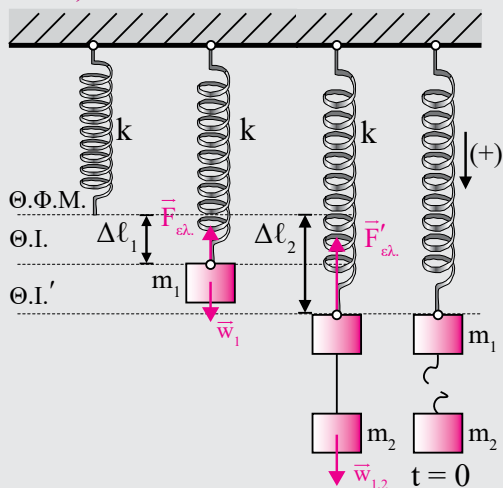
Το ζητούμενο επί τοις εκατό ποσοστό θα είναι:

$$\Pi(\%) = \frac{E_0 - E}{E_0} \cdot 100\% \Rightarrow$$

$$\Pi(\%) = \frac{E_0 - \frac{E_0}{4}}{E_0} \cdot 100\% \Rightarrow$$

$$\Pi(\%) = 75\%$$

3.75 α)



Ισχύει:

$$k = m_1 \omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m_1}} \Rightarrow \omega = 4\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Για το πλάτος της ταλάντωσης έχουμε:

$$A = \Delta l_2 - \Delta l_1 \Rightarrow A = \frac{(m_1 + m_2)g}{k} - \frac{m_1 g}{k} \Rightarrow$$

$$A = \frac{m_2 g}{k} \Rightarrow A = 0,5 \text{ m}$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε την αρχική φάση φ_0 της ταλάντωσης.

Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, ισχύει:

$$x = +0,2 \text{ m}, v = 0.$$

Από τη σχέση $x = A \eta \mu(\omega t + \varphi_0)$ παίρνουμε:

$$0,5 = 0,5 \eta \mu \varphi_0 \Rightarrow \eta \mu \varphi_0 = 1 \Rightarrow \eta \mu \varphi_0 = \eta \mu \frac{\pi}{2}$$

Από τις ομάδες λύσεων της παραπάνω τριγωνομετρικής εξίσωσης και λαμβάνοντας υπόψη ότι $0 \leq \varphi_0 < 2\pi \text{ rad}$ προκύπτει η λύση:

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

Τελικά προκύπτει:

$$x = A \eta \mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow$$

$$x = 0,5 \eta \mu \left(4\pi t + \frac{\pi}{2} \right) (\text{S.I.})$$

β) Υπολογίζουμε τη χρονική στιγμή t_1 που το Σ_2 απέχει απόσταση d από το έδαφος. Προκύπτει:

$$h - d = \frac{1}{2} g t_1^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2(h-d)}{g}} \Rightarrow$$

$$t_1 = 0,75 \text{ s}$$

Προκύπτει:

$$a_1 = -\omega^2 x_1 \Rightarrow a_1 = 80 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

γ) Υπολογίζουμε τη χρονική στιγμή t_2 που το Σ_1 ακινητοποιείται για πρώτη φορά μετά την $t_0 = 0$. Έχουμε:

$$t_2 = \frac{T}{2} \Rightarrow t_2 = \frac{\pi}{\omega} \Rightarrow t_2 = 0,25 \text{ s}$$

Για την ισχύ του βάρους του Σ_2 έχουμε:

$$P_{w_2} = m_2 g v_2 \Rightarrow P_{w_2} = m_2 g (g t_2) \Rightarrow$$

$$P_{w_2} = 200 \text{ W}$$

δ) Ισχύει:

$$\frac{dU}{dt} = -m_2 g v_3 \Rightarrow \frac{dU}{dt} = -m_2 g (g t_3) \Rightarrow$$

$$t_3 = \frac{\frac{dU}{dt}}{-m_2 g^2} \Rightarrow t_3 = 0,5 \text{ s}$$

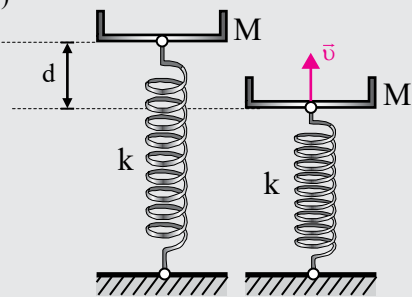
Για τον ρυθμό μεταβολής της ορμής του Σ_1 προκύπτει:

$$\frac{dp}{dt} = -kx_3 \Rightarrow \frac{dp}{dt} = -80 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

3.76 α)

(Θ.Φ.Μ.)

(Θ.Ι.)



Εφαρμόζουμε Α.Δ.Ε.Τ. για τη θέση:

$$y_1 = d = 0,1 \text{ m}$$

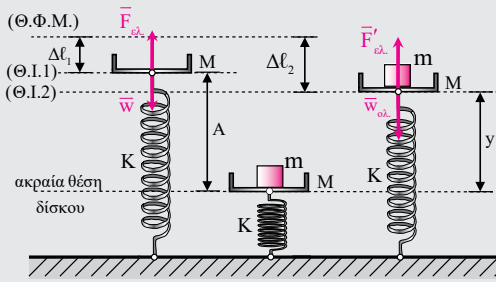
Ισχύει:

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} k d^2 \Rightarrow$$

$$A = \sqrt{\frac{M v^2 + k d^2}{k}} \Rightarrow A = 0,2 \text{ m}$$

β)

Για να αποδείξουμε ότι το σύστημα ελατήριου - δίσκος - σώμα, μετά την τοποθέτηση του σώματος στον δίσκο, εκτελεί ταλάντωση αρκεί να αποδείξουμε ότι η θέση όπου το τοποθετήσαμε το σώμα δεν είναι θέση ισορροπίας του συστήματος.



Για τη θέση ισορροπίας του δίσκου ισχύει:

$$(\Theta.Ι.1.): \Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{ελ.} = w \Rightarrow$$

$$k\Delta l_1 = Mg \Rightarrow \Delta l_1 = \frac{Mg}{k} \Rightarrow \Delta l_1 = \frac{3}{40} \text{ m}$$

Για τη νέα θέση ισορροπίας του συστήματος ισχύει:

$$(\Theta.Ι.2.): \Sigma F_y = 0 \Rightarrow F'_{ελ.} = w_{ολ.} \Rightarrow$$

$$k\Delta l_2 = (M+m)g \Rightarrow \Delta l_2 = \frac{(M+m)g}{k} \Rightarrow$$

$$\Delta l_2 = 0,1 \text{ m}$$

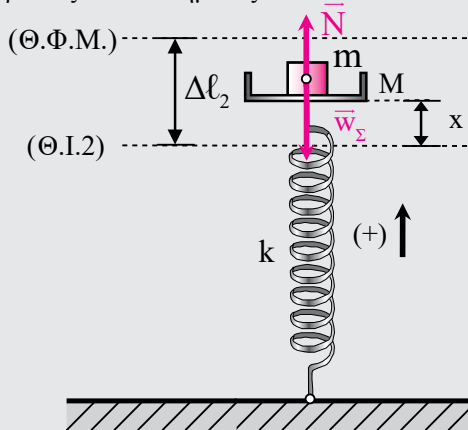
Η θέση που τοποθετήσαμε το σώμα απέχει από τη νέα θέση ισορροπίας του συστήματος:

$$y = A - (\Delta l_2 - \Delta l_1) \Rightarrow y = 0,175 \text{ m} \neq 0$$

Άρα το σύστημα θα εκτελέσει ταλάντωση με συχνότητα:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{M+m}} \Rightarrow f = \frac{5}{\pi} \text{ Hz}$$

γ) i. Έστω ότι το σώμα εγκαταλείπει τον δίσκο σε απομάκρυνση x από τη νέα θέση ισορροπίας του συστήματος.



Ισχύει:

$$\Sigma \vec{F}_x = -D_x \vec{x} \Rightarrow \vec{N} + \vec{w}_\Sigma = -m\omega^2 \vec{x} \Rightarrow$$

$$N - mg = -m\omega^2 x \Rightarrow x = \frac{g}{\omega^2} \Rightarrow x = 0,1 \text{ m}$$

Παρατηρούμε ότι $x < A'$ άρα το σώμα εγκαταλείπει το δίσκο.

ii.) Το σύστημα φτάνει στη θέση με απομάκρυνση $x=0,1 \text{ m}$ με ταχύτητα μέτρου V . Για το πλάτος ταλάντωσης του συστήματος των δύο σωμάτων ισχύει: $A' = 0,175 \text{ m}$.

Εφαρμόζουμε Α.Δ.Ε.Τ. για τη θέση αυτή για να υπολογίσουμε το μέτρο της ταχύτητας του συστήματος πριν τον αποχωρισμό. Ισχύει:

$$E = K + U \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} k A'^2 = \frac{1}{2} (M+m) V^2 + \frac{1}{2} k x^2 \Rightarrow$$

$$V = \sqrt{\frac{k(A'^2 - x^2)}{M+m}} \Rightarrow$$

$$V = 1,5 \text{ m/s}$$

Αμέσως μετά τον αποχωρισμό τα σώματα έχουν ταχύτητες $v_\Delta = v_\Sigma = V = 1,5 \text{ m/s}$.

Εφαρμόζουμε Α.Δ.Ε.Τ. για $x_1 = \Delta l_1 = \frac{3}{40} \text{ m}$ (ο αποχωρισμός έγινε στη θέση φυσικού μήκους).

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2} M v_{\max}^2 = \frac{1}{2} M v_\Delta^2 + \frac{1}{2} k x_1^2 \Rightarrow$$

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{M v_\Delta^2 + k x_1^2}{M}} \Rightarrow$$

$$v_{\max} = \sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

3.77 α) Το σύστημα των σωμάτων εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με γωνιακή συχνότητα:

$$k = (m_1 + m_2) \omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} \Rightarrow \omega = 5 \text{ rad/s}$$

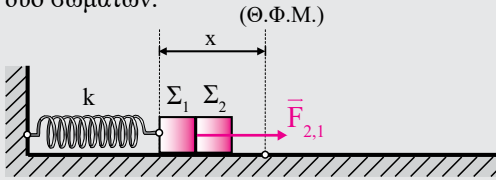
Η σταθερά επαναφοράς του σώματος Σ_1 είναι:

$$D_1 = m_1 \omega^2 \Rightarrow D_1 = 25 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

και του σώματος Σ_2 είναι:

$$D_2 = m_2 \omega^2 \Rightarrow D_2 = 75 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Έστω μία τυχαία θέση προς τα αριστερά με απομάκρυνση x από τη θέση ισορροπίας των δύο σωμάτων.



Το σώμα Σ_2 λόγω της επαφής του με το σώμα Σ_1 δέχεται από αυτό δύναμη $\vec{F}_{2,1}$. Επειδή το σώμα Σ_2 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, η δύναμη επαναφοράς που δέχεται είναι της μορφής:

$$F = -D_2 x \quad (1).$$

Αν θεωρήσουμε θετική φορά τη φορά προς τα αριστερά, τότε από τη σχέση (1) προκύπτει:

$$F_{2,1} = -D_2 x \quad (2).$$

Η επαφή των δύο σωμάτων χάνεται όταν γίνει $F_{2,1} = 0$. Από τη σχέση (2) για $F_{2,1} = 0$ προκύπτει $x = 0$. Επομένως η επαφή των δύο σωμάτων χάνεται όταν διέρχονται από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου που είναι και η θέση ισορροπίας του συστήματος των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 .

β) Στη θέση ισορροπίας τα δύο σώματα αποκτούν ταχύτητα μέτρου v που είναι ίση με την μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσής τους. Είναι δηλαδή:

$$v = v_{\max} \Rightarrow v = \omega A \Rightarrow v = 2 \frac{m}{s}$$

Αμέσως μετά την απώλεια επαφής των δύο σωμάτων, το σώμα Σ_1 συνεχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση γωνιακής συχνότητας:

$$k = m_1 \omega_1^2 \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m_1}} \Rightarrow \omega_1 = 10 \text{ rad/s}$$

Επειδή η επαφή των δύο σωμάτων χάνεται στη θέση ισορροπίας του συστήματός τους, η οποία είναι και θέση ισορροπίας του σώματος Σ_1 , το νέο πλάτος της ταλάντωσης A_1 που εκτελεί το Σ_1 είναι:

$$v = \omega_1 A_1 \Rightarrow A_1 = \frac{v}{\omega_1} \Rightarrow A_1 = 0,2 \text{ m}$$

γ) Κατά την κρούση των σωμάτων Σ_2 και Σ_3 ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής (Α.Δ.Ο.). Μετά τον αποχωρισμό:

$$v_2 = v = 2 \frac{m}{s}$$

Το Σ_2 εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση και συγκρούεται με το Σ_3 με ταχύτητα $v_2 = 2 \frac{m}{s}$.

Ισχύει:

$$\vec{p}_{\text{ολ. (πριν)}} = \vec{p}_{\text{ολ. (μετά)}} \Rightarrow m_2 v_2 = (m_2 + m_3) V_K \Rightarrow$$

$$V_K = \frac{m_2 v_2}{m_2 + m_3} \Rightarrow$$

$$V_K = 1,5 \frac{m}{s}$$

Το ποσοστό της κινητικής ενέργειας του Σ_2 που μετατράπηκε σε θερμότητα είναι:

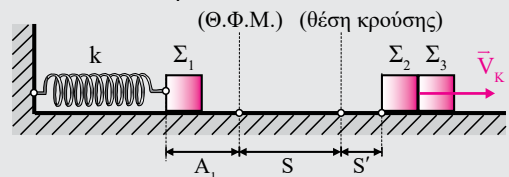
$$\begin{aligned} \Pi\% &= \frac{Q}{K_2} \cdot 100\% = \frac{K_{\text{ολ. (πριν)}} - K_{\text{ολ. (μετά)}}}{K_2} \cdot 100\% = \\ &= \frac{\frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} (m_2 + m_3) V_K^2}{\frac{1}{2} m_2 v_2^2} \cdot 100\% \Rightarrow \Pi\% = 25\% \end{aligned}$$

δ) Η περίοδος της νέας ταλάντωσης του Σ_1

$$\text{είναι } T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{m_1}{k}} = \frac{\pi}{5} \text{ s.}$$

Το Σ_1 ακινητοποιείται μετά τον αποχωρισμό

$$\text{σε χρόνο } t = \frac{3T_1}{4} = 0,45 \text{ s}$$



Σε αυτόν τον χρόνο το Σ_2 διανύει την απόσταση S και το συσσωμάτωμα την απόσταση S' . Επομένως:

$$S = v_2 t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{S}{v_2} \Rightarrow t_1 = 0,2 \text{ s}$$

και το συσσωμάτωμα:

$$S' = V_K (t - t_1) \Rightarrow S' = 0,375 \text{ m}$$

Η απόσταση είναι:

$$d' = A_1 + S + S' \Rightarrow d' = 0,975 \text{ m}$$

ΘΕΜΑ Δ

3.78 α) Από το διάγραμμα προκύπτει:

$$\frac{T}{4} = 0,05\pi \Rightarrow T = 0,2\pi \text{ s}$$

Ισχύει:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Έχουμε:

$$D = m\omega^2 \Rightarrow D = 200 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Για το πλάτος της ταλάντωσης προκύπτει:

$$E = \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow U_{\max} = \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow$$

$$A = \sqrt{\frac{2U_{\max}}{D}} \Rightarrow A = 0,2 \text{ m}$$

β) Θέλουμε να υπολογίσουμε την αρχική φάση φ_0 της ταλάντωσης.

Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, $x = +0,2\text{m}$, $v = 0$.

Από τη σχέση $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$ παίρνουμε:

$$0,2 = 0,2\eta\mu\varphi_0 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = 1 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = \eta\mu\frac{\pi}{2}$$

Από τις ομάδες λύσεων της παραπάνω τριγωνομετρικής εξίσωσης και λαμβάνοντας υπόψη ότι $0 \leq \varphi_0 < 2\pi \text{ rad}$ προκύπτει η λύση:

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης είναι:

$$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow x = 0,2\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) (\text{S.I.})$$

γ) Ισχύει:

$$x_{\text{αρχ}} = +0,2\text{m} \text{ και } x_{\text{τελ}} = -0,1\text{m}$$

Το έργο της δύναμης επαναφοράς για τη συγκεκριμένη μετάβαση είναι:

$$W_{F_{\text{επ}}} = \frac{1}{2}Dx_{\text{αρχ}}^2 - \frac{1}{2}Dx_{\text{τελ}}^2 \Rightarrow W_{F_{\text{επ}}} = 3\text{J}$$

Η αρχική φάση είναι $\varphi_{\text{αρχ}} = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$. Ισχύει:

$$-0,1 = 0,2\eta\mu\varphi_{\text{τελ}} \Rightarrow$$

$$\eta\mu\varphi_{\text{τελ}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \eta\mu\varphi_{\text{τελ}} = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

και επειδή $v > 0$ προκύπτει:

$$\varphi_{\text{τελ}} = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6} (1)$$

Θέτουμε στην (1) $\kappa = 5$ και έχουμε:

$$\varphi_{\text{τελ}} = \frac{59\pi}{6} \text{ rad}$$

Τελικά έχουμε:

$$\Delta\varphi = \varphi_{\text{τελ}} - \varphi_{\text{αρχ}} \Rightarrow$$

$$\Delta\varphi = \frac{28\pi}{3} \text{ rad}$$

δ) Ισχύει γενικά:

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{dK}{dt} \Rightarrow \frac{dU}{dt} = -\Sigma F \cdot v \Rightarrow \frac{dU}{dt} = Dxv \Rightarrow$$

$$\frac{dU}{dt} = DA\eta\mu(\omega t + \varphi_0)\omega A\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow$$

$$\frac{dU}{dt} = \frac{D\omega A^2}{2}\eta\mu(2\omega t + 2\varphi_0)$$

Επομένως, προκύπτει:

$$\left.\frac{dU}{dt}\right|_{\max} = \frac{D\omega A^2}{2} \Rightarrow \left.\frac{dU}{dt}\right|_{\max} = 40 \frac{\text{J}}{\text{s}}$$

3.79 α) Ισχύει:

$$k = (m_1 + m_2)\omega^2 \Rightarrow k = 200 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

β) Η σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης του Σ_2 είναι:

$$D_2 = m_2\omega^2 \Rightarrow D_2 = 150 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Για την ταλάντωση του Σ_2 ισχύει:

$$\Sigma F = -D_2x \Rightarrow |T_\sigma| = D_2|x| \Rightarrow |x| = \frac{|T_\sigma|}{D_2} \Rightarrow$$

$$|x| = 0,05\text{m}$$

Εφαρμόζοντας την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας Ταλάντωσης για το σύστημα των δύο σωμάτων, έχουμε:

$$\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow$$

$$|v| = \omega\sqrt{A^2 - x^2} \Rightarrow |v| = 0,25\sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

γ) Ισχύει:

$$|T_\sigma| \leq T_{\sigma, \max} \Rightarrow D_2 |x| \leq \mu_\sigma m_2 g \Rightarrow$$

$$|x| \leq \frac{\mu_\sigma m_2 g}{D_2} \Rightarrow |x| \leq 0,2\text{m}$$

Επομένως το μέγιστο πλάτος της ταλάντωσης, για να μην ολισθαίνει το ένα σώμα σε σχέση με το άλλο, είναι:

$$A_{\max} = 0,2\text{m}$$

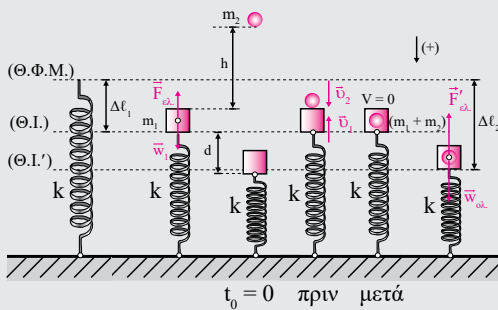
δ) Προκύπτει:

$$|T_\sigma| \leq T_{\sigma, \max} \Rightarrow D_2 |x| \leq \mu_\sigma m_2 g \Rightarrow$$

$$\mu_\sigma \geq \frac{D_2 |x|}{m_2 g} \Rightarrow \mu_{\sigma, \min} = \frac{D_2 A'}{m_2 g} \Rightarrow$$

$$\mu_{\sigma, \min} = 0,375$$

3.80 α)



Ισχύει:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m_1}} \Rightarrow \omega_1 = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Επίσης έχουμε:

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} \Rightarrow T_1 = 0,2\pi\text{s}$$

Τα δύο σώματα από τη στιγμή που αφέθηκαν ελεύθερα μέχρι να συγκρουστούν κινήθηκαν για χρόνο:

$$\Delta t = \frac{T_1}{4} \Rightarrow \Delta t = 0,05\pi\text{s}$$

Ισχύει:

$$h = \frac{1}{2}g\Delta t^2 \Rightarrow h = 0,125\text{m}$$

Έχουμε:

$$v_1 = \omega_1 d \Rightarrow v_1 = 1,5\pi \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Προκύπτει:

$$v_2 = g \cdot \Delta t \Rightarrow v_2 = 0,5\pi \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Για το σώμα Σ1 ισχύει:

$$\frac{dU_{\beta\alpha\rho}}{dt} \quad (1) = m_1 g v_1 \Rightarrow \frac{dU_{\beta\alpha\rho}}{dt} \quad (1) = 15\pi \frac{\text{J}}{\text{s}}$$

Για το σώμα Σ2 ισχύει:

$$\frac{dU_{\beta\alpha\rho}}{dt} \quad (2) = -m_2 g v_2 \Rightarrow \frac{dU_{\beta\alpha\rho}}{dt} \quad (2) = -15\pi \frac{\text{J}}{\text{s}}$$

β) Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής. Προκύπτει:

$$m_2 v_2 - m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_k \Rightarrow$$

$$v_k = \frac{m_2 v_2 - m_1 v_1}{m_1 + m_2} \Rightarrow v_k = 0$$

Από τη συνθήκη ισορροπίας στη Θ.Ι. έχουμε:

$$F_{\varepsilon\lambda} = w_1 \Rightarrow k \cdot \Delta l_1 = m_1 g \Rightarrow$$

$$\Delta l_1 = \frac{m_1 g}{k} \Rightarrow \Delta l_1 = 0,1\text{m}$$

Από τη συνθήκη ισορροπίας στη Θ.Ι.΄ έχουμε:

$$F'_{\varepsilon\lambda} = w_{\text{ολ}} \Rightarrow k \cdot \Delta l_2 = (m_1 + m_2) g \Rightarrow$$

$$\Delta l_2 = \frac{(m_1 + m_2) g}{k} \Rightarrow \Delta l_2 = 0,4\text{m}$$

Τελικά ισχύει:

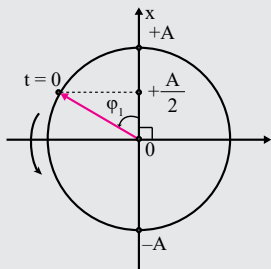
$$A = \Delta l_2 - \Delta l_1 \Rightarrow A = 0,3\text{m}$$

γ) Ισχύει:

$$K + U = E \Rightarrow 4U = E \Rightarrow 4 \cdot \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow x = +\frac{A}{2}$$

(για πρώτη φορά $x > 0$)

Κάνουμε χρήση του περιστρεφόμενου διανύσματος:



Ισχύει:

$$\sin \varphi_1 = \frac{A/2}{A} \Rightarrow \sin \varphi_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

Έχουμε:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} \Rightarrow \omega = 5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

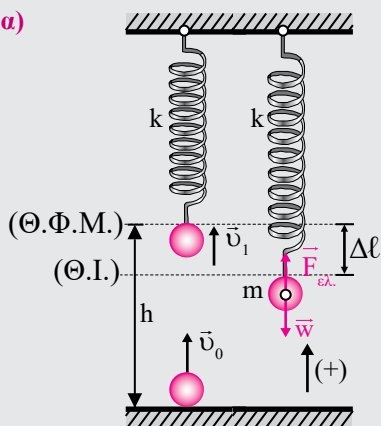
Προκύπτει:

$$\Delta \varphi = \omega \cdot \Delta t' \Rightarrow \Delta t' = \frac{\varphi_1}{\omega} \Rightarrow \Delta t' = \frac{\pi}{15} \text{ s}$$

δ) Η δύναμη του ελατηρίου έχει τη μέγιστη τιμή της στην κάτω ακραία θέση όπου $x = +0,3 \text{ m}$. Έχουμε:

$$\left| \frac{dp}{dt} \right| = k|x| \Rightarrow \left| \frac{dp}{dt} \right| = 30 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

3.81 α)



Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του σώματος από τη θέση εκτόξευσης μέχρι τη

θέση που βρίσκεται λίγο πριν συγκρουστεί με το ελατήριο. Προκύπτει:

$$K_1 - \frac{1}{2} m v_0^2 = -mgh \Rightarrow K_1 = \frac{1}{2} m v_0^2 - mgh \Rightarrow K_1 = 2 \text{ J}$$

β) Ισχύει:

$$K = \frac{3}{4} \cdot K_1 \Rightarrow K = 1,5 \text{ J}$$

Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{ελ} = w \Rightarrow k \cdot \Delta l = mg \Rightarrow$$

$$\Delta l = \frac{mg}{k} \Rightarrow \Delta l = 0,1 \text{ m}$$

Από την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας Ταλάντωσης προκύπτει:

$$K + U = E \Rightarrow K + \frac{1}{2} k \Delta l^2 = \frac{1}{2} k A^2 \Rightarrow$$

$$A = \sqrt{\frac{2K + k \Delta l^2}{k}} \Rightarrow A = 0,2 \text{ m}$$

γ) Το μέτρο της δύναμης που ασκείται στο σώμα από το ελατήριο είναι ελάχιστο όταν το σώμα διέρχεται από τη θέση φυσικού του μήκους ($x = +0,1 \text{ m}$). Ισχύει:

$$K = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow |v| = \sqrt{\frac{2K}{m}} \Rightarrow v = -\sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ο ρυθμός μεταβολής της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας του σώματος είναι:

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{dK}{dt} \Rightarrow \frac{dU}{dt} = -\frac{dK}{dt} \Rightarrow$$

$$\frac{dU}{dt} = -\Sigma F \cdot v \Rightarrow \frac{dU}{dt} = -kxv \Rightarrow$$

$$\frac{dU}{dt} = 10\sqrt{3} \frac{\text{J}}{\text{s}}$$

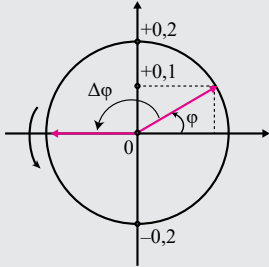
δ) Η κατακόρυφη βολή προς τα πάνω διαρκεί για χρόνο Δt_1 . Έχουμε:

$$K_1 = \frac{1}{2} m v_1^2 \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2K_1}{m}} \Rightarrow v_1 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ισχύει για την κατακόρυφη βολή προς τα πάνω:

$$v_1 = v_0 - g \cdot \Delta t_1 \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{v_0 - v_1}{g} \Rightarrow \Delta t_1 = 0,2 \text{ s}$$

Με τη βοήθεια του περιστρεφόμενου διανύσματος, προκύπτει:



Έχουμε:

$$\eta \mu \varphi = \frac{0,1}{0,2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

Προκύπτει:

$$\Delta \varphi = \pi - \varphi \Rightarrow \Delta \varphi = \frac{5\pi}{6} \text{ rad}$$

Ισχύει:

$$\Delta \varphi = \omega \cdot \Delta t_2 \Rightarrow \Delta \varphi = \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \Delta t_2 \Rightarrow$$

$$\Delta t_2 = \frac{\Delta \varphi}{\sqrt{\frac{k}{m}}} \Rightarrow \Delta t_2 = \frac{\pi}{12} \text{ s} \Rightarrow \Delta t_2 = 0,26 \text{ s}$$

Προκύπτει:

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 \Rightarrow \Delta t = \mathbf{0,46 \text{ s}}$$

3.82 α) Ισχύει:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_1}} \Rightarrow T_1 = 0,4\pi \text{ s}$$

Επίσης ισχύει:

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_2}} \Rightarrow T_2 = 0,2\pi \text{ s}$$

Για την ζητούμενη περίοδο προκύπτει:

$$T = \frac{T_1}{2} + \frac{T_2}{2} \Rightarrow T = \mathbf{0,3\pi \text{ s}}$$

β) Ισχύει:

$$v_{\max,1} = v_{\max,2} \Rightarrow \omega_1 A_1 = \omega_2 A_2 \Rightarrow$$

$$\frac{2\pi}{T_1} d_1 = \frac{2\pi}{T_2} \Delta l_{\max,2} \Rightarrow \Delta l_{\max,2} = \frac{T_2}{T_1} d_1 \Rightarrow$$

$$\Delta l_{\max,2} = \mathbf{0,2 \text{ m}}$$

γ) Ισχύει:

$$T_3 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_3}} \Rightarrow T_3 = 0,4\pi \text{ s}$$

Επίσης, ισχύει:

$$T_4 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_3 + k_4}} \Rightarrow T_4 = 0,2\pi \text{ s}$$

Για την ζητούμενη περίοδο προκύπτει:

$$T' = \frac{T_3}{2} + \frac{T_4}{2} \Rightarrow T' = \mathbf{0,3\pi \text{ s}}$$

δ) Έχουμε:

$$A_3 = d_2 \Rightarrow A_3 = 0,2 \text{ m}$$

Ισχύει:

$$v_{\max,3} = v_{\max,4} \Rightarrow \omega_3 A_3 = \omega_4 A_4 \Rightarrow$$

$$\frac{2\pi}{T_3} d_2 = \frac{2\pi}{T_4} A_4 \Rightarrow A_4 = \frac{T_4}{T_3} d_2 \Rightarrow$$

$$A_4 = 0,1 \text{ m}$$

Προκύπτει:

$$|\alpha_3| = \omega_3^2 A_3 \Rightarrow |\alpha_3| = \left(\frac{2\pi}{T_3} \right)^2 A_3 \Rightarrow$$

$$|\alpha_3| = \mathbf{5 \frac{m}{s^2}}$$

Επίσης, έχουμε:

$$|\alpha_4| = \omega_4^2 A_4 \Rightarrow |\alpha_4| = \left(\frac{2\pi}{T_4} \right)^2 A_4 \Rightarrow$$

$$|\alpha_4| = \mathbf{10 \frac{m}{s^2}}$$

3.83 α) Ισχύει:

$$\frac{v_{\max}}{\alpha_{\max}} = \frac{\omega A}{\omega^2 A} \Rightarrow \omega = \frac{\alpha_{\max}}{v_{\max}} \Rightarrow \omega = \mathbf{5 \frac{rad}{s}}$$

Προκύπτει:

$$k = (m_1 + m_2) \omega^2 \Rightarrow k = 200 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Έχουμε:

$$A = \frac{v_{\max}}{\omega} \Rightarrow A = 0,4 \text{ m}$$

β) Ισχύει:

$$x = \Delta l \Rightarrow x = 0,2\sqrt{3} \text{ m}$$

Κάνουμε χρήση (με απόδειξη) του τύπου:

$$|v| = \omega \sqrt{A^2 - x^2} \Rightarrow |v| = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

γ) Από την εφαρμογή της Α.Δ.Ο. στον οριζόντιο άξονα της κίνησης έχουμε:

$$(m_1 + m_2) \cdot v = m_1 v_1 \cdot \sin 60^\circ + m_2 v_2 \Rightarrow$$

$$v_2 = \frac{(m_1 + m_2) \cdot v - m_1 v_1 \cdot \sin 60^\circ}{m_2} \Rightarrow$$

$$v_2 = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας ταλάντωσης για τη νέα ταλάντωση του σώματος Σ. Προκύπτει:

$$K + U = E \Rightarrow \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A'^2 \Rightarrow$$

$$A' = \sqrt{\frac{m_2 v_2^2 + k x^2}{k}} \Rightarrow A' = 0,1\sqrt{13} \text{ m}$$

δ) i. Στην αρχική θέση ισχύει:

$$v_{\alpha\rho\chi} = v_2 \Rightarrow v_{\alpha\rho\chi} = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Στην τελική θέση ισχύει:

$$v_{\text{τελ}} = -\sqrt{\frac{k}{m_2}} A' \Rightarrow v_{\text{τελ}} = -\sqrt{13} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ισχύει:

$$W_{F_{\text{επ}}} = \frac{1}{2} m_2 v_{\text{τελ}}^2 - \frac{1}{2} m_2 v_{\alpha\rho\chi}^2 \Rightarrow W_{F_{\text{επ}}} = 12 \text{ J}$$

ii. Προκύπτει:

$$\Delta|p| = |p_{\text{τελ}}| - |p_{\alpha\rho\chi}| \Rightarrow$$

$$\Delta|p| = |m_2 v_{\text{τελ}}| - |m_2 v_{\alpha\rho\chi}| \Rightarrow$$

$$\Delta|p| = 5,2 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

3.84 α) Ισχύει:

$$D = (m_1 + m_2) \omega^2 \Rightarrow D = 250 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Έχουμε:

$$D_1 = m_1 \omega^2 \Rightarrow D_1 = 50 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Επίσης ισχύει:

$$D_2 = m_2 \omega^2 \Rightarrow D_2 = 200 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

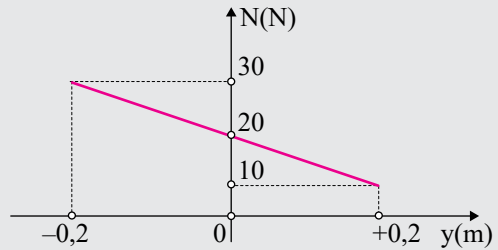
β) i. Για την απλή αρμονική ταλάντωση που εκτελεί το σώμα Σ₁ ισχύει:

$$\Sigma F_y = -D_1 y \Rightarrow N - m_1 g = -D_1 y \Rightarrow$$

$$N = m_1 g - D_1 y \Rightarrow$$

$$N = 20 - 50y \text{ (S.I.) για } -0,2\text{ m} \leq y \leq +0,2\text{ m}$$

Το ζητούμενο διάγραμμα είναι το εξής:



ii. Παρατηρούμε από το διάγραμμα $N = f(y)$ πως κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης ισχύει συνεχώς $N > 0$ επομένως δεν χάνεται η επαφή.

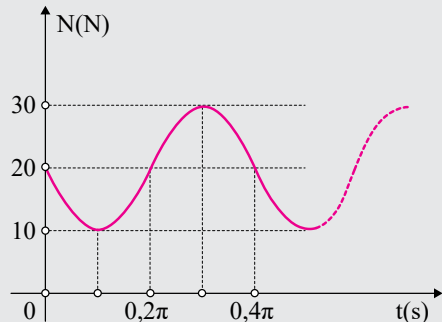
γ) i. Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης είναι η:

$$y = 0,2 \cdot \eta\mu 5t \text{ (S.I.)}$$

Προκύπτει:

$$N = 20 - 50y \Rightarrow N = 20 - 10\eta\mu 5t \text{ (S.I.)}$$

Το ζητούμενο διάγραμμα είναι το εξής:



ii. Όταν $y = +0,1 \text{ m}$ ισχύει:

$$N = (20 - 50 \cdot 0,1) \text{ N} \Rightarrow N = 15 \text{ N}$$

Το μέτρο της δύναμης που ασκεί το σώμα Σ_1 στο Σ_2 θα είναι:

$$N' = N \Rightarrow N' = 15 \text{ N}$$

δ) i. Για να μη χάνεται η επαφή μεταξύ των δύο σωμάτων θα πρέπει να ισχύει:

$$N \geq 0 \Rightarrow m_1 g - m_1 \omega^2 y \geq 0 \Rightarrow g - \omega^2 A \geq 0 \Rightarrow$$

$$\omega \leq \sqrt{\frac{g}{A}} \Rightarrow \omega_{\max} = \sqrt{\frac{g}{A}} \Rightarrow$$

$$\omega_{\max} = 5\sqrt{2} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

ii. Η επαφή θα χαθεί στη θέση όπου:

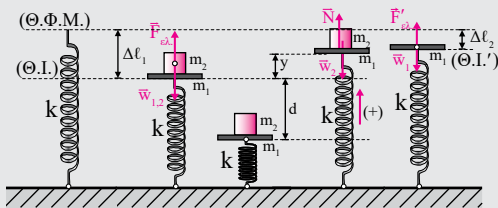
$$N = 0 \Rightarrow m_1 g - D_1 y = 0 \Rightarrow y = \frac{m_1 g}{D_1} \Rightarrow y = 0,4 \text{ m}$$

Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ενέργειας ταλάντωσης έχουμε:

$$\frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} D_1 y^2 = \frac{1}{2} D_1 A^2 \Rightarrow$$

$$|v| = \sqrt{\frac{D_1 A^2 - D_1 y^2}{m_1}} \Rightarrow |v| = \sqrt{5} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

3.85 α)



Ισχύει:

$$k = (m_1 + m_2) \omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} \Rightarrow \omega = 5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Επίσης, ισχύει:

$$D_2 = m_2 \omega^2 \Rightarrow D_2 = 50 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Για την απλή αρμονική ταλάντωση που εκτελεί το σώμα Σ_1 ισχύει:

$$\Sigma F_y = -D_2 y \Rightarrow N - m_2 g = -D_2 y \Rightarrow$$

$$N = m_2 g - D_2 y \Rightarrow N = 20 - 50y \text{ (S.I.)}$$

Για να μη χάνεται η επαφή μεταξύ των δύο σωμάτων θα πρέπει να ισχύει:

$$N \geq 0 \Rightarrow 20 - 50y \geq 0 \Rightarrow y \leq 0,4 \text{ m} \Rightarrow y_{\max} = 0,4 \text{ m}$$

Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{\epsilon\lambda} = w_{1,2} \Rightarrow$$

$$k \cdot \Delta l_1 = (m_1 + m_2) g \Rightarrow \Delta l_1 = \frac{(m_1 + m_2) g}{k} \Rightarrow \Delta l_1 = 0,4 \text{ m}$$

Προκύπτει επομένως ότι η επαφή θα χαθεί όταν το ελατήριο βρίσκεται για πρώτη φορά μετά την έναρξη της ταλάντωσης στη θέση φυσικού του μήκους επομένως η παραμόρφωσή του θα είναι ίση με μηδέν.

β) Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ενέργειας ταλάντωσης έχουμε:

$$\frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 + \frac{1}{2} k y_{\max}^2 = \frac{1}{2} k A^2 \quad \text{ή}$$

$$|v| = \sqrt{\frac{k A^2 - k y_{\max}^2}{m_1 + m_2}} \Rightarrow |v| = \sqrt{5} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Το μέγιστο ύψος στο οποίο φτάνει το σώμα Σ_2 μετά το χάσιμο της επαφής υπολογίζεται από τον τύπο (με απόδειξη):

$$h_{\max} = \frac{|v|^2}{2g} \Rightarrow h_{\max} = 0,25 \text{ m}$$

γ) Από τη συνθήκη ισορροπίας για τη νέα ταλάντωση έχουμε:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F'_{\epsilon\lambda} = w_1 \Rightarrow k \cdot \Delta l_2 = m_1 g \Rightarrow$$

$$\Delta l_2 = \frac{m_1 g}{k} \Rightarrow \Delta l_2 = 0,3 \text{ m}$$

Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ενέργειας ταλάντωσης έχουμε:

$$\frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} k \Delta l_2^2 = \frac{1}{2} k A'^2 \quad \text{ή}$$

$$A' = \sqrt{\frac{k \Delta l_2^2 + m_1 v^2}{k}} \Rightarrow A' = 0,2\sqrt{6} \text{ m}$$

δ) Για να μη χάνεται η επαφή μεταξύ των δύο σωμάτων θα πρέπει να ισχύει:

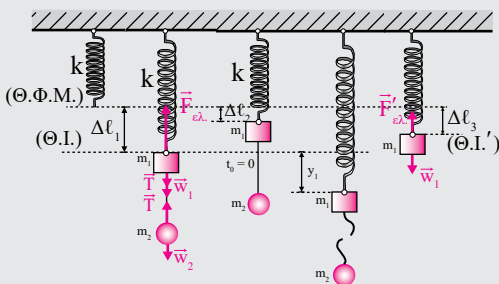
$$N \geq 0 \Rightarrow m_2 g - m_2 \omega^2 y \geq 0 \Rightarrow g - \omega^2 A \geq 0 \Rightarrow$$

$$g - \frac{k}{m_1 + m_2} A \geq 0 \Rightarrow$$

$$k \leq \frac{(m_1 + m_2)g}{A} \Rightarrow k_{\max} = \frac{(m_1 + m_2)g}{A} \Rightarrow$$

$$k_{\max} = \frac{400 \text{ N}}{3 \text{ m}}$$

3.86 α)



Ισχύει:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} \Rightarrow \omega = 5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Η σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης του σώματος Σ_2 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$D_2 = m_2 \omega^2 \Rightarrow D_2 = 100 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Θεωρούμε το σύστημα των δύο σωμάτων σε τυχαία θέση y_1 κάτω από τη θέση ισορροπίας.

Ισχύει:

$$\Sigma F = -D_2 y \Rightarrow -T + m_2 g = -D_2 y \Rightarrow y = \frac{T - m_2 g}{D_2} \quad (1)$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (1) όπου $T = 60 \text{ N}$ βρίσκουμε τη θέση στην οποία κόβεται το νήμα. Προκύπτει:

$$y_1 = 0,2 \text{ m}$$

β) Από τη συνθήκη ισορροπίας στη θέση ισορροπίας του συστήματος των δύο σωμάτων προκύπτει:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{\epsilon\lambda} = w_1 + w_2 \Rightarrow$$

$$k \cdot \Delta l_1 = (m_1 + m_2)g \Rightarrow \Delta l_1 = \frac{(m_1 + m_2)g}{k} \Rightarrow$$

$$\Delta l_1 = 0,4 \text{ m}$$

Το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σύστημα των δύο σωμάτων είναι:

$$A = \Delta l_1 - \Delta l_2 \Rightarrow A = 0,3 \text{ m}$$

Από την εφαρμογή της αρχής διατήρησης της ενέργειας για την ταλάντωση του συστήματος έχουμε:

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_1^2 + \frac{1}{2}ky_1^2 = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{kA^2 - ky_1^2}{m_1 + m_2}} \Rightarrow$$

$$v_1 = 0,5\sqrt{5} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

γ) Ισχύει:

$$U_{\epsilon\lambda} = \frac{1}{2}k(\Delta l_1 + y_1)^2 \Rightarrow U_{\epsilon\lambda} = 36 \text{ J}$$

δ) Από τη συνθήκη ισορροπίας στη θέση ισορροπίας του συστήματος του σώματος Σ_1 προκύπτει:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{\epsilon\lambda} = w_1 \Rightarrow k \cdot \Delta l_3 = m_1 g \Rightarrow$$

$$\Delta l_3 = \frac{m_1 g}{k} \Rightarrow \Delta l_3 = 0,2 \text{ m}$$

Ισχύει:

$$y_2 = \Delta l_1 + y_1 - \Delta l_3 \Rightarrow y_2 = 0,4 \text{ m}$$

Από την εφαρμογή της αρχής διατήρησης της ενέργειας για την νέα ταλάντωση του σώματος Σ_1 έχουμε:

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}ky_2^2 = \frac{1}{2}kA'^2 \Rightarrow$$

$$A' = \sqrt{\frac{m_1 v_1^2 + ky_2^2}{k}} \Rightarrow$$

$$A' = 0,05\sqrt{74} \text{ m}$$

3.87 α) Ισχύει:

$$A = A_0 e^{-\lambda t} \Rightarrow \frac{A_0}{4} = A_0 e^{-2\lambda T} \Rightarrow e^{2\lambda T} = 4 \quad (1)$$

Προκύπτει:

$$\frac{A_N}{A_{N+4}} = \frac{A_0 e^{-\Lambda N T}}{A_0 e^{-\Lambda(N+4)T}} \Rightarrow \frac{A_N}{A_{N+4}} = e^{4\Lambda T} \Rightarrow \frac{A_N}{A_{N+4}} = 16$$

β) Έχουμε:

$$\frac{E_N}{E_{N+1}} = \frac{E_0 e^{-2\Lambda N T}}{E_0 e^{-2\Lambda(N+1)T}} \Rightarrow \frac{E_N}{E_{N+1}} = e^{2\Lambda T} \Rightarrow \frac{E_N}{E_{N+1}} = 4$$

γ) Ισχύει:

$$\Pi(\%) = \frac{E_N - E_{N+1}}{E_N} \cdot 100\% \Rightarrow$$

$$\Pi(\%) = \left(1 - \frac{E_{N+1}}{E_N}\right) \cdot 100\% \Rightarrow$$

$$\Pi(\%) = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot 100\% \Rightarrow \Pi(\%) = 75\%$$

δ) Έχουμε:

$$E_{\alpha\omega\lambda} = E_N - E_{N+3} \Rightarrow$$

$$E_{\alpha\omega\lambda} = E_0 e^{-2\Lambda N T} - E_0 e^{-2\Lambda(N+3)T} \Rightarrow$$

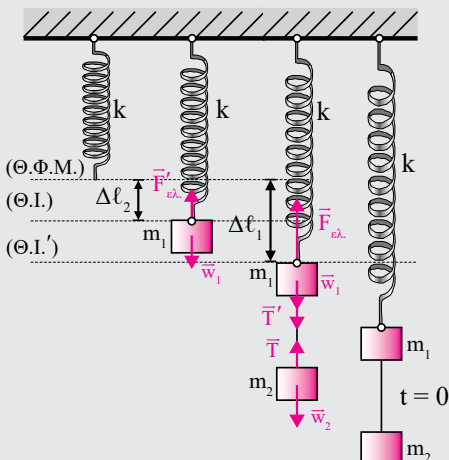
$$E_{\alpha\omega\lambda} = E_0 e^{-2\Lambda N T} - E_0 e^{-2\Lambda(N+3)T} \Rightarrow$$

$$E_{\alpha\omega\lambda} = E_0 \left(e^{-2\Lambda T}\right)^N (1 - e^{-6\Lambda T}) \Rightarrow$$

$$15,75 = 64 \left(\frac{1}{4}\right)^N \frac{63}{64} \Rightarrow N = 1$$

Άρα η απώλεια της ενέργειας είναι ίση με 15,75 J κατά τη διάρκεια της 2^{ης}, 3^{ης} και 4^{ης} περιόδου.

3.88 α)



Ισχύει:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} \Rightarrow \omega = 5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Ισχύει:

$$A = d \Rightarrow A = 0,2\text{m}$$

Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$,

$$x = +0,2\text{m}, v = 0.$$

Από τη σχέση $x = A \eta \mu(\omega t + \varphi_0)$ παίρνουμε:

$$0,2 = 0,2 \eta \mu \varphi_0 \Rightarrow \eta \mu \varphi_0 = 1 \Rightarrow \eta \mu \varphi_0 = \eta \mu \frac{\pi}{2}$$

Από τις ομάδες λύσεων της παραπάνω τριγωνομετρικής εξίσωσης και λαμβάνοντας υπόψη ότι $0 \leq \varphi_0 < 2\pi \text{ rad}$, προκύπτει ότι:

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

Τελικά προκύπτει:

$$\alpha = -\omega^2 A \eta \mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow$$

$$\alpha = -5 \eta \mu \left(5t + \frac{\pi}{2}\right) (\text{S.I.})$$

β) Η σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης του σώματος Σ_2 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$D_2 = m_2 \omega^2 \Rightarrow D_2 = 150 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

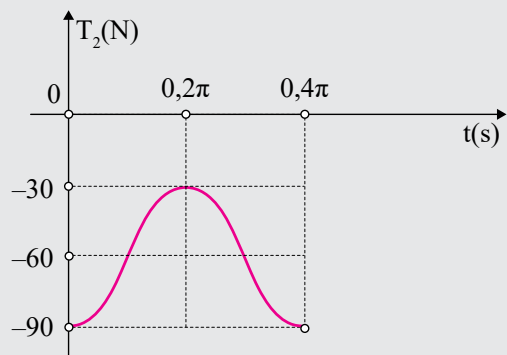
Ισχύει:

$$\Sigma F = -D_2 y \Rightarrow T_2 + m_2 g = -D_2 x \Rightarrow$$

$$T_2 = -m_2 g - D_2 x \Rightarrow$$

$$T_2 = -60 - 30 \cdot \sin 5t (\text{S.I.})$$

Το ζητούμενο διάγραμμα είναι το εξής:



γ) Ισχύει:

$$\Sigma F = -D_2 y \Rightarrow T_2 + m_2 g = -D_2 x \Rightarrow T_2 = -m_2 g - D_2 x$$

Για να μη χαλαρώνει το νήμα θα πρέπει να ισχύει:

$$T_2 \geq 0 \Rightarrow -m_2 g - D_2 \geq 0 \Rightarrow \leq \frac{-g}{\omega^2} \Rightarrow$$

$$X_{\max} = -0,4 \text{ m}$$

Το μείον δηλώνει ότι το νήμα θα χαλαρώσει στα αρνητικά (πάνω αριστερά) άρα

$$A_{\max} = 0,4 \text{ m}$$

δ) Από τη συνθήκη ισορροπίας στη θέση ισορροπίας του συστήματος των δύο σωμάτων προκύπτει:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = w_1 + w_2 \Rightarrow$$

$$k \cdot \Delta l_1 = (m_1 + m_2)g \Rightarrow \Delta l_1 = \frac{(m_1 + m_2)g}{k} \Rightarrow$$

$$\Delta l_1 = 0,4 \text{ m}$$

Από τη συνθήκη ισορροπίας στη θέση ισορροπίας του συστήματος του σώματος Σ_1 προκύπτει:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F'_{\varepsilon\lambda} = w_1 \Rightarrow$$

$$k \cdot \Delta l_2 = m_1 g \Rightarrow \Delta l_2 = \frac{m_1 g}{k} \Rightarrow$$

$$\Delta l_2 = 0,1 \text{ m}$$

Το πλάτος της νέας ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα Σ_1 είναι:

$$A' = \Delta l_1 - \Delta l_2 - A \Rightarrow A' = 0,1 \text{ m}$$

Ισχύει:

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m_1}} \Rightarrow \omega' = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Τελικά προκύπτει:

$$\left| \frac{dv}{dt} \right|_{\max} = |\omega'^2 A| \Rightarrow \left| \frac{dv}{dt} \right|_{\max} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

3.89 α) Επειδή έχουμε συντονισμό ισχύει $\omega = \omega_0 = \omega_\delta$.

Ισχύει:

$$\Delta t = \frac{6T}{2} \Rightarrow T = \frac{2 \cdot \Delta t}{6} \Rightarrow T = 0,2\pi \text{ s}$$

Έχουμε:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Τελικά προκύπτει:

$$k = m \cdot \omega^2 \Rightarrow m = \frac{k}{\omega^2} \Rightarrow m = 4 \text{ kg}$$

β) Έχουμε:

$$v_{\max} = \omega A \Rightarrow v_{\max} = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ισχύει:

$$\Sigma F = m\alpha \Rightarrow F_{\varepsilon\pi} + F_{\alpha\nu\tau} + F_\delta = m\alpha \Rightarrow$$

$$-kx + F_{\alpha\nu\tau} + F_\delta = -m\omega^2 x \Rightarrow$$

$$-kx + F_{\alpha\nu\tau} + F_\delta = -m\omega^2 x \Rightarrow F_{\alpha\nu\tau} = -F_\delta$$

Προκύπτει:

$$F_{\alpha\nu\tau, \max} = F_{\delta, \max} \Rightarrow b v_{\max} = F_{\delta, \max} \Rightarrow$$

$$b = \frac{F_{\delta, \max}}{v_{\max}} \Rightarrow b = 0,5 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

Ισχύει:

$$F_{\alpha\nu\tau} = -F_\delta \Rightarrow -b v = -F_{\delta, \max} \sin \omega t \Rightarrow$$

$$v = \frac{F_{\delta, \max} \sin \omega t}{b} \Rightarrow v = 8 \sin 10 t (\text{S.I.})$$

γ) Υπολογίζουμε την ταχύτητα τη χρονική

στιγμή $t_1 = \frac{\pi}{30} \text{ s}$:

$$v_1 = \left(8 \sin 10 \cdot \frac{\pi}{30} \right) \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_1 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Τελικά ισχύει:

$$\frac{dW_{F_\delta}}{dt} = \frac{dW_{F_{\alpha\nu\tau}}}{dt} \Rightarrow \frac{dW_{F_\delta}}{dt} = b v_1^2 \Rightarrow$$

$$\frac{dW_{F_\delta}}{dt} = 8 \frac{\text{J}}{\text{s}}$$

δ) Έχουμε:

$$F_{\alpha\nu\tau} = -b v_2 \Rightarrow v_2 = -\frac{F_{\alpha\nu\tau}}{b} \Rightarrow v_2 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ισχύει:

$$v_2 = v_{\max} \sin \varphi_0 \Rightarrow 4 = 8 \sin \varphi_0 \Rightarrow$$

$$\sin \varphi_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow \eta \mu \varphi_0 = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Προκύπτει:

$$x = A\eta\mu\varphi_0 \Rightarrow x = \pm 0,4\sqrt{3}m$$

Τελικά καταλήγουμε:

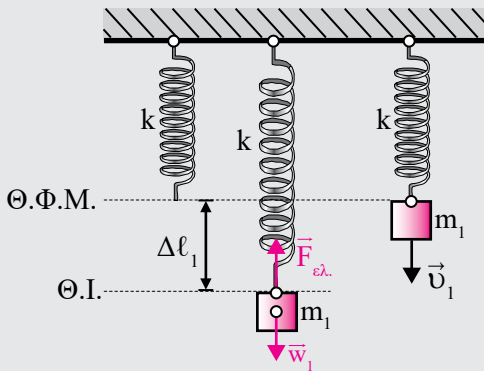
$$|\alpha| = \omega^2 |x| \Rightarrow |\alpha_3| = 40\sqrt{3} \frac{m}{s^2}$$

3.90 α) Για τη θέση ισορροπίας του σώματος m_1 ισχύει:

$$(\Theta.I.): \Sigma \vec{F}_y = 0 \Rightarrow \vec{F}_{ελ.} + \vec{w} = 0 \Rightarrow F_{ελ.} = w_1 \Rightarrow$$

$$k\Delta l_1 = m_1 g (1) \Rightarrow \Delta l_1 = \frac{m_1 g}{k} \Rightarrow$$

$$\Delta l_1 = 0,1m$$



Το σώμα m_1 εκτοξεύεται από τη θέση που το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος με ταχύτητα μέτρου v_1 . Η θέση αυτή αποτελεί τυχαία θέση της ταλάντωσής του.

Εφαρμόζουμε Α.Δ.Ε.Τ. για τη θέση αυτή:

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} k \Delta l_1^2 \Rightarrow$$

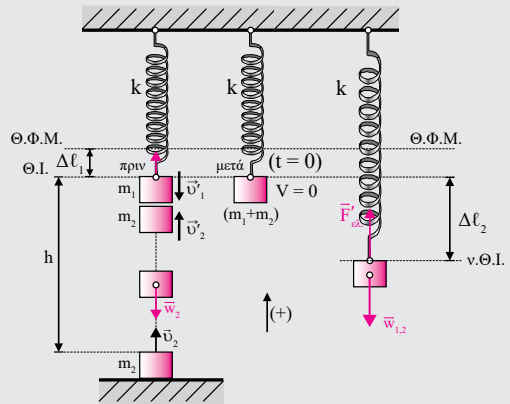
$$A = \sqrt{\frac{m_1 v_1^2 + k \Delta l_1^2}{k}} \Rightarrow$$

$$A = 0,3 m$$

β)

Το σώμα m_1 , τη στιγμή της κρούσης, διέρχεται από τη Θέση Ισορροπίας του για πρώτη φορά μετά την εκτόξευσή του, οπότε για το μέτρο v_1' της ταχύτητάς του πριν την κρούση ισχύει:

$$v_1' = v_{\max} = \omega A.$$



$$\text{Όμως: } k = m_1 \omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m_1}} \Rightarrow \omega = 10 \frac{\text{rad}}{s}$$

$$\text{Οπότε: } v_1' = 3 \frac{m}{s}$$

Το σώμα m_2 εκτελεί κατακόρυφη βολή προς τα πάνω οπότε για τον υπολογισμό του μέτρου της ταχύτητάς του πριν την κρούση εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής του Ενέργειας. Έχουμε:

$$\Theta.M.K.E.: \Delta K = \Sigma W_F \Rightarrow$$

$$K_{\text{τελ.}} - K_{\text{αρχ.}} = W_{w_2} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m_2 v_2'^2 - \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = m_2 g h \Rightarrow$$

$$v_2' = \sqrt{v_2^2 - 2gh} \Rightarrow v_2' = 1 \frac{m}{s}$$

Τα δύο σώματα συγκρούονται κεντρικά και πλαστικά στη θέση ισορροπίας του σώματος m_1 . Για την ταχύτητα που θα αποκτήσει το συσσωμάτωμα μετά την κρούση έχουμε:

$$Α.Δ.Ο.: \vec{p}_{ολ.(\text{πριν})} = \vec{p}_{ολ.(\text{μετά})} \Rightarrow$$

$$m_2 v_2' - m_1 v_1' = (m_1 + m_2) V \Rightarrow V = 0$$

γ) Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα ακινητοποιείται. Αφού η Θέση Ισορροπίας αλλάζει, τότε το σημείο της κρούσης θα αποτελεί την πάνω ακραία θέση της ταλάντωσης που έπειτα θα εκτελέσει το συσσωμάτωμα.

Για τη νέα θέση ισορροπίας του συσσωματώματος $(m_1 + m_2)$ ισχύει:

$$(v.\Theta.I.): \Sigma \vec{F}_y = 0 \Rightarrow \vec{F}'_{ελ} + \vec{w}_{1,2} = 0 \Rightarrow$$

$$F'_{ελ} = w_{1,2} \Rightarrow k(\Delta l_1 + \Delta l_2) = (m_1 + m_2)g \Rightarrow$$

$$\stackrel{(1)}{k\Delta l_1 + k\Delta l_2 = m_1g + m_2g \Rightarrow k\Delta l_2 = m_2g \Rightarrow} \\ \Delta l_2 = 0,3m$$

Για το πλάτος της νέας ταλάντωσης ισχύει όπως φαίνεται από το παραπάνω σχήμα:

$$A' = \Delta l_2 = 0,3m$$

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης της ταλάντωσης που θα εκτελέσει το συσσωμάτωμα είναι:

$$x = A' \eta \mu(\omega' t + \varphi_0)$$

Για τη νέα κυκλική συχνότητα ω' της ταλάντωσης του συσσωματώματος έχουμε:

$$k = (m_1 + m_2)\omega'^2 \Rightarrow \omega' = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} \Rightarrow \\ \omega' = 5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι

$$x = A' \eta \mu(\omega' t + \varphi_0) \stackrel{t=0, x=+A'}{\Rightarrow} +A' = A' \eta \mu \varphi_0 \Rightarrow \\ \eta \mu \varphi_0 = +1 \stackrel{0 \leq \varphi_0 < 2\pi}{\Rightarrow} \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

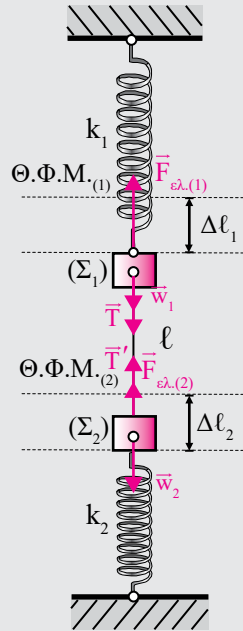
Τελικά παίρνουμε:

$$x = 0,3 \eta \mu \left(5t + \frac{\pi}{2} \right) (\text{S.I.})$$

δ) Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου παίρνει την ελάχιστη τιμή της στη θέση όπου το συσσωμάτωμα απέχει την ελάχιστη απόσταση από τη Θέση Φυσικού Μήκους του ελατηρίου, δηλαδή στην πάνω ακραία θέση της ταλάντωσής του. Ομοίως η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου παίρνει την μέγιστη τιμή της στη θέση όπου το συσσωμάτωμα απέχει την μέγιστη απόσταση από τη Θέση Φυσικού Μήκους του ελατηρίου, δηλαδή στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσής του. Έχουμε:

$$\frac{U_{ελ.(min)}}{U_{ελ.(max)}} = \frac{\frac{1}{2} k \Delta l_1^2}{\frac{1}{2} k (2A' + \Delta l_1)^2} = \frac{\Delta l_1^2}{(2A' + \Delta l_1)^2} \Rightarrow \\ \frac{U_{ελ.(min)}}{U_{ελ.(max)}} = \frac{1}{49}$$

3.91 α) Αρχική κατάσταση ισορροπίας των δύο σωμάτων



Για τη δυναμική ενέργεια $U_{ελ.(2)}$ που είναι αποθηκευμένη στο ελατήριο σταθεράς k_2 έχουμε:

$$U_{ελ.(2)} = \frac{1}{2} k_2 \Delta l_2^2 \Rightarrow k_2 = \frac{2U_{ελ.(2)}}{\Delta l_2^2} \Rightarrow \\ k_2 = 50 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Για τη θέση ισορροπίας του συστήματος των σωμάτων m_1 και m_2 , έχουμε:

$$(\Theta.I.): \Sigma F_y = 0 \Rightarrow \stackrel{T=T_1(v\eta\mu\alpha \alpha\beta\alpha\rho\zeta)}{F_{ελ.(1)} + F_{ελ.(2)} + T_{,,} = w_1 + w_2 + T} \Rightarrow \\ k_1 \Delta l_1 + k_2 \Delta l_2 = m_1 g + m_2 g \Rightarrow \\ m_2 = \frac{k_1 \Delta l_1 + k_2 \Delta l_2}{g} - m_1 \Rightarrow \\ m_2 = 2 \text{ kg}$$

β) Όταν κόψουμε το νήμα καταργούνται οι τάσεις των νημάτων που ασκούνται στα σώματα Σ_1 και Σ_2 . Επειδή $F_{ελ.(1)} > w_1$ το σώμα Σ_1 έπειτα θα κινηθεί προς τα πάνω, ενώ επει-

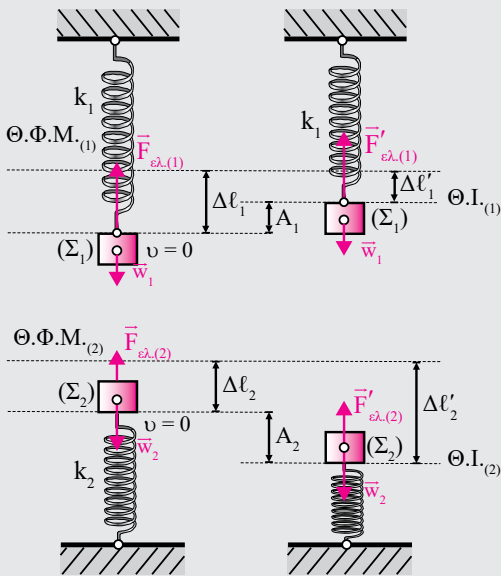
δή $w_2 > F_{ελ.(2)}$ το σώμα Σ_2 έπειτα θα κινηθεί προς τα κάτω. Οι ταχύτητες των 2 σωμάτων Σ_1 και Σ_2 τη στιγμή που κόβουμε το νήμα είναι μηδέν οπότε οι θέσεις της αρχικής του ισορροπίας αποτελούν τις ακραίες θέσεις των ταλαντώσεων που θα εκτελέσουν στη συνέχεια. Για τις θέσεις ισορροπίας των ταλαντώσεων των 2 σωμάτων έχουμε:

$$\Theta.I.(\Sigma_1) : \Sigma F = 0 \Rightarrow$$

$$F'_{ελ.(1)} = w_1 \Rightarrow k_1 \Delta l'_1 = m_1 g \Rightarrow \Delta l'_1 = 0,1 \text{ m}$$

$$\Theta.I.(\Sigma_2) : \Sigma F = 0 \Rightarrow$$

$$F'_{ελ.(2)} = w_2 \Rightarrow k_2 \Delta l'_2 = m_2 g \Rightarrow \Delta l'_2 = 0,4 \text{ m}$$



Εύκολα συμπεραίνουμε, όπως φαίνεται και από το σχήμα, ότι τα πλάτη των ταλαντώσεων των 2 σωμάτων θα είναι:

$$A_1 = \Delta l_1 - \Delta l'_1 \Rightarrow A_1 = 0,1 \text{ m και}$$

$$A_2 = \Delta l'_2 - \Delta l_2 \Rightarrow A_2 = 0,2 \text{ m}$$

γ) Για τις περιόδους των ταλαντώσεων των 2 σωμάτων Σ_1 και Σ_2 έχουμε:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{m_1}{k_1}} = \frac{\pi}{5} \text{ s} = 0,2\pi \text{ s και}$$

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{m_2}{k_2}} = \frac{2\pi}{5} \text{ s} = 0,4\pi \text{ s}$$

Παρατηρούμε ότι ισχύει $T_2 = 2T_1$.

Τα δύο σώματα θα απέχουν την ελάχιστη απόσταση μεταξύ τους όταν ξαναβρεθούν στις θέσεις που βρισκόντουσαν τη χρονική στιγμή $t=0$ που κόψαμε το νήμα, αφού αυτές αποτελούν και τις ακραίες τους θέσεις. Για να συμβεί αυτό, αφού $T_2=2T_1$, θα πρέπει το σώμα Σ_2 να εκτελέσει μια ταλάντωση και το σώμα Σ_1 δύο ταλαντώσεις.

Άρα η χρονική στιγμή t_1 που τα δύο σώματα θα απέχουν την ελάχιστη απόσταση μεταξύ τους είναι $t_1=T_2=2T_1 \Rightarrow t_1 = 0,4\pi \text{ s}$

Για τις αποστάσεις που έχουν διανύσει μέχρι τότε τα 2 σώματα ισχύει:

$$S_1 = 8A_1 \Rightarrow S_1 = 0,8 \text{ m και}$$

$$S_2 = 4A_2 \Rightarrow S_2 = 0,8 \text{ m}$$

δ) Για να εκφράσουμε την κινητική ενέργεια της ταλάντωσης του σώματος Σ_1 συναρτήσει της απομάκρυνσής του από τη θέση ισορροπίας του, χρησιμοποιούμε τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης και έχουμε:

$$E_{ολ.(1)} = K_1 + U_1 \Rightarrow K_1 = E_{ολ.(1)} - U_1 \Rightarrow$$

$$K_1 = \frac{1}{2} k_1 A_1^2 - \frac{1}{2} k_1 x^2 \Rightarrow$$

$$K_1 = 0,5 - 50x^2 \text{ (S.I.)}$$

$$\text{όπου } -0,1 \text{ m} \leq x \leq +0,1 \text{ m}$$

Ομοίως για την κινητική ενέργεια της ταλάντωσης του σώματος Σ_2 συναρτήσει της απομάκρυνσής του από τη θέση ισορροπίας του, έχουμε:

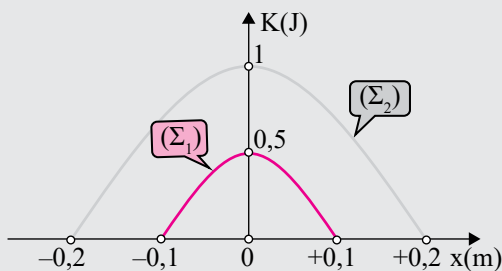
$$E_{ολ.(2)} = K_2 + U_2 \Rightarrow K_2 = E_{ολ.(2)} - U_2 \Rightarrow$$

$$K_2 = \frac{1}{2} k_2 A_2^2 - \frac{1}{2} k_2 x^2 \Rightarrow$$

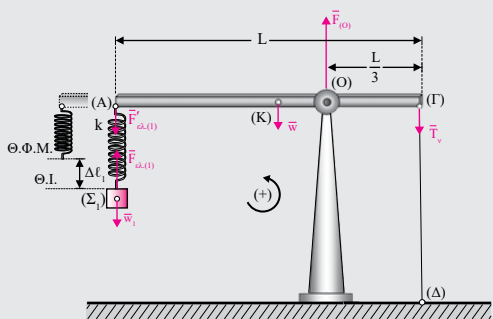
$$K_2 = 1 - 25x^2 \text{ (S.I.)}$$

$$\text{όπου } -0,2 \text{ m} \leq x \leq +0,2 \text{ m}$$

Οι γραφικές παραστάσεις των παραπάνω συναρτήσεων φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



3.92 α)



Στην κατάσταση ισορροπίας του σώματος (Σ_1) , έχουμε:

$$(\Theta.I.): \Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{ελ.(1)} + \vec{w}_1 = 0 \Rightarrow$$

$$F_{ελ.(1)} - w_1 = 0 \Rightarrow F_{ελ.(1)} = w_1 \Rightarrow$$

$$F_{ελ.(1)} = m_1 g \Rightarrow F_{ελ.(1)} = 30 \text{ N}$$

Επειδή το ελατήριο είναι αβαρές έχουμε:

$$F'_{ελ.(1)} = F_{ελ.(1)} = 30 \text{ N}$$

Η ράβδος ισορροπεί οπότε για την συνολική ροπή όλων των δυνάμεων ως προς το σημείο στήριξης (O) ισχύει:

$$\Sigma \vec{\tau}_{(O)} = 0 \Rightarrow \vec{\tau}_{F_{ελ.(1)}} + \vec{\tau}_w + \vec{\tau}_{F_{(O)}} + \vec{\tau}_{T_v} = 0 \Rightarrow$$

$$F'_{ελ.(1)} \cdot \left(L - \frac{L}{3} \right) + Mg \cdot \left(\frac{L}{2} - \frac{L}{3} \right) - T_v \cdot \frac{L}{3} = 0 \Rightarrow$$

$$F'_{ελ.(1)} \cdot \frac{2L}{3} + Mg \cdot \frac{L}{6} - T_v \cdot \frac{L}{3} = 0 \Rightarrow$$

$$T_v = 2F'_{ελ.(1)} + \frac{Mg}{2} \Rightarrow T_v = 120 \text{ N}$$

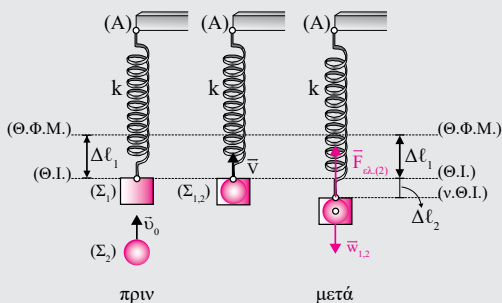
Επίσης, αφού η ράβδος ισορροπεί, για τη συνισταμένη των δυνάμεων έχουμε:

$$\Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{(O)} + \vec{T}_v + \vec{w} + \vec{F}'_{ελ.(1)} = 0 \Rightarrow$$

$$F_{(O)} - T_v - Mg - F'_{ελ.(1)} = 0 \Rightarrow$$

$$F_{(O)} = 270 \text{ N}$$

β)



Επειδή το σύστημα των σωμάτων (Σ_1) και (Σ_2) είναι μονωμένο κατά τη διάρκεια της κρούσης, η ορμή του παραμένει σταθερή.

$$Α.Δ.Ο.: \vec{P}_{ολ.(πριν)} = \vec{P}_{ολ.(μετά)} \Rightarrow$$

$$m_2 v_0 = (m_1 + m_2) V \Rightarrow$$

$$V = \frac{m_2 v_0}{m_1 + m_2} \Rightarrow$$

$$V = 2\sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Από την αρχική κατάσταση ισορροπίας του σώματος (Σ_1) , έχουμε:

$$F_{ελ.(1)} = m_1 g \Rightarrow k \Delta \ell_1 = m_1 g (1) \Rightarrow$$

$$\Delta \ell_1 = \frac{m_1 g}{k} \Rightarrow \Delta \ell_1 = 0,3 \text{ m}$$

Για την νέα θέση ισορροπίας του συστήματος των σωμάτων (Σ_1) και (Σ_2) ισχύει:

$$(v.\Theta.I.): \Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{ελ.(2)} + \vec{w}_{1,2} = 0 \Rightarrow$$

$$F_{ελ.(2)} - w_{1,2} = 0 \Rightarrow F_{ελ.(2)} = w_{1,2} \Rightarrow$$

$$k \cdot (\Delta \ell_1 + \Delta \ell_2) = (m_1 + m_2) g \Rightarrow$$

$$k \Delta \ell_1 + k \Delta \ell_2 = m_1 g + m_2 g \Rightarrow k \Delta \ell_2 = m_2 g \Rightarrow$$

$$\Delta \ell_2 = \frac{m_2 g}{k} \Rightarrow \Delta \ell_2 = 0,1 \text{ m}$$

Εφαρμόζουμε την Αρχή Διατήρησης Ενέργειας της Ταλάντωσης (Α.Δ.Ε.Τ.) για την θέση που γίνεται η κρούση η οποία απέχει από τη νέα θέση ισορροπίας του συστήματος των σωμάτων (Σ_1) και (Σ_2) απόσταση $\Delta l_2 = 0,1\text{m}$. Προκύπτει:

$$E = K + U \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V^2 + \frac{1}{2} k \Delta l_2^2 \Rightarrow$$

$$A = \sqrt{\frac{(m_1 + m_2) V^2 + k \Delta l_2^2}{k}} \Rightarrow$$

$$A = 0,7 \text{ m}$$

γ) Παρατηρούμε ότι για το πλάτος της ταλάντωσης του συσσωματώματος ισχύει:

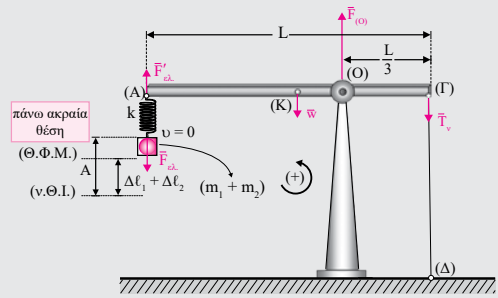
$$A > \Delta l_1 + \Delta l_2$$

Αυτό σημαίνει ότι κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του συσσωματώματος, αυτό κινείται και πάνω από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου. Όσο το συσσωμάτωμα κινείται κάτω από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου (δηλαδή το ελατήριο να είναι επιμηκυμένο), η δύναμη που δέχεται το άκρο (Α) της ράβδου από το ελατήριο έχει φορά προς τα κάτω οπότε τόσο αυτή όσο και το βάρος της ράβδου προκαλούν αντιωρολογιακή ροπή ως προς το σημείο στήριξης (Ο) οπότε το νήμα δεν μπορεί να χαλαρώσει. Όσο όμως το συσσωμάτωμα κινείται πάνω από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου (δηλαδή το ελατήριο να είναι συσπειρωμένο), η δύναμη που δέχεται το άκρο (Α) της ράβδου από το ελατήριο έχει φορά προς τα πάνω και προκαλεί ροπή ωρολογιακή σε αντίθεση με τη ροπή που προκαλεί το βάρος της δοκού (προκαλεί αντιωρολογιακή ροπή) ως προς το σημείο στήριξης (Ο).

Όταν το συσσωμάτωμα κινείται από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου προς την πάνω ακραία θέση, η δύναμη του ελατηρίου αυξάνεται άρα και η ροπή της ως προς το σημείο στήριξης (Ο) οπότε η δύναμη της τάσης μειώνεται αφού μειώνεται και η ροπή της.

Στην πάνω ακραία θέση της ταλάντωσης έχουμε:

$$F_{ελ.} = k \cdot [A - (\Delta l_1 + \Delta l_2)] \Rightarrow F_{ελ.} = 30\text{N}$$



Η ράβδος ισορροπεί οπότε για την συνολική ροπή όλων των δυνάμεων ως προς το σημείο στήριξης (Ο) ισχύει:

$$\Sigma \vec{\tau}_{(O)} = 0 \Rightarrow \vec{\tau}_{F_{ελ.}} + \vec{\tau}_W + \vec{\tau}_{F_{(O)}} + \vec{\tau}_{T_v} = 0 \Rightarrow$$

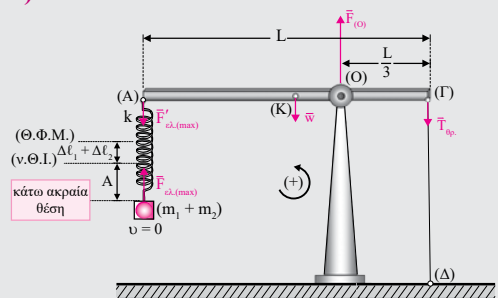
$$-F'_{ελ.} \cdot \left(L - \frac{L}{3} \right) + Mg \cdot \left(\frac{L}{2} - \frac{L}{3} \right) - T_v \cdot \frac{L}{3} = 0 \Rightarrow$$

$$-F'_{ελ.} \cdot \frac{2L}{3} + Mg \cdot \frac{L}{6} - T_v \cdot \frac{L}{3} = 0 \Rightarrow$$

$$T_v = \frac{Mg}{2} - 2F'_{ελ.} \Rightarrow T_v = 0$$

Παρατηρούμε ότι κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του συσσωματώματος, στην πάνω ακραία θέση της ταλάντωσης του, η δύναμη που δέχεται η ράβδος από το νήμα είναι $T_v = 0$, άρα το νήμα οριακά δε χαλαρώνει.

δ)



Όπως είπαμε και στο ερώτημα γ), όταν το συσσωμάτωμα κινείται κάτω από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου (δηλαδή το ελατήριο να είναι επιμηκυμένο), η δύναμη που δέχεται το άκρο (Α) της ράβδου από το ελατήριο έχει φορά προς τα κάτω οπότε τόσο αυτή όσο και το βάρος της ράβδου προκαλούν

αντιωρολογιακή ροπή ως προς το σημείο στήριξης (Ο). Όσο το συσσωμάτωμα πλησιάζει προς την κάτω ακραία θέση της ταλάντωσής του, το μέτρο της δύναμης του ελατηρίου αυξάνεται οπότε για να ισορροπεί η ράβδος θα πρέπει να αυξάνεται και το μέτρο της δύναμης που δέχεται η ράβδος από το νήμα. Στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσης του συσσωματώματος το μέτρο της δύναμης που δέχεται η ράβδος από το νήμα παίρνει την μέγιστη τιμή της. Σύμφωνα με την εκφώνηση, κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του συσσωματώματος το νήμα οριακά δεν σπάει, άρα το όριο θραύσεως του νήματος είναι ίσο με την μέγιστη τιμή της δύναμης που δέχεται η ράβδος από το νήμα (δηλαδή στην κάτω ακραία θέση).

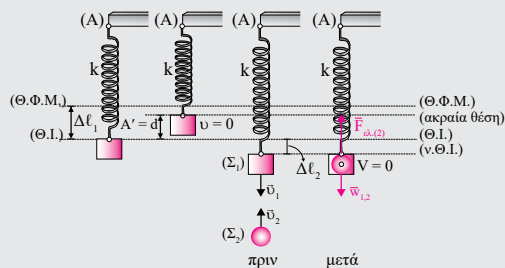
Στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσης έχουμε:

$$F_{ελ.(max)} = k \cdot [A + (\Delta l_1 + \Delta l_2)] \Rightarrow F_{ελ.(max)} = 110 \text{ N}$$

Η ράβδος ισορροπεί οπότε για τη συνολική ροπή όλων των δυνάμεων ως προς το σημείο στήριξης (Ο) ισχύει:

$$\begin{aligned} \Sigma \vec{\tau}_{(O)} = 0 &\Rightarrow \vec{\tau}_{F'_{ελ.(max)}} + \vec{\tau}_w + \vec{\tau}_{F_{(O)}} + \vec{\tau}_{T_{\theta p.}} = 0 \Rightarrow \\ F'_{ελ.(max)} \cdot \left(L - \frac{L}{3} \right) + Mg \cdot \left(\frac{L}{2} - \frac{L}{3} \right) - T_{\theta p.} \cdot \frac{L}{3} &= 0 \Rightarrow \\ + F'_{ελ.(max)} \cdot \frac{2L}{3} + Mg \cdot \frac{L}{6} - T_{\theta p.} \cdot \frac{L}{3} &= 0 \Rightarrow \\ T_{\theta p.} &= \frac{Mg}{2} + 2F'_{ελ.(max)} \Rightarrow \\ T_{\theta p.} &= 280 \text{ N} \end{aligned}$$

ε) Από τη στιγμή που αφήνουμε το σώμα (Σ_1) ελεύθερο από τη θέση που το εκτρέψαμε κατά d , αυτό εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με πλάτος $A' = d = 0,2 \text{ m}$. Για να μην ταλαντωθεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση, θα πρέπει αυτό αμέσως μετά την κρούση να ακινητοποιηθεί και ταυτόχρονα στη θέση αυτή να ισχύει $\Sigma F = 0$ ώστε αυτό να μην ξεκινήσει να κινείται. Για να συμβεί αυτό θα πρέπει η κρούση να συμβεί στη νέα θέση ισορροπίας του συσσωματώματος όπως έχει υπολογιστεί στο β) ερώτημα όπου εκεί ισχύει $\Sigma F = 0$.



Για την ταλάντωση του σώματος (Σ_1) από τη στιγμή που το αφήνουμε ελεύθερο και μέχρι να φτάσει στη νέα θέση ισορροπίας του συσσωματώματος (αυτή απέχει απόσταση $\Delta l_2 = 0,1 \text{ m} < A'$ κάτω από τη θέση ισορροπίας του σώματος (Σ_1)), εφαρμόζουμε τη διατήρηση ενέργειας της ταλάντωσης (Α.Δ.Ε.Τ.) στη θέση αυτή:

$$\begin{aligned} E' = K + U &\Rightarrow \frac{1}{2} k A'^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} k \Delta l_2^2 \Rightarrow \\ v_1 &= \sqrt{\frac{k A'^2 - k \Delta l_2^2}{m_1}} \Rightarrow v_1 = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

Επειδή το σύστημα των σωμάτων (Σ_1) και (Σ_2) είναι μονωμένο κατά τη διάρκεια της κρούσης, η ορμή του παραμένει σταθερή.

$$\text{Α.Δ.Ο.: } \vec{p}_{ολ.(πριν)} = \vec{p}_{ολ.(μετά)} \Rightarrow$$

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = \frac{m_1 v_1}{m_2} \Rightarrow v_2 = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

3.93 α) Αφού αρχικά το σύστημα ισορροπεί, έχουμε:

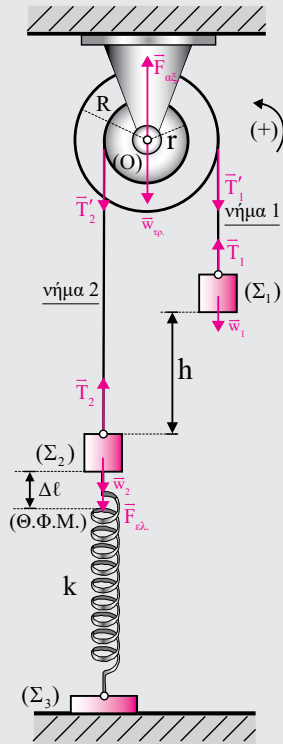
$$(\Sigma_1): \Sigma F_1 = 0 \Rightarrow T_1 = m_1 g \Rightarrow T_1 = 20 \text{ N} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} (\text{Τροχαλία}): \Sigma \tau_{(O)} = 0 &\Rightarrow T_2' r - T_1' R = 0 \Rightarrow \\ T_2' = 2T_1' &\stackrel{T_1=T_1', T_2=T_2'}{\Rightarrow} \stackrel{(1)}{T_2 = 2T_1} \Rightarrow T_2 = 40 \text{ N} \quad (2) \end{aligned}$$

Επειδή $w_2 = m_2 g = 20 \text{ N} < T_2$, το σώμα Σ_2 δέχεται δύναμη από το ελατήριο με φορά προς τα κάτω, άρα το ελατήριο είναι επιμηκνυμένο.

$$(\Sigma_2): \Sigma F_2 = 0 \Rightarrow T_2 = w_2 + F_{ελ.} \Rightarrow$$

$$T_2 = w_2 + K \cdot \Delta l \Rightarrow \Delta l = 0,1 \text{ m}$$



Επίσης η τροχαλία ισορροπεί και μεταφορικά άρα:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow$$

$$F_{αξ.} = T'_1 + T'_2 + w_{τρ.} = T'_1 + T'_2 + Mg \Rightarrow$$

$$F_{αξ.} = 120 \text{ N}$$

β) Όταν κόψουμε το νήμα 2 η T_2 καταργείται, άρα, λόγω του βάρους του σώματος Σ_2 και της δύναμης του ελατηρίου το Σ_2 θα κινηθεί προς τα κάτω. Επειδή τη στιγμή $t=0$ η ταχύτητα του σώματος είναι $v=0$, προκύπτει ότι βρίσκεται στην πάνω ακραία θέση. Υπολογίζουμε τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης.

$$\Theta.Ι. \Sigma F = 0 \Rightarrow F'_{ελ.} = w_2 \Rightarrow K \cdot \Delta l' = m_2 g \Rightarrow$$

$$\Delta l' = 0,1 \text{ m}$$

Έτσι για το πλάτος της ταλάντωσης του Σ_2 έχουμε:

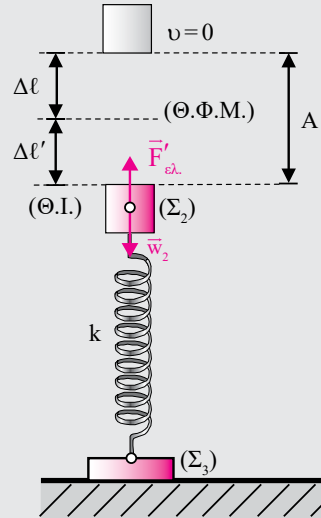
$$A = \Delta l + \Delta l' \Rightarrow A = 0,2 \text{ m}$$

$$K = m_2 \omega^2 \Rightarrow \omega = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Για την αρχική φάση της ταλάντωσης ισχύει:

$$x = A \eta \mu(\omega t + \phi_0) \xrightarrow{t=0, x=+A} A = A \eta \mu \phi_0 \Rightarrow$$

$$\eta \mu \phi_0 = 1 \xrightarrow{0 \leq \phi_0 < 2\pi} \phi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$



Άρα η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης είναι:

$$x = 0,2 \eta \mu \left(10t + \frac{\pi}{2} \right) (\text{S.I.})$$

γ) Σε τυχαία θέση της ταλάντωσης πάνω από τη Θ.Φ.Μ. που απέχει από τη Θ.Ι. απομάκρυνση x , έχουμε για την ταλάντωση του Σ_2 :

$$\Sigma F = -K \cdot x \Rightarrow -F'_{ελ.(2)} - w_2 = -K \cdot x \Rightarrow$$

$$F'_{ελ.(2)} = K \cdot x - m_2 g \Rightarrow$$

$$F'_{ελ.(2)} = 200x - 20 (\text{S.I.})$$

Το σώμα Σ_3 ισορροπεί άρα:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow N + F'_{ελ.(2)} = w_3 \Rightarrow$$

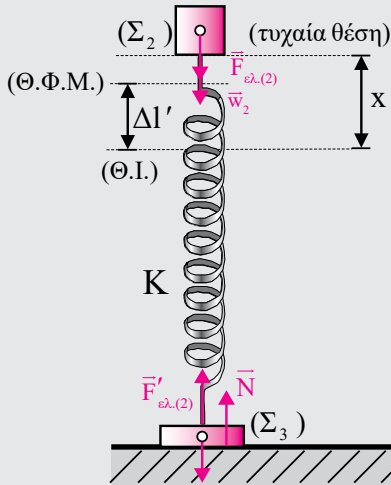
$$N = m_3 g - F'_{ελ.(2)} \xrightarrow{F'_{ελ.(2)} = F'_{ελ.(2)}} \Rightarrow$$

$$N = 50 - 200x (\text{S.I.})$$

$$\text{όπου } -0,2 \leq x \leq +0,2$$

Την ελάχιστη δύναμη από το έδαφος το σώμα Σ_3 την δέχεται όταν το σώμα Σ_2 βρίσκεται στην πάνω ακραία θέση.

$$N_{\min} = 50 - 200 \cdot 0,2 \Rightarrow N_{\min} = 10 \text{ N} \neq 0$$



Οπότε δε χάνεται η επαφή του σώματος Σ_3 με το έδαφος κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του σώματος Σ_2 .

δ) Τη χρονική στιγμή που η δύναμη που δέχεται το σώμα Σ_3 από το έδαφος ισούται με το βάρος του για πρώτη φορά μετά το κόψιμο του νήματος 2, η δύναμη του ελατηρίου μηδενίζεται για πρώτη φορά. Αυτό συμβαίνει όταν το σώμα Σ_2 διέρχεται από τη θέση που το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος, κινούμενο προς τα αρνητικά.

Για τον υπολογισμό του ρυθμού μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ_2 έχουμε:

$$\frac{\Delta K}{\Delta t} = \Sigma F \cdot v = -K \cdot x \cdot v$$

$$\text{όπου } x = \Delta l' = 0,1 \text{ m}$$

Επειδή η ενέργεια στην ταλάντωση διατηρείται έχουμε:

$$E_{\text{ολ.}} = K + U \Rightarrow \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} m_2 v^2 + \frac{1}{2} k \Delta l'^2 \Rightarrow$$

$$200 \cdot 0,2^2 = 2v^2 + 200 \cdot 0,1^2 \Rightarrow v = \pm \sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

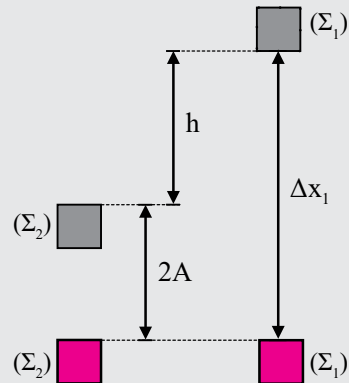
Όμως θέλουμε $v < 0$ άρα $v = -\sqrt{3} \text{ m/s}$

Οπότε:

$$\frac{\Delta K}{\Delta t} = \Sigma F \cdot v = -k \cdot x \cdot v = -200 \cdot 0,1 \cdot (-\sqrt{3}) \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta K}{\Delta t} = 20\sqrt{3} \text{ J/s}$$

ε) Η περίοδος ταλάντωσης του σώματος Σ_2 είναι $T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = 0,2\pi \text{ s}$.



Το σώμα Σ_2 ακινητοποιείται στιγμιαία για πρώτη φορά όταν θα βρίσκεται στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσής του και θα έχει περάσει χρόνος $\Delta t = \frac{T}{2} \Rightarrow \Delta t = 0,1\pi \text{ s}$ μετά το κόψιμο του νήματος.

Στο χρόνο αυτό το σώμα Σ_2 έχει μετατοπιστεί κατά $2A$ από την αρχική του θέση ενώ το σώμα Σ_1 θα έχει μετατοπιστεί κατά:

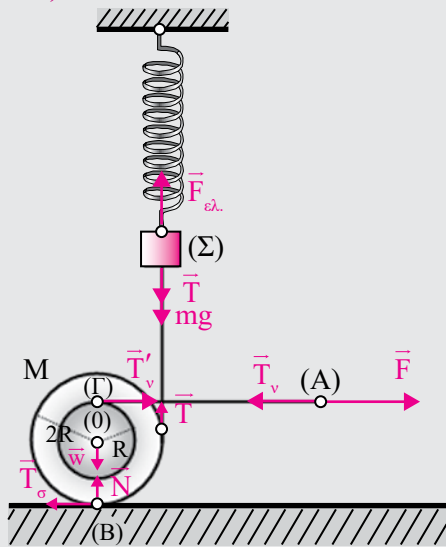
$$\Delta x_1 = \frac{1}{2} g \cdot \Delta t^2 \Rightarrow \Delta x_1 = \frac{1}{2} 10 \cdot (0,1\pi)^2 \Rightarrow$$

$$\Delta x_1 = 0,5 \text{ m}$$

Για την αρχική απόσταση h που απείχαν τα δύο σώματα Σ_1 και Σ_2 τη στιγμή που κόπηκε το νήμα 2 ισχύει:

$$h = \Delta x_1 - 2A \Rightarrow h = 0,1 \text{ m}$$

3.94 α)



Από την ισορροπία του σώματος Σ έχουμε:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{el} - mg - T = 0 \Rightarrow$$

$$k \cdot \Delta l - mg - T = 0 \Rightarrow$$

$$T = k \cdot \Delta l - mg \Rightarrow T = 30 \text{ N}$$

Από την ισορροπία του δίσκου έχουμε:

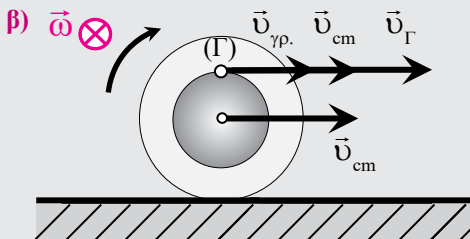
$$\Sigma \tau_B = 0 \Rightarrow \tau_T - \tau_F = 0 \Rightarrow \tau_T = \tau_F \Rightarrow$$

$$T \cdot 2R = F \cdot 3R \Rightarrow F = \frac{2}{3} T \Rightarrow F = 20 \text{ N}$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F - T_{\sigma} = 0 \Rightarrow T_{\sigma} = F = 20 \text{ N}$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow Mg = T + N \Rightarrow N = Mg - T = 20 \text{ N}$$

$$A = \sqrt{N^2 + T_{\sigma}^2} \Rightarrow A = 20\sqrt{2} \text{ N}$$



i. Για την κίνηση του δίσκου έχουμε:

$$\omega = \alpha_{\gamma} t (1)$$

Για το μήκος του νήματος που ξετυλίγεται ισχύει:

$$\ell = R\theta \Rightarrow \ell = R \frac{1}{2} \alpha_{\gamma} t^2 \Rightarrow \ell = \frac{1}{2} R \alpha_{\gamma} \left(\frac{\omega}{\alpha_{\gamma}} \right)^2 \Rightarrow$$

$$\ell = \frac{R\omega^2}{2\alpha_{\gamma}} \Rightarrow \alpha_{\gamma} = \frac{R\omega^2}{2\ell} \Rightarrow$$

$$\alpha_{\gamma} = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

ii. Η ταχύτητα στο σημείο Γ είναι η συνισταμένη δυο ταχυτήτων:

 Της $\vec{v}_{\gamma p}$ λόγω της στροφικής κίνησης και της $\vec{v}_{cm}$ λόγω της μεταφορικής κίνησης.

 Επειδή $\vec{v}_{\gamma p}$ και $\vec{v}_{cm}$ είναι ομόρροπες, για το μέτρο της ταχύτητας στο Γ ισχύει:

$$v_{\Gamma} = v_{cm} + v_{\gamma p} = 2R\omega + R\omega = 3R\omega \Rightarrow$$

$$v_{\Gamma} = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

 γ) Αν ο δίσκος έκανε μόνο στροφική κίνηση θα είχε μετατοπιστεί προς τα δεξιά όσο το μήκος του νήματος που ξετυλίγεται ℓ .

Αν ο δίσκος έκανε μόνο μεταφορική κίνηση θα είχε μετατοπιστεί προς τα δεξιά όσο το κέντρο μάζας του κυλίνδρου.

Τώρα που εκτελεί ταυτόχρονα τις δυο κινήσεις θα ισχύει:

$$x_A = x_{cm} + \ell (2)$$

Όμως:

$$\left. \begin{aligned} \ell &= R\theta \\ x_{cm} &= 2R\theta \end{aligned} \right\} \Rightarrow x_{cm} = 2\ell \Rightarrow \ell = \frac{x_{cm}}{2} = 3,5 \text{ m} (3)$$

$$(2) \stackrel{(3)}{\Rightarrow} x_A = 3\ell \Rightarrow x_A = 10,5 \text{ m}$$

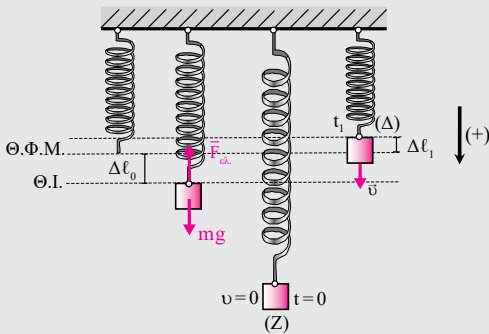
δ) Μετά το κόψιμο του νήματος το σώμα Σ κάνει α.α.τ. με πλάτος:

$$A = \Delta \ell - \Delta \ell_0 (4)$$

Στη Θ.Ι. του Σ ισχύει:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{el} - mg = 0 \Rightarrow K \cdot \Delta \ell_0 = mg \Rightarrow$$

$$\Delta \ell_0 = \frac{mg}{K} \Rightarrow \Delta \ell_0 = 0,1 \text{ m}$$



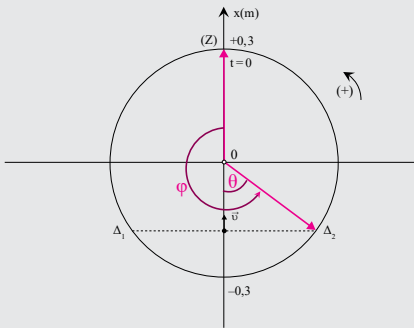
Από τη σχέση (4) έχουμε:

$$A = 0,4\text{m} - 0,1\text{m} \Rightarrow A = 0,3\text{m}$$

Τη στιγμή που το ελατήριο είναι συμπιεσμένο κατά $0,05\text{m}$, το σώμα βρίσκεται στο σημείο Δ με απομάκρυνση:

$$x_\Delta = -0,1 - 0,05 = -0,15\text{m}$$

Τη δεύτερη φορά η ταχύτητά του είναι θετική. Αφού η μια θέση δεν είναι χαρακτηριστική θα βρούμε τον χρόνο με περιστρεφόμενο διάνυσμα (π.δ.)



Θεωρούμε ένα διάνυσμα μήκους A του οποίου η αρχή βρίσκεται ακίνητη στην αρχή O ενός ορθοκανονικού συστήματος αξόνων. Το διάνυσμα στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω κατά τη θετική φορά και η προβολή του τέλους του στον κατακόρυφο άξονα, δίνει κάθε φορά την απομάκρυνση του κινητού από την $\Theta.Ι.Ι.$ του. Την στιγμή $t=0$ το σώμα βρίσκεται στη θέση $K(x_K=+A=+0,3\text{m})$. Εκεί βρίσκεται και το π.δ.. Την στιγμή που το σώμα βρίσκεται στο σημείο $\Delta(x_\Delta=-0,15\text{m})$ για δεύτερη φορά το π.δ. βρίσκεται στην θέση Δ_2 , έχοντας διαγράψει γωνία φ .

Από το σχήμα $\varphi = \pi + \theta$ και:

$$\sin\theta = \frac{(O\Delta_2)}{(O\Delta)} = \frac{0,15}{0,3} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}\text{rad}$$

Άρα:

$$\varphi = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}\text{rad}$$

Όμως:

$$\varphi = \omega t \Rightarrow t = \frac{\varphi}{\omega} = \frac{\frac{4\pi}{3}}{\frac{1}{10}} \Rightarrow t = \frac{2\pi}{15}\text{s}$$

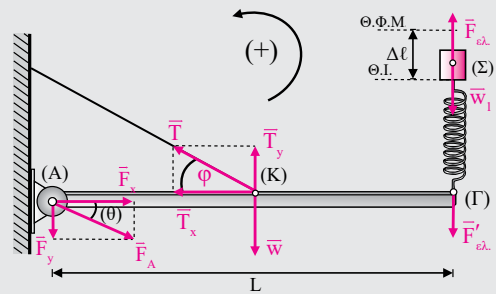
Για τον υπολογισμό της ταχύτητας κάνουμε ΑΔΕΤ στο Δ.

$$K + U = E \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx_\Delta^2 = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow$$

$$v^2 = \frac{k}{m}(A^2 - x_\Delta^2) \Rightarrow v = \sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x_\Delta^2)} \Rightarrow$$

$$v = 2,6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

3.95



α) Το σώμα Σ ισορροπεί στη θέση ισορροπίας του άρα

$$\Theta.Ι.Ι.: \Sigma F = 0 \Rightarrow F_{el.} = w_1 \Rightarrow F_{el.} = mg \quad (1)$$

Επειδή το ελατήριο είναι αβαρές οι δυνάμεις στα δύο του άκρα έχουν ίσα μέτρα άρα:

$$F_{el.} = F'_{el.} = mg \quad (1)$$

Αφού η ράβδος ισορροπεί, πρέπει η συνισταμένη των ροπών για τη ράβδο ως προς οποιοδήποτε σημείο της να είναι μηδέν, οπότε:

$$\Sigma \tau_{(A)} = 0 \Rightarrow T_y \frac{L}{2} - Mg \frac{L}{2} - F'_{ελ.} L = 0 \Rightarrow$$

$$T \eta \mu 30^\circ \frac{1}{2} - Mg \frac{1}{2} - mg = 0 \Rightarrow m = 1 \text{ kg}$$

β) Από την ισορροπία των δυνάμεων για τη ράβδο στους δύο άξονες έχουμε:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_x = T_x \Rightarrow F_x = T \sigma \nu 30^\circ \Rightarrow F_x = 40\sqrt{3} \text{ N}$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T_y = F_y + Mg + F'_{ελ.} \Rightarrow$$

$$T \eta \mu 30^\circ = F_y + Mg + mg \Rightarrow F_y = 10 \text{ N}$$

Το μέτρο της δύναμης που δέχεται η ράβδος από την άρθρωση στο σημείο Α είναι:

$$F_A = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \Rightarrow F_A = 70 \text{ N}$$

Για την εφαπτομένη της γωνίας θ που σχηματίζει ο φορέας αυτής με τη διεύθυνση της ράβδου έχουμε:

$$\epsilon \varphi \theta = \frac{F_y}{F_x} \Rightarrow \epsilon \varphi \theta = \frac{\sqrt{3}}{12}$$

γ) $K = m\omega^2 \Rightarrow \omega = 10 \text{ rad/s}$

Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα Σ βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του η ταχύτητα v_0 θα αποτελεί τη μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσης που θα εκτελέσει. Ισχύει:

$$v_0 = \omega A \Rightarrow A = \frac{v_0}{\omega} \Rightarrow A = 0,1 \text{ m}$$

Η χρονική εξίσωση της δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσης του σώματος Σ είναι (για την αρχική φάση της ταλάντωσης έχουμε $\varphi_0 = 0$):

$$U = E \eta \mu^2 (\omega t + \varphi_0) \Rightarrow$$

$$U = \frac{1}{2} K A^2 \eta \mu^2 (\omega t + \varphi_0) \Rightarrow$$

$$U = 0,5 \eta \mu^2 10 t \text{ (S.I.)}$$

δ) Σε τυχαία θέση της ταλάντωσης του σώματος Σ με $x > 0$ έχουμε:

$$\Sigma F = -kx \Rightarrow mg - F_{ελ.} = -kx \Rightarrow$$

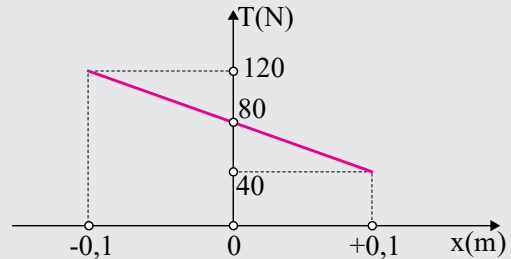
$$F_{ελ.} = 10 + 100x \text{ (S.I.)}$$

Η ράβδος εξακολουθεί να ισορροπεί κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του σώματος Σ οπότε:

$$\Sigma \tau_{(A)} = 0 \Rightarrow T_y \frac{L}{2} - Mg \frac{L}{2} - F'_{ελ.} L = 0 \Rightarrow$$

$$T \eta \mu 30^\circ \frac{1}{2} - Mg \frac{1}{2} - F_{ελ.} = 0 \Rightarrow$$

$$T = 80 - 400x \text{ (S.I.) με } -0,1 \text{ m} \leq x \leq +0,1 \text{ m}$$



ε) Για να μη χαλαρώνει το νήμα πρέπει $T \geq 0 \Rightarrow 80 - 400x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0,2 \text{ m}$

Οπότε $x_{\max} = 0,2 \text{ m}$.

Έτσι για τη μέγιστη ταχύτητα με την οποία πρέπει να εκτοξεύσουμε το σώμα Σ έτσι ώστε το νήμα που είναι δεμένο στη ράβδο οριακά να μην χαλαρώνει είναι:

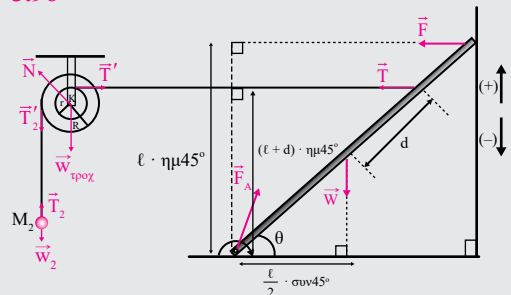
$$v_{0(\max)} = \omega x_{\max} \Rightarrow v_{0(\max)} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Η ράβδος δέχεται τη μέγιστη δύναμη από το νήμα όταν το σώμα Σ βρίσκεται στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσης του. Επειδή αυτό οριακά δεν σπάει, αυτή η τιμή θα είναι και το όριο θραύσεώς του.

$$T_{\theta p.} = T_{(+A)} = 80 + 400 \cdot (+0,2) \Rightarrow$$

$$T_{\theta p.} = 160 \text{ N}$$

3.96



α) Το όλο σύστημα ισορροπεί, άρα για το σώμα μάζας m_2 ισχύει:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow T_2 = w_2 = m_2 g \Rightarrow T_2 = 30 \text{ N}$$

Από τον 3ο Νόμο Νεύτωνα και αφού το νήμα είναι αβαρές ισχύει $|T_2| = |T'_2| = 30 \text{ N}$

Τροχαλία:

$$\Sigma \vec{\tau}_{(K)} = 0 \Rightarrow T'_2 R - T' r = 0 \Rightarrow$$

$$T'_2 \cdot 2r = T' \cdot r \Rightarrow T' = 60 \text{ N}$$

Από τον 3ο Νόμο του Νεύτωνα και αφού το νήμα είναι αβαρές ισχύει $|T'| = |T| = 60 \text{ N}$

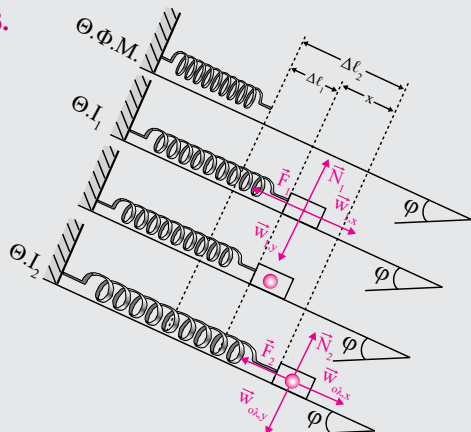
Ράβδος:

$$\Sigma \vec{\tau}_{(A)} = 0 \Rightarrow \vec{\tau}_w + \vec{\tau}_T + \vec{\tau}_F = 0 \Rightarrow$$

$$-w \frac{1}{2} \sin 45^\circ + T \left(\frac{1}{2} + d \right) \eta \mu 45^\circ + F \eta \mu 45^\circ = 0 \Rightarrow$$

$$F = 10 \text{ N}$$

β.



$$\Theta.Ι.1: \Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_1 = w_{1x} \Rightarrow$$

$$k \Delta l_1 = m_1 g \eta \mu 30^\circ \Rightarrow \Delta l_1 = \frac{1}{20} \text{ m}$$

$$\Theta.Ι.2: \Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_2 = w_{2x} \Rightarrow$$

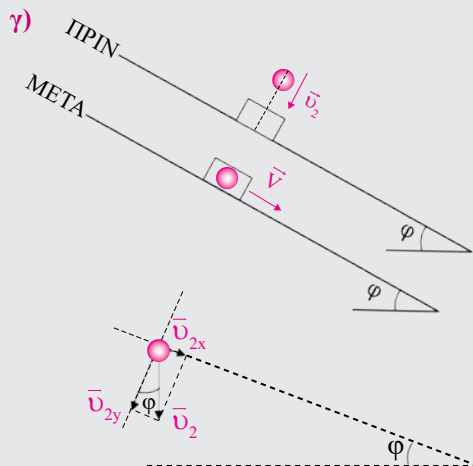
$$k \Delta l_2 = (m_1 + m_2) g \eta \mu 30^\circ \Rightarrow \Delta l_2 = \frac{4}{20} \text{ m}$$

$$x = \Delta l_2 - \Delta l_1 \Rightarrow x = \frac{3}{20} \text{ m}$$

$$E = K + U \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V^2 + \frac{1}{2} k x^2 \Rightarrow$$

$$A = \sqrt{\frac{(m_1 + m_2) V^2}{k} + x^2} \Rightarrow A = 0,3 \text{ m}$$



$$v_{2x} = v_2 \eta \mu \phi$$

Εφαρμόζουμε Αρχή Διατήρησης της ορμής (ΑΔΟ) στον x x άξονα:

$$\vec{p}_{\text{ολ. (πριν)}} = \vec{p}_{\text{ολ. (μετά)}} \Rightarrow$$

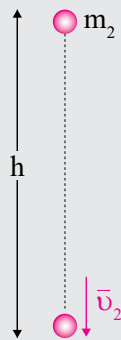
$$m_2 v_{2x} = (m_1 + m_2) V \Rightarrow v_{2x} = \sqrt{3} \frac{m}{s}$$

$$v_{2x} = v_2 \eta \mu \phi \Rightarrow v_2 = 2\sqrt{3} \frac{m}{s}$$

Από τις εξισώσεις της ελεύθερης πτώσης ισχύει ότι:

$$v_2 = gt \Rightarrow t = \frac{2\sqrt{3}}{10} \text{ s}$$

$$h = \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow h = 0,6 \text{ m}$$



2ος τρόπος

Η παραπάνω κίνηση μπορεί να μελετηθεί είτε με το Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας (ΘΜΚΕ) είτε με την Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας (ΑΔΜΕ).

δ) Ο λόγος του μέτρου της δύναμης του ελατηρίου προς το μέτρο της δύναμης επαναφοράς στη θέση της μέγιστης επιμήκυνσης του ελατηρίου είναι:

$$\frac{F_{\text{ελmax}}}{F_{\text{επmax}}} = \frac{k(\Delta l_2 + A)}{kA} = \frac{5}{3}$$

Κεφάλαιο 4: Κύματα

ΘΕΜΑ Α

- 4.1 γ) 4.2 γ) 4.3 β) 4.4 γ)
 4.5 δ) 4.6 γ) 4.7 δ) 4.8 α)
 4.9 γ) 4.10 α) 4.11 γ) 4.12 α)
 4.13 α) 4.14 α) 4.15 α) 4.16 δ)
 4.17 δ) 4.18 δ) 4.19 β) 4.20 α)
 4.21 δ) 4.22 γ) 4.23 β) 4.24 γ)
 4.25 β) 4.26 β) 4.27 γ) 4.28 δ)
 4.29 γ) 4.30 δ) 4.31 γ) 4.32 γ)
 4.33 γ)

- 4.34 α) Σ, β) Σ, γ) Σ, δ) Σ, ε) Λ
 4.35 α) Λ, β) Λ, γ) Σ, δ) Λ, ε) Σ
 4.36 α) Σ, β) Λ, γ) Λ, δ) Σ, ε) Λ
 4.37 α) Λ, β) Λ, γ) Λ, δ) Λ, ε) Σ
 4.38 α) Σ, β) Λ, γ) Σ, δ) Λ, ε) Σ
 4.39 α) Σ, β) Σ, γ) Σ, δ) Λ, ε) Λ
 4.40 α) Σ, β) Λ, γ) Σ, δ) Σ, ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

4.41 Σωστή απάντηση είναι η α).

Για την ταχύτητα διάδοσης του αρμονικού κύματος ισχύει:

$$v_{\delta} = \lambda \cdot f \quad (1)$$

Για την μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης ενός σημείου του ελαστικού μέσου ισχύει:

$$v_{\max} = \omega \cdot A \quad (2)$$

Διαιρούμε τις σχέσεις (1) και (2) κατά μέλη οπότε, παίρνουμε:

$$\frac{v_{\delta}}{v_{\max}} = \frac{\lambda \cdot f}{\omega \cdot A} \stackrel{\omega=2\pi f}{=} \frac{\lambda \cdot f}{2\pi f \cdot A} = \frac{\lambda}{2\pi \cdot A} \stackrel{\lambda=4A}{=} \frac{4A}{2\pi \cdot A} \Rightarrow \frac{v_{\delta}}{v_{\max}} = \frac{2}{\pi}$$

4.42 Σωστή απάντηση είναι η α).

Ισχύει:

$$\varphi = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

Από το διάγραμμα έχουμε για $x = 0$, $\varphi = 4\pi \text{ rad}$.

Ισχύει:

$$4\pi = 2\pi \left(\frac{t_1}{T} - 0 \right) \Rightarrow t_1 = 2T$$

Επίσης, έχουμε για $x = 4 \text{ m}$, $\varphi = 0$. Προκύπτει:

$$0 = 2\pi \left(\frac{2T}{T} - \frac{4}{\lambda} \right) \Rightarrow \lambda = 2 \text{ m}$$

Έχουμε:

$$\Delta x = k\lambda \Rightarrow x_{\Sigma} - 0 = \lambda \Rightarrow x_{\Sigma} = 2 \text{ m}$$

Για την απομάκρυνση του Σ, τη χρονική στιγμή t_1 , τελικά έχουμε:

$$y_{\Sigma} = A \sin 2\pi \left(\frac{t_1}{T} - \frac{x_{\Sigma}}{\lambda} \right) \Rightarrow$$

$$y_{\Sigma} = A \sin 2\pi \left(\frac{2T}{T} - \frac{2}{2} \right) \Rightarrow y_{\Sigma} = 0$$

4.43 Σωστή απάντηση είναι η α).

Ισχύει:

$$y_K = 0,4 \sin(2\pi t - 16\pi) \Rightarrow$$

$$y_K = 0,4 \sin 2\pi(t - 8) \text{ (S.I.)}$$

Συγκρίνοντας με τη γενική εξίσωση του κύματος

$$y = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right), \text{ προκύπτει:}$$

$$\frac{t}{T} = t \Rightarrow T = 1 \text{ s}$$

Για το μήκος κύματος λ έχουμε:

$$\lambda = v_{\delta} T \Rightarrow \lambda = 0,5 \text{ m}$$

Προκύπτει:

$$\frac{x_K}{\lambda} = 8 \Rightarrow x_K = 4 \text{ m}$$

Τελικά έχουμε:

$$x_{\Sigma} < (2\kappa + 1) \frac{\lambda}{2} < x_K \Rightarrow$$

$$2 < (2\kappa + 1) \cdot 0,25 < 4 \Rightarrow 3,5 < \kappa < 7,5$$

Επομένως $\kappa = 4, 5, 6, 7$ και άρα, υπάρχουν 4 σημεία που είναι σε αντίθεση φάσης με την πηγή.

4.44 Σωστή απάντηση είναι η γ).

Ισχύει:

$$\varphi = 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right) \Rightarrow \varphi_{t_1} = 2\pi \left(\frac{0,5}{T} + \frac{x}{\lambda} \right)$$

Από το διάγραμμα έχουμε για $x = 0$, $\varphi_{t_1} = 4\pi \text{ rad}$. Ισχύει:

$$4\pi = 2\pi \frac{0,5}{T} \Rightarrow T = 0,25 \text{ s}$$

Επίσης, έχουμε για $x = -8 \text{ m}$, $\varphi_{t_1} = 0$. Προκύπτει:

$$0 = 2\pi \left(\frac{0,5}{0,25} - \frac{8}{\lambda} \right) \Rightarrow \lambda = 4 \text{ m}$$

Επομένως, η φάση του κύματος θα είναι:

$$\varphi = 2\pi \left(\frac{t}{0,25} + \frac{x}{4} \right) (\text{S.I.})$$

Η φάση του σημείου Κ τη χρονική στιγμή t_1 θα είναι:

$$\varphi_K = 2\pi \left(\frac{0,5}{0,25} + \frac{2}{4} \right) \Rightarrow \varphi_K = 5\pi \text{ rad}$$

4.45 Σωστή απάντηση είναι η α).

Ισχύει:

$$\varphi = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \Rightarrow \varphi_{t_1} = 2\pi \left(\frac{4}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) (1)$$

Θέτοντας στη σχέση (1) όπου $x = 0$ και $\varphi_{t_1} = 8\pi \text{ rad}$, έχουμε:

$$8\pi = \frac{8\pi}{T} \Rightarrow T = 1 \text{ s}$$

Θέτοντας στη σχέση (1) όπου $x = 0,5 \text{ m}$ και $\varphi_{t_1} = 3\pi \text{ rad}$, έχουμε:

$$3\pi = 2\pi \left(\frac{4}{1} - \frac{0,5}{\lambda} \right) \Rightarrow \lambda = 0,2 \text{ m}$$

Ο ζητούμενος λόγος είναι:

$$\frac{v_{\max}}{v_{\delta}} = \frac{\omega A}{\lambda f} \Rightarrow \frac{v_{\max}}{v_{\delta}} = \frac{\frac{2\pi}{T} A}{\lambda \frac{1}{T}}$$

$$\frac{v_{\max}}{v_{\delta}} = \frac{2\pi \cdot 0,4}{0,2} \Rightarrow \frac{v_{\max}}{v_{\delta}} = 4\pi$$

4.46 Σωστή απάντηση είναι η α).

Για τη φάση του Σ έχουμε:

$$\varphi_{\Sigma} = (10 \cdot 2\pi) \text{ rad} \Rightarrow \varphi_{\Sigma} = 20\pi \text{ rad}$$

Για τη φάση του Λ έχουμε:

$$\varphi_{\Lambda} = (5 \cdot 2\pi) \text{ rad} \Rightarrow \varphi_{\Lambda} = 10\pi \text{ rad}$$

Προκύπτει:

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{\Delta x}{\lambda} \Rightarrow \varphi_{\Sigma} - \varphi_{\Lambda} = 2\pi \frac{(x_{\Lambda} - x_{\Sigma})}{\lambda} \Rightarrow$$

$$x_{\Lambda} = x_{\Sigma} + \frac{\lambda(\varphi_{\Sigma} - \varphi_{\Lambda})}{2\pi} \Rightarrow$$

$$x_{\Lambda} = 3\lambda + \frac{\lambda(20\pi - 10\pi)}{2\pi} \Rightarrow x_{\Lambda} = 8\lambda$$

4.47 Σωστή απάντηση είναι η γ).

Ισχύει:

$$\varphi_{\Sigma} = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_{\Sigma}}{\lambda} \right) \Rightarrow \varphi_{\Sigma} = 2\pi \frac{t}{T} - \frac{4\pi}{\lambda} (1)$$

Θέτοντας στη σχέση (1) όπου $t = 0$ και $\varphi_{\Sigma} = -2\pi \text{ rad}$, έχουμε:

$$-2\pi = -\frac{4\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = 2 \text{ m}$$

Θέτοντας στη σχέση (1) όπου $t = 0,5 \text{ s}$ και $\varphi_{\Sigma} = 0$, έχουμε:

$$0 = 2\pi \frac{0,5}{T} - \frac{4\pi}{2} \Rightarrow T = 0,5 \text{ s}$$

Η εξίσωση του κύματος είναι η:

$$y = A \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \Rightarrow$$

$$y = 0,2 \eta \mu 2\pi (2t - 0,5x) (\text{S.I.})$$

Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι:

$$v_{\delta} = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow v_{\delta} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

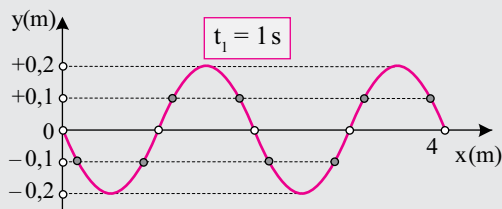
Το κύμα τη χρονική στιγμή t_1 το κύμα έχει διαδοθεί κατά απόσταση:

$$d_1 = v_{\delta} t_1 \Rightarrow d_1 = 4 \text{ m}$$

Ισχύει:

$$\frac{d_1}{\lambda} = \frac{4}{2} \Rightarrow d_1 = 2\lambda$$

Σχεδιάζουμε το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή t_1 :



Από το στιγμιότυπο προκύπτει ότι τα σημεία του μέσου που απέχουν απόσταση 0,1 m από τη θέση ισορροπίας τους είναι 8.

4.48 Σωστή απάντηση είναι η β).

Για το κομμάτι φελλού στο Λ ισχύει:

$$|r_1 - r_2| = |v_\delta t_1 - v_\delta t_2| = v_\delta |t_1 - t_2| \Rightarrow$$

$$|r_1 - r_2| = v_\delta \cdot \Delta t \Rightarrow |r_1 - r_2| = \frac{\lambda}{T} \cdot T \Rightarrow$$

$$|r_1 - r_2| = \lambda$$

Επομένως, το Λ είναι σημείο ενισχυτικής συμβολής και θα ισχύει: $A_\Lambda = 2A$

Όμοια, για το πλάτος του Μ (επειδή είναι μέσο) θα έχουμε $A_M = 2A$.

Προκύπτει:

$$\frac{K_{\max, \Lambda}}{K_{\max, M}} = \frac{\frac{1}{2} m v_{\max, \Lambda}^2}{\frac{1}{2} m v_{\max, M}^2} \Rightarrow$$

$$\frac{K_{\max, \Lambda}}{K_{\max, M}} = \frac{(\omega \cdot 2A)^2}{(\omega \cdot 2A)^2} \Rightarrow \frac{K_{\max, \Lambda}}{K_{\max, M}} = 1$$

4.49 Σωστή απάντηση είναι η α).

Ισχύει:

$$|r_2 - r_1| = (2N + 1) \frac{\lambda}{2} \Rightarrow 2 \cdot x = (2N + 1) \frac{\lambda}{2} (1)$$

Θέτοντας στη σχέση (1) όπου $N = 0$ προκύπτει:

$$x = \frac{\lambda}{4} \Rightarrow x = \frac{v_\delta}{4f} \Rightarrow$$

$$f = \frac{v_\delta}{4x} \Rightarrow f = 1700 \text{ Hz}$$

4.50 Σωστή απάντηση είναι η β).

Από το διάγραμμα προκύπτει:

$$\Delta x_{\Sigma Z} = 1,25\lambda$$

Ισχύει:

$$\Delta \phi_{\Sigma Z} = 2\pi \frac{\Delta x_{\Sigma Z}}{\lambda} \Rightarrow \Delta \phi_{\Sigma Z} = \left(2\pi \frac{1,25\lambda}{\lambda} \right) \text{ rad} \Rightarrow$$

$$\Delta \phi_{\Sigma Z} = 2,5\pi \text{ rad}$$

Προκύπτει ότι:

$$y_\Sigma = A \eta \mu \phi_\Sigma \Rightarrow \frac{\sqrt{3}A}{2} = A \eta \mu \phi_\Sigma \Rightarrow \eta \mu \frac{\pi}{3} = \eta \mu \phi_\Sigma$$

$$\text{Επειδή } v_\Sigma < 0 \text{ έχουμε } \phi_\Sigma = 2\pi\kappa + \frac{2\pi}{3}$$

Υπολογίζουμε τη φάση του Z τη χρονική στιγμή t_2 . Έχουμε:

$$\Delta \phi_{\Sigma Z} = \phi_Z - \phi_\Sigma \Rightarrow \phi_Z = \phi_\Sigma + \Delta \phi_{\Sigma Z} \Rightarrow$$

$$\phi_Z = 2\pi\kappa + \frac{2\pi}{3} + 2,5\pi$$

Τελικά καταλήγουμε:

$$y_Z = A \eta \mu \phi_Z \Rightarrow$$

$$y_Z = A \eta \mu \left(2\pi\kappa + \frac{2\pi}{3} + 2,5\pi \right) \Rightarrow y_Z = -\frac{A}{2}$$

4.51 Σωστή απάντηση είναι η γ).

Ισχύει:

$$r_2^2 = r_1^2 + d^2 \Rightarrow r_2 = \sqrt{r_1^2 + d^2} \Rightarrow$$

$$r_2 = \sqrt{4 \cdot \lambda^2 + \frac{9 \cdot \lambda^2}{4}} \Rightarrow r_2 = 2,5\lambda$$

Για το σημείο Μ ισχύει:

$$\frac{r_1 - r_2}{\lambda} = \frac{2\lambda - 2,5\lambda}{\lambda} \Rightarrow r_1 - r_2 = -\frac{\lambda}{2}$$

Επομένως το Μ είναι σημείο ακυρωτικής συμβολής (με $N = -1$) και το πλάτος του μετά τη χρονική στιγμή t_2 θα είναι ίσο με μηδέν.

4.52 Σωστή απάντηση είναι η α).

Έστω ότι το Κ απέχει r_1 από την πηγή Π_1 και r_2 από την πηγή Π_2 .

Ισχύει:

$$r_1 + r_2 = d \quad (1)$$

Και:

$$r_1 - r_2 = N\lambda \Rightarrow r_1 - r_2 = 2\lambda \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει:

$$2r_1 = d + 2\lambda \Rightarrow d = 2r_1 - 2\lambda \Rightarrow$$

$$d = 1,5 \text{ m} - 0,5 \text{ m} \Rightarrow d = 1 \text{ m}$$

4.53 Σωστή απάντηση είναι η γ).

Ισχύει:

$$y = 2A \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \cdot \eta \mu 2\pi \frac{t}{T} \Rightarrow$$

$$0,1\sqrt{3} = 2A \sin 2\pi \frac{0}{\lambda} \cdot \eta \mu 2\pi \frac{\frac{T}{6}}{T} \Rightarrow$$

$$0,1\sqrt{3} = 2A \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$A = 0,1 \text{ m}$$

Για τη θέση του σημείου Z έχουμε:

$$x_z = \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{6} \Rightarrow x_z = \frac{11\lambda}{12}$$

Το πλάτος του Z είναι:

$$A_z = \left| 2A \sin 2\pi \frac{x_z}{\lambda} \right| \Rightarrow A_z = \left| 2A \sin 2\pi \frac{11\lambda}{12} \right| \Rightarrow$$

$$A_z = \sqrt{3}A \Rightarrow A = 0,1\sqrt{3} \text{ m}$$

4.54 Σωστή απάντηση είναι η β).

Για το σημείο M ισχύει:

$$x_M = \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} \right) - \frac{\lambda}{12} \Rightarrow x_M = \frac{8\lambda}{12}$$

Το πλάτος του M είναι:

$$A_M = \left| 2A \sin 2\pi \frac{x_M}{\lambda} \right| \Rightarrow A_M = \left| 2A \sin 2\pi \frac{12}{\lambda} \right| \Rightarrow$$

$$A_M = A$$

Για το σημείο N ισχύει:

$$x_N = \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{6} \Rightarrow x_N = \frac{11\lambda}{12}$$

Το πλάτος του N είναι:

$$A_N = \left| 2A \sin 2\pi \frac{x_N}{\lambda} \right| \Rightarrow A_N = \left| 2A \sin 2\pi \frac{11\lambda}{12} \right| \Rightarrow$$

$$A_N = \sqrt{3}A$$

Προκύπτει τελικά:

$$\frac{E_M}{E_N} = \frac{\frac{1}{2}DA_M^2}{\frac{1}{2}DA_N^2} \Rightarrow \frac{E_M}{E_N} = \left(\frac{A}{\sqrt{3}A} \right)^2 \Rightarrow \frac{E_M}{E_N} = \frac{1}{3}$$

4.55 Σωστή απάντηση είναι η γ).

Για τη θέση του σημείου Σ έχουμε:

$$x_\Sigma = \frac{4\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} - \frac{\lambda}{6} \Rightarrow x_\Sigma = \frac{25\lambda}{12}$$

Το πλάτος του Σ θα είναι:

$$A_\Sigma = \left| 2A \sin 2\pi \frac{x_\Sigma}{\lambda} \right| \Rightarrow A_\Sigma = \left| 2A \sin 2\pi \frac{25\lambda}{12} \right| \Rightarrow$$

$$A_\Sigma = \sqrt{3}A$$

Τελικά έχουμε:

$$\alpha_{\max, \Sigma} = \omega^2 A_\Sigma \Rightarrow \alpha_{\max, \Sigma} = \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \sqrt{3}A \Rightarrow$$

$$\alpha_{\max, \Sigma} = \frac{4\sqrt{3}\pi^2}{T^2} A$$

4.56 Σωστή απάντηση είναι η γ).

Για το γραμμικό ελαστικό μέσο 1 έχουμε:

$$L = \frac{6\lambda_1}{2} \Rightarrow L = 3\lambda_1 \quad (1)$$

Για το γραμμικό ελαστικό μέσο 2 έχουμε:

$$\frac{L}{4} = \frac{4\lambda_2}{2} + \frac{\lambda_2}{4} \Rightarrow L = 9\lambda_2 \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει:

$$3\lambda_1 = 9\lambda_2 \Rightarrow \frac{v_\delta}{f_1} = 3 \frac{v_\delta}{f_2} \Rightarrow f_2 = 3f_1$$

4.57 Σωστή απάντηση είναι η β).

Η γωνιακή συχνότητα είναι:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = 4\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Για το πλάτος του σημείου K, θα ισχύει:

$$A_K = \left| 2A \sin 2\pi \frac{x_K}{\lambda} \right| \Rightarrow A_K = \left| 2A \sin 2\pi \frac{\lambda/8}{\lambda} \right| \Rightarrow A_K = \sqrt{2}A$$

Προκύπτει:

$$v_{\max, K} = \omega A_K \Rightarrow v_{\max, K} = \omega \sqrt{2}A \Rightarrow$$

$$A = \frac{v_{\max, K}}{\omega \sqrt{2}} \Rightarrow A = 0,5 \text{ m}$$

Για το πλάτος της επιτάχυνσης του σημείου στο O θα έχουμε:

$$\alpha_{\max, O} = \omega^2 A_O \Rightarrow \alpha_{\max, O} = 16\pi^2 \cdot 2A \Rightarrow$$

$$\alpha_{\max, O} = 16\pi^2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

4.58 Σωστή απάντηση είναι η γ).

Ισχύει:

$$\Delta x_{MN} = \frac{3\lambda}{2} \Rightarrow \Delta x_{MN} = 1,2 \text{ m}$$

Τα σημεία M, N έχουν διαφορά φάσης $\pi \text{ rad}$.

Προκύπτει:

$$d = \sqrt{(2A)^2 + (\Delta x_{MN})^2} \Rightarrow d = 1,3 \text{ m}$$

4.59 Σωστή απάντηση είναι η β).

Ισχύει αρχικά:

$$L = N \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{2L}{N} \Rightarrow \lambda = \left(\frac{2 \cdot 2}{8} \right) \text{ m} \Rightarrow \lambda = 0,5 \text{ m}$$

Ισχύει τελικά:

$$L = N' \frac{\lambda'}{2} \Rightarrow \lambda' = \frac{2L}{N'} \Rightarrow \lambda' = \left(\frac{2 \cdot 2}{4} \right) \text{ m} \Rightarrow \lambda' = 1 \text{ m} = 2\lambda$$

Προκύπτει:

$$\lambda f = \lambda' f' \Rightarrow \lambda f = 2\lambda f' \Rightarrow f' = \frac{f}{2}$$

Τελικά, έχουμε:

$$\Pi(\%) = \frac{f - f'}{f} \cdot 100\% \Rightarrow \Pi(\%) = \frac{f - \frac{f}{2}}{f} \cdot 100\% \Rightarrow \Pi(\%) = 50\%$$

4.60 Σωστή απάντηση είναι η α).

Ισχύει:

$$y_K = 2A \cdot \sin 2\pi \frac{x_K}{\lambda} \text{ ημ} 2\pi f t \Rightarrow$$

$$y_K = 2A \cdot \sin 2\pi \frac{\frac{2\lambda}{3}}{\lambda} \text{ ημ} 2\pi f t \Rightarrow$$

$$y_K = 2A \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \text{ ημ} 2\pi f t \Rightarrow$$

$$y_K = -A \text{ ημ} 2\pi f t \Rightarrow y_K = A \text{ ημ} (2\pi f t + \pi)$$

Για την επιτάχυνση του σημείου K προκύπτει:

$$\alpha_K = -\omega^2 y_K \Rightarrow \alpha_K = -4\pi^2 f^2 A \text{ ημ} (2\pi f t + \pi) \Rightarrow$$

$$\alpha_K = 4\pi^2 f^2 A \text{ ημ} (2\pi f t)$$

4.61 Σωστή απάντηση είναι η β).

Ισχύει:

$$\frac{t}{T} = 12 \cdot 10^{10} t \Rightarrow T = \frac{1}{12 \cdot 10^{10}} \text{ s}$$

Επίσης, έχουμε:

$$\frac{x}{\lambda} = 6 \cdot 10^4 x \Rightarrow \lambda = \frac{1}{6 \cdot 10^4} \text{ m}$$

Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι:

$$v_\delta = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow v_\delta = 2 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

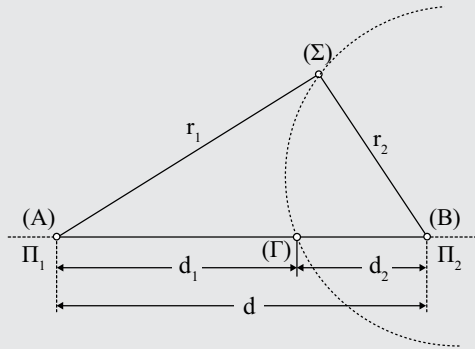
Τελικά προκύπτει:

$$\frac{E_{\max}}{B_{\max}} = v_\delta \Rightarrow E_{\max} = B_{\max} v_\delta \Rightarrow$$

$$E_{\max} = (5 \cdot 10^{-10} \cdot 2 \cdot 10^6) \frac{\text{V}}{\text{m}} \Rightarrow$$

$$E_{\max} = 10^{-3} \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

4.62 Σωστή απάντηση είναι η α).



Για το σημείο Σ ισχύει:

$$r_1 - r_2 = 3\lambda - \lambda \Rightarrow r_1 - r_2 = 2\lambda.$$

Παρατηρούμε ότι η διαφορά των αποστάσεων του σημείου Σ από τις πηγές είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του μήκους κύματος επομένως το σημείο Σ ταλαντώνεται με μέγιστο πλάτος $2A$. Η υπερβολή ενίσχυσης $N = 2$ τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα (AB) στο σημείο Γ.

Για το σημείο Γ ισχύει:

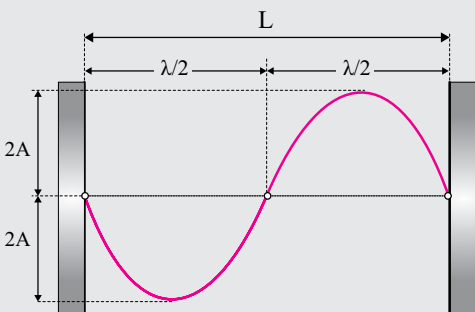
$$d_1 - d_2 = 2\lambda \Rightarrow d_1 - (d - d_1) = 2\lambda \Rightarrow$$

$$2d_1 - d = 2\lambda \Rightarrow d = 2d_1 - 2\lambda \Rightarrow$$

$$d = 2 \cdot \frac{11\lambda}{4} - 2\lambda \Rightarrow d = 3,5\lambda$$

4.63 Σωστή απάντηση είναι η α).

Ανάμεσα στα άκρα της χορδής μήκους L εμφανίζονται αρχικά 2 σημεία τα οποία ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος $2A$, δηλαδή 2 κοιλίες. Επειδή τα άκρα της χορδής είναι ακλόνητα στερεωμένα, αυτά είναι αναγκαστικά δεσμοί. Η μορφή της χορδής φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Για το αρχικό μήκος κύματος λ των δύο αντίθετα διαδιδόμενων αρμονικών κυμάτων έχουμε:

$$v_\delta = \lambda \cdot f \Rightarrow f = \frac{v_\delta}{\lambda} \quad (1)$$

Για το μήκος της χορδής L ισχύει:

$$L = 2 \cdot \frac{\lambda}{2} \quad (2)$$

Αν τριπλασιάσουμε τη συχνότητα των δύο αντίθετα διαδιδόμενων αρμονικών κυμάτων, για το τελικό μήκος κύματος λ' έχουμε:

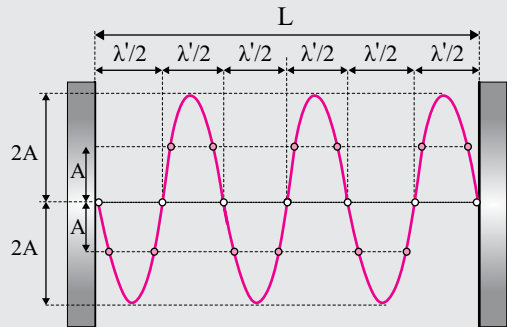
$$v_\delta = \lambda' \cdot f' \Rightarrow v_\delta = \lambda' \cdot 3f \Rightarrow v_\delta = \lambda' \cdot 3 \cdot \frac{v_\delta}{\lambda} \Rightarrow$$

$$\lambda' = \frac{\lambda}{3} \Rightarrow \lambda = 3\lambda' \quad (3)$$

Το μήκος της χορδής L , σε συνάρτηση με το τελικό μήκος κύματος λ' , είναι:

$$(2) \Rightarrow L = 2 \cdot \frac{3\lambda'}{2} \Rightarrow L = 6 \cdot \frac{\lambda'}{2}$$

Η μορφή της χορδής μετά τον τριπλασιασμό της συχνότητας των δύο αντίθετα διαδιδόμενων αρμονικών κυμάτων φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Ο αριθμός των σημείων ανάμεσα στα άκρα της χορδής που ταλαντώνονται με πλάτος A , είναι 12, όπως φαίνεται από το σχήμα.

4.64 Σωστή απάντηση είναι η α).

Συγκρίνοντας τον γενικό τύπο της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου ενός ηλεκτρομαγνητικού κύματος με τον τύπο που δίνεται, προκύπτουν τα εξής:

$$E_{\max} = 0,2 \frac{V}{m}, \quad f = 6 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

$$\text{καί } \lambda = 5 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

Από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής υπολογίζουμε την ταχύτητα διάδοσης του ηλεκτρομαγνητικού κύματος.

$$v = \lambda \cdot f = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Παρατηρούμε ότι η ταχύτητα αυτή είναι ίση με την ταχύτητα διάδοσης του φωτός στο κενό.

Για το μήκος κύματος της ακτινοβολίας ισχύει $\lambda = 5 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 500 \text{ nm}$.

Επειδή το μήκος κύματος του ορατού φωτός κυμαίνεται από 400 nm έως 700 nm, η ακτινοβολία αυτή ανήκει στο ορατό φάσμα.

4.65 Σωστή απάντηση είναι η β).

Παρατηρούμε ότι $x_{(\Lambda)} < x_{(K)}$, άρα, το κύμα φτάνει πρώτα στο σημείο (Λ) και έπειτα στο (Κ) οπότε, και ταλαντώνεται για περισσότερο χρόνο. Η απόσταση των δύο σημείων είναι:

$$x_{(K)} - x_{(\Lambda)} = 3\lambda - \frac{29\lambda}{12} = \frac{7\lambda}{12},$$

οπότε, το χρονικό διάστημα που χρειάζεται το κύμα από τη στιγμή που φτάνει στο σημείο (Λ) και μέχρι να φτάσει στο σημείο (Κ) είναι $\Delta t = \frac{7T}{12}$.

Άρα, το σημείο (Κ) ταλαντώνεται για χρόνο κατά $\frac{7T}{12}$ λιγότερο από ότι το σημείο (Λ).

Όταν το σημείο (Λ) έχει διανύσει απόσταση $d_{(\Lambda)} = 10A$ θα έχει περάσει χρόνος 2,5T από τη στιγμή που έφτασε το κύμα σε αυτό καθώς σε κάθε περίοδο της ταλάντωσής του διανύει απόσταση 4A. Εκείνη τη στιγμή το σημείο (Κ) θα ταλαντώνεται για χρόνο:

$$\Delta t' = 2,5T - \frac{7T}{12} = \frac{23T}{12} = T + \frac{11T}{12} = T + \frac{3T}{4} + \frac{T}{6}$$

Το σημείο (Κ) θα βρίσκεται στη θέση:

$$\begin{aligned} y_{(K)} &= A \eta \mu(\omega \cdot \Delta t') = A \eta \mu\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{23T}{12}\right) = \\ &= A \eta \mu \frac{23\pi}{6} = A \eta \mu\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{A}{2} \end{aligned}$$

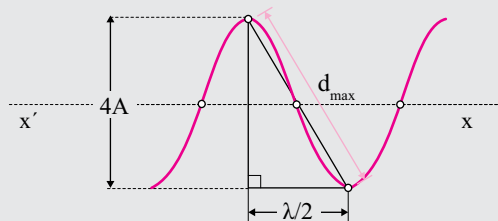
Άρα, το σημείο (Κ) θα έχει διανύσει απόσταση από τη στιγμή που ξεκίνησε την ταλάντωσή του:

$$d_{(K)} = 4A + 3A + \frac{A}{2} = 7,5A$$

4.66 Σωστή απάντηση είναι η β).

Η απόσταση των ακραίων θέσεων της ταλάντωσης των σημείων που είναι κοιλίες είναι 4A, όπου A το πλάτος ταλάντωσης των κυμάτων, η συμβολή των οποίων, έδωσε το στάσιμο. Δύο διαδοχικές κοιλίες απέχουν μεταξύ τους απόσταση $\lambda/2$.

Δύο διαδοχικές κοιλίες του στάσιμου κύματος απέχουν τη μέγιστη απόσταση μεταξύ τους, όταν θα βρίσκονται σε ακραίες θέσεις της ταλάντωσής τους. Εφαρμόζοντας το πυθαγόρειο θεώρημα, όπως φαίνεται και στο σχήμα, έχουμε:



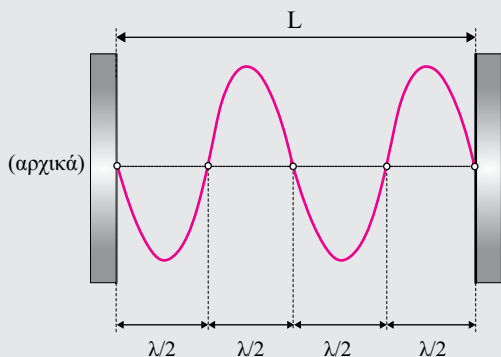
$$\begin{aligned} d_{\max}^2 &= \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 + (4A)^2 \Rightarrow \frac{\lambda^2 \cdot 10}{4} = \frac{\lambda^2}{4} + 16A^2 \Rightarrow \\ \frac{9\lambda^2}{4} &= 16A^2 \Rightarrow \frac{3\lambda}{2} = 4A \Rightarrow \\ \lambda &= \frac{8A}{3} \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{v_{\max(\text{κοιλίας})}}{v_{\delta}} &= \frac{\omega \cdot 2A}{\lambda \cdot f} = \frac{2\pi f \cdot 2A}{\lambda \cdot f} = \\ &= \frac{4\pi A}{\lambda} \stackrel{\lambda = \frac{8A}{3}}{\sim} \frac{4\pi A}{\frac{8A}{3}} = \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

4.67 Σωστή απάντηση είναι η β).

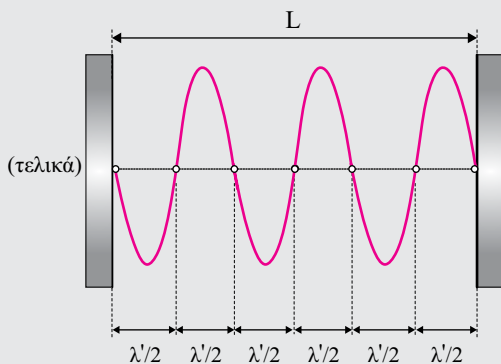
Αρχικά, αφού στη χορδή σχηματίζονται πέντε συνολικά δεσμοί, για το μήκος της L θα ισχύει όπως φαίνεται και στο αρχικό σχήμα:

$$L = 4 \cdot \frac{\lambda}{2} \quad (1)$$



Όταν μεταβάλλουμε τη συχνότητα της διέγερσης αφού δημιουργούνται 2 επιπλέον δεσμοί, η νέα μορφή της χορδής θα φαίνεται στο τελικό σχήμα και θα ισχύει:

$$L = 6 \cdot \frac{\lambda'}{2} \quad (2)$$



Επειδή το μήκος της χορδής δεν αλλάζει, απ' τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει:

$$4 \cdot \frac{\lambda}{2} = 6 \cdot \frac{\lambda'}{2} \Rightarrow \lambda' = \frac{2\lambda}{3} \Rightarrow \frac{v_\delta}{f'} = \frac{2v_\delta}{3f} \Rightarrow f' = \frac{3f}{2}$$

Η ποσοστιαία μεταβολή της συχνότητας της διέγερσης είναι:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta f}{f} \cdot 100\% &= \frac{f' - f}{f} \cdot 100\% = \left(\frac{f'}{f} - 1 \right) \cdot 100\% = \\ &= \left(\frac{3f}{2f} - 1 \right) \cdot 100\% = 50\% \end{aligned}$$

4.68 Σωστή απάντηση είναι η γ).

Αφού το σημείο Σ διπλασιάζει το πλάτος της ταλάντωσής του όταν φτάνει σε αυτό και το κύμα από την πηγή Π₂, τότε στο σημείο αυτό έχουμε ενισχυτική συμβολή. Άρα, για τη διαφορά των αποστάσεών του από τις δύο πηγές Π₁ και Π₂ ισχύει:

$$|r_1 - r_2| = N\lambda$$

Επιπλέον, αφού το πλάτος του σημείου Σ διπλασιάζεται μετά από χρονικό διάστημα δύο περιόδων από τη χρονική στιγμή που ξεκίνησε την ταλάντωσή του, η διαφορά των αποστάσεών του από τις δύο πηγές Π₁ και Π₂ είναι 2λ. Άρα:

$$|r_1 - r_2| = 2\lambda \Rightarrow \lambda = 1 \text{ m}$$

Για την αρχική συχνότητα f των κυμάτων που διαδίδονται στο υγρό έχουμε:

$$v_\delta = \lambda \cdot f \Rightarrow f = \frac{v_\delta}{\lambda} = 2 \text{ Hz}$$

Για να παραμένει το σημείο Σ διαρκώς στη θέση ισορροπίας του, όταν τα δύο κύματα συμβάλλουν σε αυτό, θα πρέπει στο σημείο Σ να έχουμε απόσβεση. Άρα:

$$|r_1 - r_2| = (2N + 1) \frac{\lambda'}{2} \Rightarrow |r_1 - r_2| = (2N + 1) \frac{v_\delta}{2f'} \Rightarrow$$

$$f' = (2N + 1) \frac{v_\delta}{2|r_1 - r_2|}$$

$$f' = (2N + 1) \cdot \frac{1}{2} \quad (1)$$

Επειδή για τη συχνότητα f ισχύει $f' > f$, τότε πρέπει $N = 2$ ώστε το ποσοστό μεταβολής της να είναι ελάχιστο. Τελικά από τη σχέση (1) παίρνουμε $f' = 2,5 \text{ Hz}$.

Η ποσοστιαία μεταβολή της συχνότητας της διέγερσης είναι:

$$\frac{\Delta f}{f} \cdot 100\% = \frac{f' - f}{f} \cdot 100\% = 25\%$$

4.69 Σωστή απάντηση είναι η γ).

Η φάση του σημείου (Κ) σε συνάρτηση με τον χρόνο είναι:

$$\varphi_{(K)} = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_{(K)}}{\lambda} \right) = \frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x_{(K)}}{\lambda} \quad x_{(K)} = +4\text{m} \Rightarrow$$

$$\varphi_{(K)} = \frac{2\pi t}{T} - \frac{8\pi}{\lambda} \quad (1)$$

Από το διάγραμμα προκύπτει:

$$(1) \quad \xrightarrow{t=0, \varphi_{(K)}=-10\pi\text{rad}} -10\pi = -\frac{8\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = 0,8\text{ m}$$

$$(1) \quad \xrightarrow{t=1\text{ s}, \varphi_{(K)}=0} 0 = \frac{2\pi \cdot 1}{T} - \frac{8\pi}{0,8} \Rightarrow T = 0,2\text{ s}$$

Η εξίσωση του κύματος είναι:

$$y = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \Rightarrow y = 0,6\text{m} \sin 2\pi \left(\frac{t}{0,2} - \frac{x}{0,8} \right) \Rightarrow$$

$$y = 0,6\text{m} (10\pi t - 2,5\pi x) \text{ (S.I.)}$$

4.70 Σωστή απάντηση είναι η α).

Η φάση του σημείου (Κ) σε συνάρτηση με τον χρόνο είναι:

$$\varphi_{(K)} = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_{(K)}}{\lambda} \right) \quad t=0,25\text{ s}, \varphi_{(K)}=0 \Rightarrow$$

$$0 = \frac{2\pi \cdot 0,25}{T} - \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = 4T \quad (1)$$

Η φάση του σημείου (Λ) σε συνάρτηση με τον χρόνο είναι:

$$\varphi_{(\Lambda)} = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_{(\Lambda)}}{\lambda} \right) \quad t=0, \varphi_{(\Lambda)}=-7\pi\text{ rad} \Rightarrow$$

$$-7\pi = -\frac{2\pi(x_{(K)} + \lambda)}{\lambda} \Rightarrow$$

$$7\lambda = 2(1 + \lambda) \Rightarrow \lambda = 0,4\text{ m}$$

$$(1) \Rightarrow T = 0,1\text{ s}$$

Για το σημείο (Γ) ισχύει:

$$\varphi_{(\Gamma)} = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_{(\Gamma)}}{\lambda} \right) \quad t_{\Gamma}, \varphi_{(\Gamma)}=0 \Rightarrow$$

$$0 = 2\pi \left(\frac{t_{\Gamma}}{0,1} - \frac{x_{(K)} + \lambda}{\lambda} \right) \Rightarrow$$

$$\frac{t_{\Gamma}}{0,1} = \frac{1+0,4}{0,4} \Rightarrow t_{\Gamma} = 0,35\text{ s}$$

Για το σημείο (Ζ) ισχύει:

$$\varphi_{(Z)} = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_{(Z)}}{\lambda} \right) \quad t=0, \varphi_{(Z)} \Rightarrow \varphi_{(Z)} = -\frac{2\pi x_{(Z)}}{\lambda} \Rightarrow$$

$$\varphi_{(Z)} = -\frac{2\pi \cdot 1}{0,4} \Rightarrow \varphi_{(Z)} = -5\pi\text{ rad}$$

4.71 Σωστή απάντηση είναι η α).

Έστω t_1 και t_2 οι χρονικές στιγμές που φτάνουν στο σημείο (Κ) τα κύματα που προέρχονται από τις πηγές Π_1 και Π_2 αντίστοιχα. Αν v_{δ} η ταχύτητα με την οποία διαδίδονται τα δύο κύματα στο υγρό τότε ισχύει:

$$r_1 = v_{\delta} \cdot t_1 \quad \text{και} \quad r_2 = v_{\delta} \cdot t_2$$

$$\text{με } t_1 > t_2 \text{ αφού } r_1 > r_2.$$

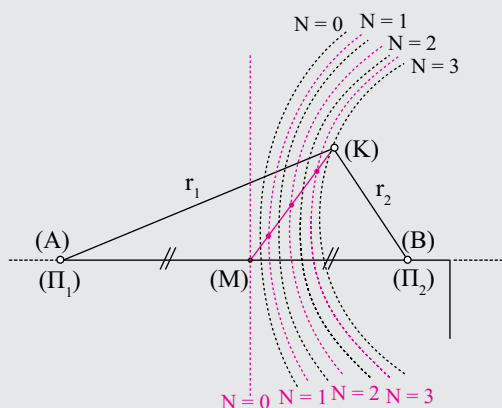
Μετά που θα συμβάλλουν και τα δύο κύματα στο σημείο (Κ), για τη διαφορά των αποστάσεων αυτού του σημείου $r_1 - r_2$ ισχύει:

$$r_1 - r_2 = v_{\delta} \cdot t_1 - v_{\delta} \cdot t_2 = v_{\delta} \cdot (t_1 - t_2) = v_{\delta} \cdot \Delta t \quad \Delta t = 3,5T$$

$$r_1 - r_2 = v_{\delta} \cdot 3,5T \Rightarrow r_1 - r_2 = \frac{\lambda}{T} \cdot 3,5T \Rightarrow$$

$$r_1 - r_2 = 3,5\lambda = (2 \cdot 3 + 1) \frac{\lambda}{2}$$

Άρα, ικανοποιείται η συνθήκη της απόσβεσης $r_1 - r_2 = (2N + 1) \frac{\lambda}{2}$ με $N = 3$ στο σημείο (Κ) οπότε, αυτό μετά τη συμβολή των δύο κυμάτων παραμένει διαρκώς ακίνητο. Το σημείο (Κ) βρίσκεται πάνω στην 4^η γραμμή απόσβεσης δεξιά της μεσοκαθέτου. Για να υπολογίσουμε τον αριθμό των σημείων που βρίσκονται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα (ΚΜ) και ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος, μετά που θα συμβάλλουν και τα δύο κύματα σε αυτά, σχεδιάζουμε τις γραμμές ενίσχυσης μεταξύ του σημείου (Κ) και (Μ) όπως φαίνεται στο σχήμα από όπου προκύπτει ότι τα σημεία αυτά είναι 4.



ΘΕΜΑ Γ

4.72 α) Η γενική μορφή της εξίσωσης του κύματος είναι:

$$y = A \cdot \eta \mu \pi \left(\frac{2t}{T} - \frac{2x}{\lambda} \right)$$

Συγκρίνοντας την παραπάνω εξίσωση του κύματος με αυτήν που δίνεται στην εκφώνηση, για την περίοδο προκύπτει:

$$\frac{2t}{T} = 8t \Rightarrow T = 0,25 \text{ s}$$

Ενώ για το μήκος κύματος έχουμε:

$$\frac{2x}{\lambda} = 0,5x \Rightarrow \lambda = 4 \text{ m}$$

Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v_\delta = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow v_\delta = 16 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

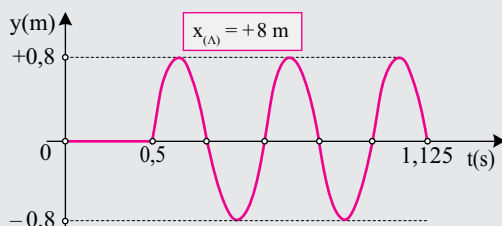
Το κύμα σε χρονική διάρκεια Δt διανύει απόσταση:

$$d = v_\delta \cdot \Delta t \Rightarrow d = 8 \text{ m}$$

β) Το σημείο Λ αρχίζει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή:

$$t_\Lambda = \frac{x_\Lambda}{v_\delta} \Rightarrow t_\Lambda = 0,5 \text{ s}$$

Το ζητούμενο διάγραμμα είναι:



γ) Η χρονική στιγμή t_2 θα είναι:

$$t_2 = \frac{x_\Lambda}{v_\delta} + \frac{3T}{4} \Rightarrow t_2 = 0,6875 \text{ s}$$

Η φάση του σημείου Κ τη χρονική στιγμή t_2 είναι:

$$\varphi_{\kappa, t_2} = 8\pi t_2 - 0,5\pi x_\kappa \Rightarrow$$

$$\varphi_{\kappa, t_2} = 3,5\pi \text{ rad}$$

δ) Η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων στο συγκεκριμένο μέσο παραμένει σταθερή. Υπολογίζουμε την τιμή του μήκους κύματος του άλλου κύματος. Ισχύει:

$$\lambda f = \lambda' f' \Rightarrow \lambda' = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda' = 2 \text{ m}$$

Προκύπτει: $T' = \frac{T}{2}$ ή $T' = 0,125 \text{ s}$

Η εξίσωση του άλλου κύματος θα είναι:

$$y = A \cdot \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T'} + \frac{x}{\lambda'} \right) \Rightarrow$$

$$y = 0,8 \cdot \eta \mu 2\pi(8t + 0,5x) \text{ (S.I.)}$$

4.73 α) Ισχύει:

$$O\Lambda = 1,75\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{O\Lambda}{1,75} \Rightarrow \lambda = 2 \text{ m}$$

Προκύπτει:

$$OZ = 1,25\lambda \Rightarrow OZ = 1,25\lambda \Rightarrow OZ = 2,5 \text{ m}$$

Έχουμε:

$$\Delta\varphi_{Z\Lambda} = 2\pi \frac{\Delta x}{\lambda} \Rightarrow \Delta\varphi_{Z\Lambda} = 2\pi \frac{x_\Lambda - x_Z}{\lambda} \Rightarrow$$

$$\Delta\varphi_{Z\Lambda} = \pi \text{ rad}$$

β) Ισχύει:

$$v_{\max} = \omega A \Rightarrow v_{\max} = 2\pi f A \Rightarrow$$

$$f = \frac{v_{\max}}{2\pi A} \Rightarrow f = 1 \text{ Hz}$$

Έχουμε:

$$T = \frac{1}{f} \Rightarrow T = 1 \text{ s}$$

Η εξίσωση του κύματος έχει τη μορφή:

$$y = A \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \Rightarrow$$

$$y = 0,4 \cdot \eta\mu 2\pi (t - 0,5x) \text{ (S.I.)}$$

γ) Βρίσκουμε την ταχύτητα διάδοσης του κύματος:

$$v_\delta = \lambda f \Rightarrow v_\delta = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Υπολογίζουμε τη χρονική στιγμή t_1 :

$$t_1 = \frac{d_1}{v_\delta} \Rightarrow t_1 = 3 \text{ s}$$

Υπολογίζουμε τη χρονική στιγμή t_2 :

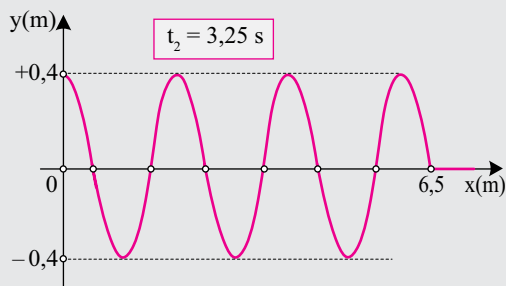
$$t_2 = t_1 + 0,25 \text{ s} \Rightarrow t_2 = 3,25 \text{ s}$$

Ισχύει:

$$d_2 = v_\delta t_2 \Rightarrow d_2 = 6,5 \text{ m}$$

Επίσης έχουμε:

$$\frac{d_2}{\lambda} = \frac{6,5 \text{ m}}{2 \text{ m}} \Rightarrow d_2 = 3,25 \lambda$$



δ) Για το σημείο Λ, τη χρονική στιγμή t_2 , ισχύει:

$$y_\Lambda = 0,4 \cdot \eta\mu 2\pi (3,25 - 0,5 \cdot 3,5) \Rightarrow y_\Lambda = 0$$

Για το σημείο Κ ισχύει $d_2 < OK$, επομένως το κύμα δεν έχει φτάσει ακόμα στο σημείο Κ επομένως:

$$y_K = 0$$

4.74 α) Στην εξίσωση της φάσης του κύματος

$$\varphi = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \text{ για τη χρονική στιγμή } t_1, \text{ θέ-}$$

τουμε όπου $x = 0$ και $\varphi = 2\pi \text{ rad}$. Προκύπτει:

$$2\pi = 2\pi \left(\frac{t_1}{T} - \frac{0}{\lambda} \right) \Rightarrow t_1 = 2 \text{ s}$$

β) Ισχύει:

$$d = 2A \Rightarrow A = \frac{d}{2} \Rightarrow A = 0,1 \text{ m}$$

Στην εξίσωση της φάσης του κύματος

$$\varphi = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \text{ για τη χρονική στιγμή } t_1, \text{ θέ-}$$

τουμε όπου $x = 4 \text{ m}$ και $\varphi = 0$. Προκύπτει:

$$0 = 2\pi \left(\frac{2}{2} - \frac{4}{\lambda} \right) \Rightarrow \lambda = 4 \text{ m}$$

Η εξίσωση του κύματος έχει τη μορφή:

$$y = A \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \Rightarrow$$

$$y = 0,1 \cdot \eta\mu 2\pi (0,5t - 0,25x) \text{ (S.I.)}$$

γ) Βρίσκουμε την ταχύτητα διάδοσης του κύματος:

$$v_\delta = \lambda f \Rightarrow v_\delta = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow v_\delta = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Το σημείο Κ αρχίζει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή t_K :

$$t_K = \frac{x_K}{v_\delta} \Rightarrow t_K = 1 \text{ s}$$

Ισχύει:

$$t_2 = t_K + \frac{3T}{2} \Rightarrow t_2 = 4 \text{ s}$$

Η φάση της πηγής του κύματος τη χρονική στιγμή t_2 είναι:

$$\varphi_0 = 2\pi \left(\frac{t_2}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \Rightarrow \varphi_0 = 4\pi \text{ rad}$$

δ) Ισχύει:

$$N = \frac{\Delta t}{T} \Rightarrow \Delta t = NT \Rightarrow \Delta t = 4 \text{ s}$$

Το σημείο Z αρχίζει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή:

$$t_Z = \frac{x_Z}{v_\delta} \Rightarrow t_Z = 4 \text{ s}$$

Έχουμε:

$$\Delta t = t_3 - t_Z \Rightarrow t_3 = \Delta t + t_Z \Rightarrow t_3 = 8 \text{ s}$$

Επίσης, ισχύει:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = \pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Η επιτάχυνση του σημείου K τη χρονική στιγμή t_3 είναι:

$$a_K = -\omega^2 A \cdot \eta \mu 2\pi \left(\frac{t_3}{T} - \frac{x_K}{\lambda} \right) \Rightarrow a_K = 0$$

4.75 α) Η γενική μορφή της εξίσωσης του κύματος είναι:

$$y = A \cdot \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

Συγκρίνοντας την παραπάνω εξίσωση του κύματος με αυτήν που δίνεται στην εκφώνηση, για την περίοδο προκύπτει:

$$\frac{t}{T} = 2t \Rightarrow T = 0,5 \text{ s}$$

Ο αριθμός των ταλαντώσεων που εκτελεί η πηγή είναι:

$$N = f \cdot \Delta t \Rightarrow N = \frac{1}{T} \cdot \Delta t \Rightarrow N = 40 \text{ ταλ.}$$

β) Συγκρίνοντας τη γενική μορφή της εξίσωσης του κύματος με αυτήν που δίνεται στην εκφώνηση, για το μήκος κύματος έχουμε:

$$\frac{x}{\lambda} = 0,5x \Rightarrow \lambda = 2 \text{ m}$$

Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι:

$$v_\delta = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow v_\delta = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

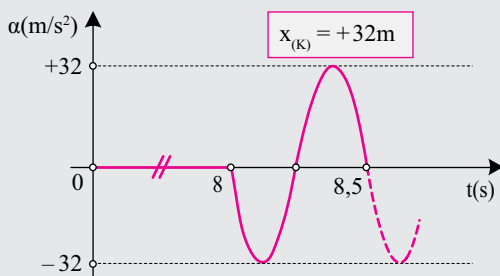
Το σημείο K αρχίζει την ταλάντωσή του τη χρονική στιγμή t_K για την οποία ισχύει:

$$t_K = \frac{x_K}{v_\delta} \Rightarrow t_K = 8 \text{ s}$$

Προκύπτει:

$$a_{\max} = \omega^2 A \Rightarrow a_{\max} = \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 A \Rightarrow a_{\max} = 32 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Το ζητούμενο διάγραμμα είναι:



γ) Η εξίσωση της φάσης του σημείου K θα είναι:

$$\varphi_K = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_K}{\lambda} \right) \Rightarrow \varphi_K = 4\pi t - 32\pi \text{ (S.I.)} \quad (1)$$

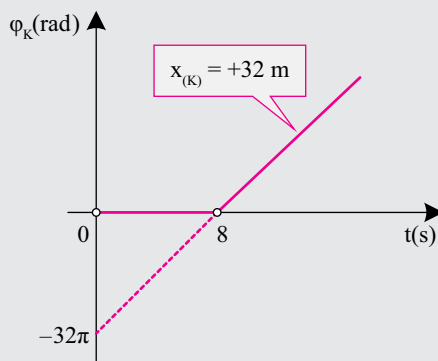
Θέτουμε στην εξίσωση (1) όπου $t = 0$. Προκύπτει:

$$\varphi_K = -32\pi \text{ rad}$$

Θέτουμε στην εξίσωση (1) όπου $\varphi_K = 0$. Προκύπτει:

$$0 = 2\pi t_K - 32\pi \Rightarrow t_K = 8 \text{ s}$$

Το ζητούμενο διάγραμμα θα είναι:



δ) Η απομάκρυνση του σημείου K τη χρονική στιγμή t_5 θα είναι:

$$y_K = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi(2t - 0,5x) \Rightarrow y_K = 0,1 \text{ m}$$

Προκύπτει:

$$\frac{K}{U} = \frac{E_T - U}{U} \Rightarrow \frac{K}{U} = \frac{\frac{1}{2}DA^2 - \frac{1}{2}Dy_K^2}{\frac{1}{2}Dy_K^2} \Rightarrow$$

$$\frac{K}{U} = \frac{A^2 - y_K^2}{y_K^2} \Rightarrow \frac{K}{U} = 3$$

4.76 α) Από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής προκύπτει:

$$v_\delta = \lambda f \Rightarrow f = \frac{v_\delta}{\lambda} \Rightarrow f = 10 \text{ Hz}$$

β) Για τη γωνιακή συχνότητα των σημείων του μέσου έχουμε:

$$\omega = 2\pi f \Rightarrow \omega = 20\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Για την ενέργεια ταλάντωσης προκύπτει:

$$E_T = \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow E_T = \frac{1}{2} \cdot \Delta m \cdot \omega^2 A^2 \Rightarrow$$

$$E_T = 8 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

γ) Από την εφαρμογή της Α.Δ.Ε_T έχουμε:

$$K + U = E_T \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \cdot \Delta m \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} \Delta m \cdot \omega^2 \cdot y_1^2 = \frac{1}{2} \cdot \Delta m \cdot \omega^2 A^2 \Rightarrow$$

$$v_1 = \pm \omega \sqrt{A^2 - y_1^2} \Rightarrow$$

$$v_1 = \pm 2\pi\sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Για 4^η φορά η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας θα είναι:

$$v_1 = -2\pi\sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

δ) Η εξίσωση του δευτέρου κύματος είναι:

$$y = A \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right) \Rightarrow$$

$$y = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi(10t + 10x) \text{ (S.I.)}$$

Η θέση του 4^{ου} δεσμού του στάσιμου κύματος προκύπτει θέτοντας $\kappa = 3$ στη σχέση:

$$x = (2\kappa + 1) \frac{\lambda}{4} \Rightarrow x = 0,175 \text{ m}$$

4.77 α) Η γενική μορφή της εξίσωσης του κύματος είναι:

$$y = A \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

Συγκρίνοντας την παραπάνω εξίσωση του κύματος με αυτήν που δίνεται στην εκφώνηση, για την περίοδο προκύπτει:

$$\frac{t}{T} = 2t \Rightarrow T = 0,5 \text{ s}$$

Ενώ για το μήκος κύματος έχουμε:

$$\frac{x}{\lambda} = x \Rightarrow \lambda = 1 \text{ m}$$

Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v_\delta = \lambda \cdot f = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow v_\delta = \left(\frac{1}{0,5} \right) \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_\delta = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Για τη χρονική στιγμή t_1 έχουμε:

$$t_1 = t_K + \frac{5T}{4} \Rightarrow t_1 = \frac{x_K}{v_\delta} + \frac{5T}{4} \quad \eta$$

$$x_K = v_\delta \left(t_1 - \frac{5T}{4} \right) \Rightarrow x_K = 4 \text{ m}$$

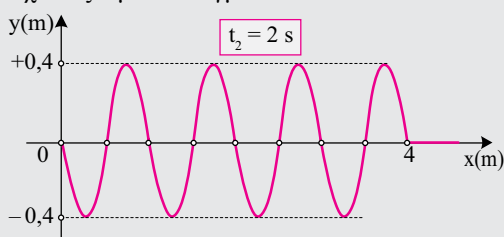
β) Υπολογίζουμε την απόσταση που έχει διανύσει το κύμα μέχρι τη χρονική στιγμή t_2 . Ισχύει:

$$d_2 = v_\delta t_2 \Rightarrow d_2 = 4 \text{ m}$$

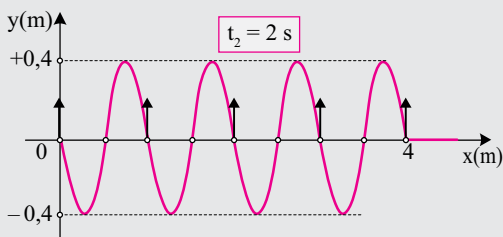
Ισχύει:

$$\frac{d_2}{\lambda} = \frac{4}{1} \Rightarrow d_2 = 4\lambda$$

Σχεδιάζουμε το στιγμιότυπο:



γ)



Από το στιγμιότυπο παρατηρούμε ότι υπάρχουν **4 σημεία** τα οποία έχουν τη χρονική στιγμή t_2 την ίδια απομάκρυνση και την ίδια ταχύτητα με το σημείο Ο ($x_0 = 0$).

δ) Για τη χρονική στιγμή t_3 έχουμε:

$$t_3 = t_K + \frac{3T}{4} \Rightarrow t_3 = \frac{x_K}{v_\delta} + \frac{3T}{4} \Rightarrow t_3 = 2,375 \text{ s}$$

Η φάση του σημείου Ο εκείνη τη χρονική στιγμή είναι:

$$\varphi = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \Rightarrow \varphi_0 = \left[2\pi \left(\frac{2,375}{0,5} - \frac{0}{\lambda} \right) \right] \text{ rad} \Rightarrow \varphi_0 = 9,5\pi \text{ rad}$$

4.78 α) Υπολογίζουμε την ταχύτητα διάδοσης με τη βοήθεια της σχέσης:

$$v_\delta = \frac{x_K}{t_K} \Rightarrow v_\delta = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Με τη βοήθεια του διαγράμματος υπολογίζουμε την περίοδο του κύματος. Προκύπτει:

$$2T = 2\text{ s} \Rightarrow T = 1 \text{ s}$$

Για το μήκος κύματος έχουμε:

$$v_\delta = \frac{\lambda}{T} \text{ ή } \lambda = v_\delta T \Rightarrow \lambda = 2 \text{ m}$$

Η εξίσωση του αρμονικού κύματος είναι:

$$y = A \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \Rightarrow y = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi(t - 0,5x) \text{ (S.I.)}$$

β) Για τη γωνιακή συχνότητα του κύματος έχουμε:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = 2\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Για τον ρυθμό μεταβολής της ορμής ισχύει:

$$\frac{dp}{dt} = \Sigma F = -Dy \Rightarrow \left| \frac{dp}{dt} \right| = \Delta m \cdot \omega^2 |y| \Rightarrow \left| \frac{dp}{dt} \right| = 2 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

γ) Ισχύει:

$$t_1 = t_K + 0,25 \text{ s} \Rightarrow t_1 = 2,25 \text{ s}$$

Για την επιτάχυνση του σημείου Κ τη χρονική στιγμή t_1 έχουμε:

$$\alpha_K = -\omega^2 y_K \Rightarrow \alpha_K = -\omega^2 \eta\mu 2\pi(t_1 - 0,5x_K) \Rightarrow$$

$$\alpha_K = -8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

δ) Από την εφαρμογή της Α.Δ.Ε.Τ. έχουμε:

$$K + U = E_T \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \cdot \Delta m \cdot v_K^2 + \frac{1}{2} \Delta m \cdot \omega^2 y_K^2 = \frac{1}{2} \cdot \Delta m \cdot \omega^2 A^2 \Rightarrow$$

$$y_K = \pm \sqrt{\frac{\omega^2 A^2 - v_K^2}{\omega^2}} \Rightarrow$$

$$y_K = \pm 0,1\sqrt{3} \text{ m}$$

Επειδή η ταχύτητα είναι θετική και το σώμα επιβραδύνεται, η απομάκρυνση είναι θετική και ισχύει:

$$y_K = +0,1\sqrt{3} \text{ m}$$

4.79 α) Από το διάγραμμα προκύπτει:

$$d = 2\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{d}{2} \Rightarrow \lambda = 2 \text{ m}$$

Η περίοδος του κύματος είναι:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = 0,5 \text{ s}$$

Η ταχύτητα διάδοσης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v_\delta = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow v_\delta = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Βρίσκουμε τελικά τη χρονική στιγμή t_1 :

$$d = v_{\delta} t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{d}{v_{\delta}} \Rightarrow t_1 = 1 \text{ s}$$

β) Η εξίσωση του κύματος έχει τη μορφή:

$$y = A \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right) \Rightarrow$$

$$y = 0,4 \cdot \eta\mu 2\pi (2t + 0,5x) \text{ (S.I.)}$$

γ) Η εξίσωση της φάσης του κύματος τη χρονική στιγμή t_1 είναι η εξής:

$$\varphi_{t_1} = 2\pi (2t_1 + 0,5x) \Rightarrow \varphi_{t_1} = 4\pi + \pi x \text{ (S.I.) (1)}$$

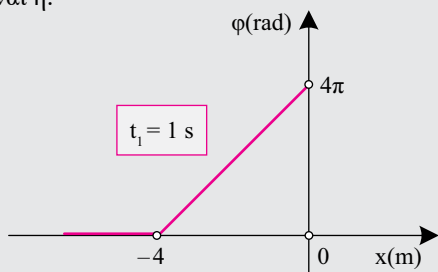
Θέτοντας στη σχέση (1) όπου $\varphi_{t_1} = 0$ προκύπτει:

$$0 = 4\pi + \pi x \Rightarrow x = -4 \text{ m}$$

Θέτοντας στη σχέση (1) όπου $x = 0$ προκύπτει:

$$\varphi_{t_1} = 4\pi \text{ rad}$$

Η γραφική παράσταση της φάσης του κύματος σε συνάρτηση με τη θέση x των υλικών σημείων του ελαστικού μέσου τη χρονική στιγμή t_1 είναι η:



δ) Η φορά της ταχύτητας των **Κ, Μ** είναι **κατακόρυφη προς τα πάνω** ενώ του **Λ** **κατακόρυφη προς τα κάτω**.

4.80 α) Βρίσκουμε τη χρονική στιγμή t_1 :

$$d = v_{\delta} t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{d}{v_{\delta}} \Rightarrow t_1 = 0,5 \text{ s}$$

β) Η εξίσωση της φάσης του κύματος τη χρονική στιγμή t_1 είναι η εξής:

$$\varphi_{t_1} = 2\pi \left(\frac{t_1}{T} + \frac{x}{\lambda} \right) \Rightarrow \varphi_{t_1} = 2\pi \left(\frac{0,5}{T} + \frac{x}{\lambda} \right) \text{ (1)}$$

Θέτοντας στη σχέση (1) όπου $\varphi_{t_1} = 4\pi \text{ rad}$ και $x = 0$ προκύπτει:

$$4\pi = 2\pi \left(\frac{0,5}{T} + \frac{0}{\lambda} \right) \Rightarrow T = 0,25 \text{ s}$$

Για το μήκος κύματος ισχύει:

$$\lambda = v_{\delta} T \Rightarrow \lambda = 2 \text{ m}$$

Η εξίσωση του κύματος θα είναι η:

$$y = A \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right) \Rightarrow$$

$$y = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi (4t + 0,5x) \text{ (S.I.)}$$

γ) Βρίσκουμε τη γωνιακή συχνότητα του κύματος:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = 8\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Το σημείο **Κ** αρχίζει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή:

$$t_K = t_1 \Rightarrow t_K = 0,5 \text{ s}$$

Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας του σημείου **Κ** είναι:

$$v_K = \omega A \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x_K}{\lambda} \right) \Rightarrow$$

$$v_K = 1,6\pi \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi \left(\frac{t}{0,25} - \frac{4}{2} \right) \Rightarrow$$

$$v_K = 1,6\pi \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi (4t - 2) \text{ (S.I.) για } t \geq 0,5 \text{ s}$$

δ) Υπολογίζουμε τη χρονική στιγμή t_2 . Ισχύει:

$$t_2 = t_1 + \frac{T}{2} \Rightarrow t_2 = 0,625 \text{ s}$$

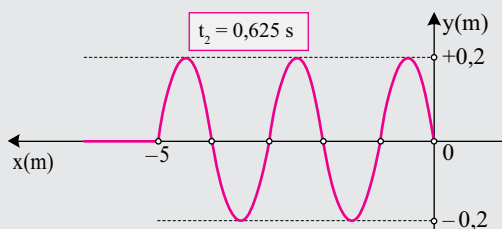
Τη χρονική στιγμή t_2 το κύμα έχει προχωρήσει κατά απόσταση d_2 για την οποία ισχύει:

$$d_2 = v_{\delta} t_2 \Rightarrow d_2 = 5 \text{ m}$$

Συγκρίνουμε την απόσταση d_2 με το μήκος κύματος λ . Προκύπτει:

$$\frac{d_2}{\lambda} = \frac{5}{2} \Rightarrow d_2 = 2,5\lambda$$

Το στιγμιότυπο τη χρονική στιγμή t_2 θα είναι το εξής:



4.81 α) Ισχύει:

$$\Delta t_{\min} = \frac{T}{2} \Rightarrow T = 2 \cdot \Delta t_{\min} \Rightarrow T = 1 \text{ s}$$

β) Έχουμε:

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = 2 \cdot \Delta x \Rightarrow \lambda = 1 \text{ m}$$

Για την ταχύτητα διάδοσης προκύπτει:

$$v_{\delta} = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow v_{\delta} = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Η απόσταση που διανύει το υλικό σημείο στο Ο μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών του ρυθμού μεταβολής της δυναμικής του ενέργειας είναι ίση με το πλάτος της ταλάντωσής του, επομένως $A = 0,2 \text{ m}$. Η εξίσωση του κύματος είναι:

$$y = A \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \Rightarrow y = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi (t - x) \text{ (S.I.)}$$

γ) Η φάση του κύματος τη χρονική στιγμή t_1 είναι:

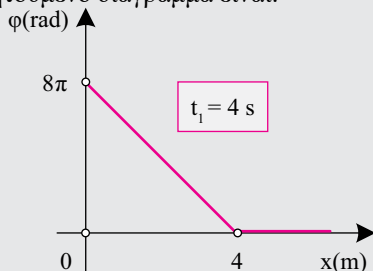
$$\varphi_{t_1} = 2\pi(t_1 - x) \Rightarrow \varphi_{t_1} = 8\pi - 2\pi x \text{ (S.I.) (1)}$$

Θέτοντας στη σχέση (1) όπου $x = 0$ προκύπτει $\varphi_{t_1} = 8\pi \text{ rad}$.

Επίσης, θέτοντας στη σχέση (1) όπου $\varphi_{t_1} = 0$ έχουμε:

$$0 = 8\pi - 2\pi x \Rightarrow x = 4 \text{ m}$$

Το ζητούμενο διάγραμμα είναι:



δ) Ισχύει:

$$y_{\Lambda} = A \cdot \eta\mu \varphi_{\Lambda} \Rightarrow 0,2 = 0,2 \cdot \eta\mu \varphi_{\Lambda} \Rightarrow$$

$$\eta\mu \varphi_{\Lambda} = 1 \Rightarrow \varphi_{\Lambda} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$$

Έχουμε:

$$\varphi_{\Lambda} - \varphi_K = 3\pi \Rightarrow \varphi_K = \varphi_{\Lambda} - 3\pi \Rightarrow$$

$$\varphi_K = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} - 3\pi \Rightarrow \varphi_K = 2\kappa\pi - \frac{5\pi}{2}$$

Τελικά προκύπτει:

$$v_K = \omega A \cdot \sigma\upsilon\nu \varphi_K \Rightarrow v_K = \frac{2\pi}{T} A \cdot \sigma\upsilon\nu \varphi_K \Rightarrow$$

$$v_K = 0$$

4.82 α) Από το διάγραμμα προκύπτει:

$$\frac{T}{2} = 0,25 \text{ s} \Rightarrow T = 0,5 \text{ s}$$

Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι:

$$v_{\delta} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v_{\delta} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Για τη θέση του σημείου Κ έχουμε:

$$t_K = \frac{x_K}{v_{\delta}} \Rightarrow x_K = v_{\delta} t_K \Rightarrow x_K = 4 \text{ m}$$

β) Για το μήκος κύματος έχουμε:

$$\lambda = v_{\delta} T \Rightarrow \lambda = 2 \text{ m}$$

Υπολογίζουμε τη γωνιακή συχνότητα του κύματος:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = 4\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Ισχύει:

$$v_{\max} = \omega A \text{ ή } A = \frac{v_{\max}}{\omega} \Rightarrow A = 0,1 \text{ m}$$

Η χρονική εξίσωση της επιτάχυνσης είναι:

$$a_K = -\omega^2 A \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_K}{\lambda} \right) \Rightarrow$$

$$a_K = -16 \cdot \eta\mu 2\pi (2t - 2) \text{ (S.I.) για } t \geq 1 \text{ s}$$

γ) Ισχύει:

$$t_1 = t_K + T$$

Επομένως το σημείο Κ θα έχει βρεθεί **2 φορές** κατά τη χρονική διάρκεια $t = 0 \rightarrow t_1 = 1,5 \text{ s}$ σε απομάκρυνση $y = -0,05 \text{ m}$.

δ) Ισχύει:

$$t_2 = t_K + T + \frac{3T}{4} \Rightarrow t_2 = t_K + \frac{7T}{4} \Rightarrow t_2 = 1,875 \text{ s}$$

Η φάση του κύματος είναι:

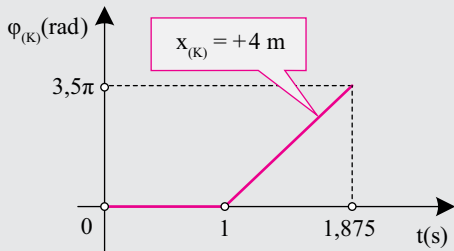
$$\varphi = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \Rightarrow \varphi = 2\pi \left(\frac{t}{0,5} - \frac{x}{2} \right) \Rightarrow$$

$$\varphi = 2\pi (2t - 0,5x) \text{ (S.I.)}$$

Η φάση του σημείου K τη χρονική στιγμή t_2 θα είναι:

$$\varphi_K = 2\pi (2t_2 - 0,5x_K) \Rightarrow \varphi_K = 3,5\pi \text{ rad}$$

Το διάγραμμα της φάσης του σημείου K σε συνάρτηση με τον χρόνο t είναι το εξής:



4.83 α) Ισχύει:

$$d = 2A \Rightarrow A = \frac{d}{2} \Rightarrow A = 0,4 \text{ m}$$

Επίσης, έχουμε:

$$\Delta t = \frac{T}{2} \text{ ή } T = 2 \cdot \Delta t \Rightarrow T = 0,5 \text{ s}$$

β) Προκύπτει:

$$\Delta x = 2\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{\Delta x}{2} \Rightarrow \lambda = 0,2 \text{ m}$$

Για την ταχύτητα διάδοσης έχουμε:

$$v_\delta = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow v_\delta = 0,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

γ) Υπολογίζουμε τη γωνιακή συχνότητα του κύματος:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = 4\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Το σημείο Λ αρχίζει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή:

$$t_\Lambda = \frac{x_\Lambda}{v_\delta} \Rightarrow t_\Lambda = 2,5 \text{ s}$$

Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας του σημείου Λ είναι:

$$v_\Lambda = \omega A \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_K}{\lambda} \right) \Rightarrow$$

$$v_\Lambda = 1,6\pi \cdot \sin 2\pi (2t - 5) \text{ (S.I.)}$$

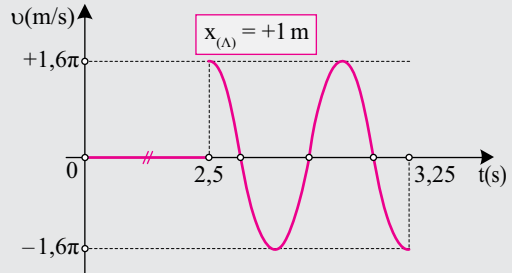
$$\text{για } t \geq 2,5 \text{ s}$$

Στο χρονικό διάστημα από $t = 2,5 \text{ s}$ μέχρι $t' = 3,25 \text{ s}$ υπολογίζουμε τον αριθμό των ταλαντώσεων που θα εκτελέσει η πηγή:

$$N = f \cdot \Delta t \Rightarrow N = \frac{\Delta t}{T} \Rightarrow N = \left(\frac{3,25 - 2,5}{0,5} \right) \text{ ταλ.} \Rightarrow$$

$$N = 1,5 \text{ ταλ.}$$

Το αντίστοιχο διάγραμμα είναι το εξής:



δ) Η αρχική συχνότητα του κύματος είναι:

$$f = \frac{1}{T} \Rightarrow f = 2 \text{ Hz}$$

Η τελική συχνότητα είναι:

$$f' = f - \frac{50}{100} f \Rightarrow f' = 1 \text{ Hz}$$

Η νέα γωνιακή συχνότητα είναι:

$$\omega' = 2\pi f' \Rightarrow \omega' = 2\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Τελικά προκύπτει:

$$\frac{U_{\max, \alpha\rho\chi}}{U_{\max, \tau\epsilon\lambda}} = \frac{\frac{1}{2} m \omega^2 A^2}{\frac{1}{2} m \omega'^2 A^2} \Rightarrow$$

$$\frac{U_{\max, \alpha\rho\chi}}{U_{\max, \tau\epsilon\lambda}} = \frac{(4\pi)^2}{(2\pi)^2} \Rightarrow \frac{U_{\max, \alpha\rho\chi}}{U_{\max, \tau\epsilon\lambda}} = 4$$

4.84 α) Ισχύει:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = 1 \text{ s}$$

Υπολογίζουμε το μήκος κύματος των δύο κυμάτων. Ισχύει:

$$v_\delta = \lambda f \Rightarrow v_\delta = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow \lambda = v_\delta T \Rightarrow \lambda = 0,8 \text{ m}$$

Το κύμα από την πηγή Π_1 φτάνει στο Κ τη χρονική στιγμή:

$$t_1 = \frac{r_1}{v_\delta} \Rightarrow t_1 = 1 \text{ s}$$

Η ταλάντωση που θα εκτελέσει το σημείο Κ λόγω του κύματος που φτάνει από την πηγή Π_1 θα έχει τη μορφή:

$$y_1 = A \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t - r_1}{T - \lambda} \right) \Rightarrow y_1 = 0,4 \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t - 0,8}{1 - 0,8} \right) \Rightarrow$$

$$y_1 = 0,4 \cdot \eta\mu 2\pi(t - 1) \text{ (S.I.) για } t \geq 1 \text{ s}$$

Το κύμα από την πηγή Π_2 φτάνει στο Κ τη χρονική στιγμή:

$$t_2 = \frac{r_2}{v_\delta} \Rightarrow t_2 = 1,5 \text{ s}$$

Η ταλάντωση που θα εκτελέσει το σημείο Κ λόγω του κύματος που φτάνει από την πηγή Π_2 θα έχει τη μορφή:

$$y_2 = A \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t - r_2}{T - \lambda} \right) \Rightarrow y_2 = 0,4 \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t - 1,2}{1 - 0,8} \right) \Rightarrow$$

$$y_2 = 0,4 \cdot \eta\mu 2\pi(t - 1,5) \text{ (S.I.) για } t \geq 1,5 \text{ s}$$

β) Για το σημείο Κ ισχύει:

$$\frac{r_1 - r_2}{\lambda} = \frac{0,8 - 1,2}{0,8} \Rightarrow r_1 - r_2 = -1 \cdot \frac{\lambda}{2} \quad (1)$$

Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι έχουμε ακυρωτική συμβολή με $N = -1$.

γ) Η απομάκρυνση του σημείου Κ τη χρονική στιγμή t υπολογίζεται από τη σχέση:

$$y_K = 0,4 \cdot \eta\mu 2\pi(t - 1) \Rightarrow$$

$$y_K = [0,4 \cdot \eta\mu 2\pi(1,25 - 1)] \text{ m} \Rightarrow y_K = 0,4 \text{ m}$$

δ) Ισχύει:

$$|r_1 - r_2| = N\lambda' \Rightarrow |r_1 - r_2| = N \frac{v_\delta}{f'} \Rightarrow f' = \frac{N v_\delta}{|r_1 - r_2|} \Rightarrow$$

$$f'_{\min} = 0,2 \text{ Hz}$$

4.85 α) Ισχύει:

$$r_1 = v_\delta t_1 \Rightarrow r_1 = 2,5 \text{ m}$$

Επίσης έχουμε:

$$r_2 = v_\delta t_2 \Rightarrow r_2 = 3,5 \text{ m}$$

β) Ισχύει:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = 1 \text{ s}$$

Υπολογίζουμε το μήκος κύματος των δύο κυμάτων. Ισχύει:

$$v_\delta = \lambda f \Rightarrow v_\delta = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow \lambda = v_\delta T \Rightarrow \lambda = 2 \text{ m}$$

Κατά τη χρονική διάρκεια $0 \leq t < 1,25 \text{ s}$ δεν έχει φτάσει κανένα κύμα στο σημείο Σ, επομένως έχουμε $\alpha_\Sigma = 0$.

Κατά τη χρονική διάρκεια $1,25 \text{ s} \leq t < 1,75 \text{ s}$ έχει φτάσει μόνο το πιο κοντινό κύμα στο σημείο Σ, επομένως έχουμε:

$$\alpha_\Sigma = -\omega^2 A \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t - r_1}{T - \lambda} \right) \Rightarrow$$

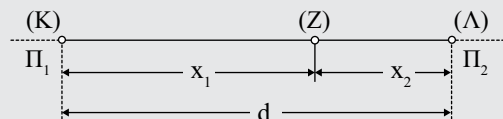
$$\alpha_\Sigma = -4\pi^2 \cdot 0,5 \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t - 2,5}{1 - 2} \right)$$

$$\text{ή } \alpha_\Sigma = 20 \cdot \eta\mu 2\pi(t - 1,25) \text{ (S.I.)}$$

Μετά τη χρονική στιγμή $t = 1,75 \text{ s}$ ο φελλός ακινητοποιείται, επομένως ισχύει:

$$\alpha_\Sigma = 0$$

γ)



Έστω ένα σημείο Z ενισχυτικής συμβολής του ευθύγραμμου τμήματος ΚΛ.

Για το Z ισχύει:

$$x_1 - x_2 = N\lambda \quad (1)$$

Επίσης έχουμε:

$$x_1 + x_2 = d \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) έχουμε:

$$x_1 = N\frac{\lambda}{2} + \frac{d}{2} \Rightarrow x_1 = N + 3,5$$

Προκύπτει:

$$0 \leq x_1 \leq d \Rightarrow 0 \leq N\frac{\lambda}{2} + \frac{d}{2} \leq d \Rightarrow$$

$$0 \leq N + 3,5 \leq 7 \Rightarrow -3,5 \leq N \leq 3,5$$

Επομένως υπάρχουν **7** σημεία ενισχυτικής συμβολής στις παρακάτω θέσεις:

$$N = -3, x_1 = 0,5$$

$$N = -2, x_1 = 1,5 \text{ m}$$

$$N = -1, x_1 = 2,5 \text{ m}$$

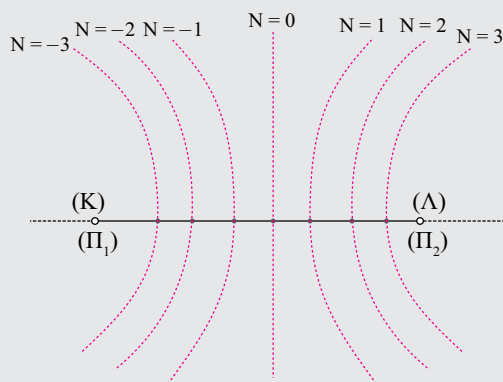
$$N = 0, x_1 = 3,5 \text{ m}$$

$$N = 1, x_1 = 4,5 \text{ m}$$

$$N = 2, x_1 = 5,5 \text{ m}$$

$$N = 3, x_1 = 6,5 \text{ m}$$

Σχεδιάζουμε τις υπερβολές ενισχυτικής συμβολής:



δ) Υπολογίζουμε την απομάκρυνση του φελλού τη χρονική στιγμή $t_3 = 1,5 \text{ s}$. Ισχύει:

$$y_\Sigma = A \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t_3}{T} - \frac{r_1}{\lambda} \right) \Rightarrow y_\Sigma = 0,5 \text{ m}$$

Η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης του φελλού είναι:

$$U = \frac{1}{2} D y_\Sigma^2 \Rightarrow U = \frac{1}{2} \Delta m \cdot \omega^2 y_\Sigma^2 \Rightarrow U = 0,01 \text{ J}$$

4.86 α) Συγκρίνουμε την εξίσωση του στάσιμου κύματος με τη γενική μορφή της:

$$y = 2A \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi \frac{x}{\lambda} \cdot \eta\mu 2\pi \frac{t}{T}$$

Προκύπτει:

$$2A = 0,8 \text{ m} \Rightarrow A = 0,4 \text{ m}$$

Επίσης ισχύει:

$$2\pi \frac{x}{\lambda} = 20\pi x \Rightarrow \lambda = 0,1 \text{ m}$$

και:

$$2\pi \frac{t}{T} = 10\pi t \Rightarrow T = 0,2 \text{ s}$$

Για τις εξισώσεις των δύο κυμάτων έχουμε:

$$y_1 = A\eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \Rightarrow y_1 = 0,4\eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{0,2} - \frac{x}{0,1} \right) \Rightarrow$$

$$y_1 = 0,4\eta\mu 2\pi (5t - 10x) \text{ (S.I.)}$$

και:

$$y_2 = 0,4\eta\mu 2\pi (5t + 10x) \text{ (S.I.)}$$

β) Υπολογίζω τη γωνιακή συχνότητα του κύματος:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = 10\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Για την ταχύτητα του σημείου Z τη χρονική στιγμή t_1 προκύπτει:

$$v_Z = \omega 2A \sigma\upsilon\nu 2\pi \frac{x_Z}{\lambda} \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi \frac{t_1}{T} \Rightarrow v_Z = 4\pi \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

γ) Για τις κοιλίες ισχύει:

$$x_K = N\frac{\lambda}{2} \Rightarrow x_K = 0,05 \text{ N}$$

Ισχύει:

$$0 < x_K < x_\Lambda \Rightarrow 0 < 0,05N < 0,3 \Rightarrow 0 < N < 6$$

Επομένως το N μπορεί να πάρει τις τιμές 1, 2, 3, 4, 5 (**5 κοιλίες**).

δ) Γενικά, ισχύει:

$$\frac{y_{\Lambda}}{y_{\Sigma}} = \frac{0,8 \sin 20\pi x_{\Lambda} \cdot \eta \mu 10\pi t}{0,8 \sin 20\pi x_{\Sigma} \cdot \eta \mu 10\pi t} \Rightarrow$$

$$\frac{y_{\Lambda}}{y_{\Sigma}} = \frac{\sin(20\pi \cdot 0,3)}{\sin(20\pi \cdot 0,35)} \Rightarrow \frac{y_{\Lambda}}{y_{\Sigma}} = -1$$

Το σημείο Σ έχει πλάτος:

$$A_{\Sigma} = |0,8 \sin(20\pi \cdot 0,35)| \Rightarrow A_{\Sigma} = 0,8 \text{ m}$$

(κοιλία)

Επομένως όταν $y_{\Sigma} = -0,8 \text{ m}$ για το σημείο Λ έχουμε:

$$y_{\Lambda} = -y_{\Sigma} \Rightarrow y_{\Lambda} = +0,8 \text{ m}$$

4.87 α) Ισχύει:

$$d = 4A \Rightarrow A = \frac{d}{4} \Rightarrow A = 0,2 \text{ m}$$

Επίσης, έχουμε:

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = 2 \cdot \Delta x \Rightarrow \lambda = 0,1 \text{ m}$$

Για την περίοδο T, προκύπτει:

$$f = \frac{N}{\Delta t} \Rightarrow \frac{1}{T} = \frac{N}{\Delta t} \Rightarrow T = \frac{\Delta t}{N} \Rightarrow T = 0,2 \text{ s}$$

Η εξίσωση του στάσιμου κύματος είναι:

$$y = 2A \cdot \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \cdot \eta \mu 2\pi \frac{t}{T} \Rightarrow$$

$$y = 2 \cdot 0,2 \cdot \sin 2\pi \frac{x}{0,1} \cdot \eta \mu 2\pi \frac{t}{0,2} \Rightarrow$$

$$y = 0,4 \sin 20\pi x \cdot \eta \mu 10\pi t \text{ (S.I.)}$$

β) Ισχύει:

$$L = \frac{3\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} \Rightarrow L = \frac{7\lambda}{4} \Rightarrow L = 0,175 \text{ m}$$

γ) Από την εφαρμογή της Α.Δ.Ε_T για την ταλάντωση του Ο, έχουμε (με απόδειξη):

$$|v| = \omega \sqrt{A_0^2 - y_0^2} \Rightarrow |v| = 2\pi\sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

δ) Προκύπτει:

$$\frac{6\lambda'}{2} + \frac{\lambda'}{4} = \frac{3\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} \Rightarrow 3,25\lambda' = 1,75\lambda \Rightarrow$$

$$3,25 \frac{v_{\delta}}{f'} = 1,75 \frac{v_{\delta}}{f} \Rightarrow f' = \frac{13}{7} f$$

Το ζητούμενο ποσοστό επί τοις εκατό θα είναι:

$$\Pi(\%) = \frac{f' - f}{f} \cdot 100\% \Rightarrow \Pi(\%) = \frac{13}{7} \frac{f - f}{f} \cdot 100\% \Rightarrow$$

$$\Pi(\%) = \frac{600}{7} \%$$

4.88 α) Από την εξίσωση του αρμονικού κύματος έχουμε:

$$\frac{t}{T} = 0,2t \Rightarrow T = 5 \text{ s}$$

Επίσης έχουμε:

$$\frac{x}{\lambda} = 2x \Rightarrow \lambda = 0,5 \text{ m}$$

Η εξίσωση του στάσιμου κύματος που προκύπτει είναι η εξής:

$$y = 2A \cdot \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \cdot \eta \mu 2\pi \frac{t}{T} \Rightarrow$$

$$y = 0,4 \cdot \sin 4\pi x \cdot \eta \mu 0,4\pi t \text{ (S.I.)}$$

β) Οι θέσεις των δεσμών υπολογίζονται από την εξίσωση:

$$x_{\delta} = (2N + 1) \frac{\lambda}{4} \quad (1)$$

Θέτοντας στη σχέση (1) όπου $N = 4$, προκύπτει:

$$x_{\delta} = \left[(2 \cdot 4 + 1) \frac{0,5}{4} \right] \text{ m} \Rightarrow x_{\delta} = 1,125 \text{ m}$$

γ) Βρίσκουμε τις θέσεις των κοιλιών και των δεσμών για το τμήμα ΟΚ.

Για τις κοιλίες ισχύει:

$$x_{\kappa} = N \frac{\lambda}{2} \Rightarrow x_{\kappa} = 0,25 N \quad (2)$$

Θέτοντας στη σχέση (2) όπου $N = 0, 1, 2, 3, 4$ βρίσκουμε τις θέσεις:

$$0 - 0,25 \text{ m} - 0,5 \text{ m} - 0,75 \text{ m} - 1 \text{ m}$$

Για τους δεσμούς θέτοντας στη σχέση (1) όπου $N = 0, 1, 2, 3, 4$ έχουμε:

$$0,125 \text{ m} - 0,375 \text{ m} - 0,625 \text{ m} - 0,875 \text{ m}$$

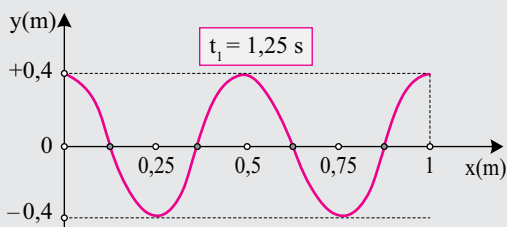
Υπολογίζουμε την απομάκρυνση της κοιλίας στο σημείο Ο τη χρονική στιγμή $t_1 = 1,25 \text{ s}$.

Προκύπτει:

$$y_0 = [0,4 \cdot \sin(4\pi \cdot 0) \cdot \eta \mu(0,4\pi \cdot 1,25)] \text{ m}$$

$$\text{ή } y_0 = 0,4 \text{ m}$$

Σχεδιάζουμε το ζητούμενο στιγμιότυπο:



δ) Η 5^η κοιλία βρίσκεται στη θέση $x = 1$ m. Υπολογίζουμε τη γωνιακή συχνότητα του κύματος. Ισχύει:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = 0,4\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Η χρονική εξίσωση της επιτάχυνσης της συγκεκριμένης κοιλίας είναι:

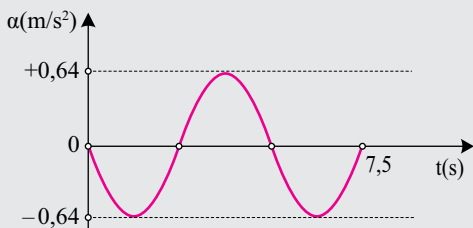
$$a = -\omega^2 2A \cdot \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \cdot \eta \mu 2\pi \frac{t}{T} \Rightarrow$$

$$a = -0,64 \cdot \eta \mu 0,4\pi t \text{ (S.I.)}$$

Σε χρονική διάρκεια $\Delta t = 7,5$ s η συγκεκριμένη κοιλία εκτελεί:

$$N = \frac{\Delta t}{T} \Rightarrow N = 1,5 \text{ ταλ.}$$

Το ζητούμενο διάγραμμα είναι το παρακάτω:



4.89 α) Συγκρίνοντας την εξίσωση της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου που δίνεται, με τη γενική μορφή:

$$E = E_{\max} \cdot \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

προκύπτει:

$$\frac{t}{T} = 6 \cdot 10^{10} t \Rightarrow T = \frac{1}{6} \cdot 10^{-10} \text{ s}$$

Για τη συχνότητα ισχύει:

$$f = \frac{1}{T} \Rightarrow f = 6 \cdot 10^{10} \text{ Hz}$$

Επίσης έχουμε:

$$\frac{x}{\lambda} = 4 \cdot 10^2 x \Rightarrow \lambda = 0,25 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

Για την ταχύτητα διάδοσης έχουμε:

$$v_{\delta} = \lambda f \Rightarrow v_{\delta} = 1,5 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

β) Έχουμε:

$$\frac{E_{\max}}{B_{\max}} = v_{\delta} \Rightarrow B_{\max} = \frac{E_{\max}}{v_{\delta}} \Rightarrow$$

$$B_{\max} = \frac{10}{3} \cdot 10^{-11} \text{ T}$$

Η εξίσωση της έντασης του μαγνητικού πεδίου θα έχει τη μορφή:

$$B = \frac{10}{3} \cdot 10^{-11} \cdot \eta \mu 2\pi (6 \cdot 10^{10} t - 4 \cdot 10^2 x) \text{ (S.I.)}$$

γ) Θέτουμε στην εξίσωση της έντασης του μαγνητικού πεδίου του κύματος όπου $t = \frac{1}{72} \cdot 10^{-10} \text{ s}$ και $x = 0$. Προκύπτει:

$$B = \left[\frac{10}{3} \cdot 10^{-11} \cdot \eta \mu 2\pi \left(6 \cdot 10^{10} \cdot \frac{1}{72} \cdot 10^{-10} - 0 \right) \right] \text{ T}$$

$$\text{ή } B = \frac{5}{3} \cdot 10^{-11} \text{ T}$$

δ) Υπολογίζουμε το μήκος κύματος στο κενό. Ισχύει:

$$c = \lambda_0 f \Rightarrow \lambda_0 = \frac{c}{f} \Rightarrow \lambda_0 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Η μέγιστη τιμή της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου κατά τη διάδοση στο κενό είναι:

$$E_{\max,0} = E_{\max} + \frac{10}{100} E_{\max} \Rightarrow E_{\max,0} = \frac{110}{100} E_{\max} \Rightarrow$$

$$\text{ή } E_{\max,0} = 5,5 \cdot 10^{-3} \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

Η μέγιστη τιμή της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου κατά τη διάδοση στο κενό υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\frac{E_{\max,0}}{B_{\max,0}} = c \Rightarrow B_{\max,0} = \frac{E_{\max,0}}{c} \Rightarrow$$

$$B_{\max,0} = \frac{11}{6} \cdot 10^{-11} \text{ T}$$

Η εξίσωση της έντασης του μαγνητικού πεδίου όταν το ηλεκτρομαγνητικό κύμα διαδίδεται στο κενό θα είναι τελικά:

$$B_0 = B_{\max,0} \cdot \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda_0} \right) \Rightarrow$$

$$B_0 = \frac{11}{6} \cdot 10^{-11} \cdot \eta \mu 2\pi (6 \cdot 10^{10} t - 2 \cdot 10^2 x) \text{ (S.I.)}$$

ΘΕΜΑ Δ

4.90 α) Από τη σύγκριση των εξισώσεων:

$$v = 1,6\pi \cdot \sigma \nu 2\pi (2t - 0,5x) \text{ (S.I.)}$$

Και:

$$v = \omega A \cdot \sigma \nu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

Έχουμε:

$$\frac{t}{T} = 2t \Rightarrow T = 0,5 \text{ s και } \frac{x}{\lambda} = 0,5x \Rightarrow \lambda = 2 \text{ m}$$

Ισχύει:

$$f = \frac{1}{T} \Rightarrow f = 2 \text{ Hz}$$

Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι:

$$v_\delta = \lambda f \Rightarrow v_\delta = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Επίσης ισχύει:

$$\omega = 2\pi f \Rightarrow \omega = 4\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Προκύπτει:

$$v_{\max} = \omega A \Rightarrow A = \frac{v_{\max}}{\omega} \Rightarrow A = 0,4 \text{ m}$$

Τελικά έχουμε:

$$\alpha_{\max} = \omega^2 A \Rightarrow \alpha_{\max} = 64 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

β) Το σημείο Z αρχίζει ταλάντωση τη χρονική στιγμή:

$$t_z = \frac{x_z}{v_\delta} \Rightarrow t_z = 0,25 \text{ s}$$

Η ταχύτητά του εκείνη τη χρονική στιγμή είναι:

$$v_z = \left[1,6\pi \cdot \sigma \nu 2\pi (2 \cdot 2 - 0,5 \cdot 1) \right] \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow$$

$$v_z = -1,6\pi \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Η κινητική του ενέργεια είναι:

$$K = \frac{1}{2} \cdot \Delta m \cdot v_z^2 \Rightarrow K = 0,128 \text{ J}$$

γ) Ισχύει:

$$\Delta\phi = 2\pi \frac{\Delta x}{\lambda} \Rightarrow \Delta\phi = 2\pi \frac{(x_\Sigma - x_z)}{\lambda} \Rightarrow \Delta\phi = \pi \text{ rad}$$

Έχουμε:

$$y_z = -A \Rightarrow A \cdot \eta \mu \phi_z = -A \text{ ή}$$

$$\eta \mu \phi_z = -1 \Rightarrow \phi_z = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{2}$$

Προκύπτει:

$$\Delta\phi = \phi_z - \phi_\Sigma \Rightarrow \pi = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{2} - \phi_\Sigma \Rightarrow$$

$$\phi_\Sigma = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$$

Τελικά έχουμε:

$$v_\Sigma = v_{\max} \cdot \sigma \nu \eta \mu \phi_\Sigma \Rightarrow$$

$$v_\Sigma = v_{\max} \cdot \sigma \nu \left(2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow$$

$$v_\Sigma = 0$$

δ) Ισχύει:

$$U = \frac{1}{2} D y^2 \Rightarrow U = \frac{1}{2} \cdot \Delta m \cdot \omega^2 y^2 \Rightarrow$$

$$U = \frac{1}{2} \cdot 10^{-2} \cdot 16 \cdot \pi^2 \cdot 16 \cdot 10^{-2} \eta \mu^2 2\pi (2t - 0,5) \Rightarrow$$

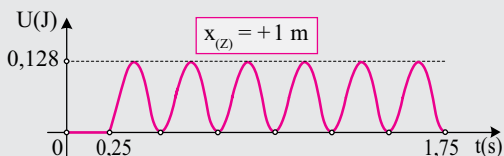
$$U = 0,128 \cdot \eta \mu^2 2\pi (2t - 0,5) \text{ (S.I.)}$$

$$\text{για } t \geq 0,25 \text{ s}$$

Ισχύει:

$$N = \frac{\Delta t}{T} \Rightarrow N = \frac{1,75 \text{ s} - 0,25 \text{ s}}{0,5 \text{ s}} \Rightarrow N = 3 \text{ ταλ.}$$

Το ζητούμενο διάγραμμα είναι το εξής:



4.91 α) Ισχύει:

$$\Delta t = t_2 - t_1 \Rightarrow \Delta t = \frac{r_2}{v_\delta} - \frac{r_1}{v_\delta} \Rightarrow$$

$$r_2 = v_\delta \cdot \left(\Delta t + \frac{r_1}{v_\delta} \right) \Rightarrow r_2 = 2\text{ m}$$

β) Υπολογίζουμε το μήκος κύματος των δύο κυμάτων. Ισχύει:

$$v_\delta = \lambda f \Rightarrow v_\delta = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow \lambda = v_\delta T \Rightarrow \lambda = 2\text{ m}$$

Για το σημείο Σ προκύπτει:

$$\frac{r_1 - r_2}{\lambda} = \frac{1 - 2}{2} \Rightarrow r_1 - r_2 = -\frac{\lambda}{2} \quad (1)$$

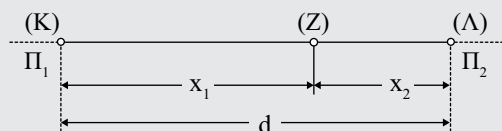
Η σχέση (1) είναι της μορφής:

$$r_1 - r_2 = (2N + 1) \frac{\lambda}{2} \text{ με } N = -1$$

Επομένως το Σ είναι σημείο **ακυρωτικής συμβολής**.

γ) Ισχύει:

$$d = r_1 + r_2 \Rightarrow d = 3\text{ m}$$



Έστω ένα σημείο Z ακυρωτικής συμβολής του ευθύγραμμου τμήματος ΚΛ.

Για το Z ισχύει:

$$x_1 - x_2 = (2N + 1) \frac{\lambda}{2} \quad (2)$$

Επίσης έχουμε:

$$x_1 + x_2 = d \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (2), (3) έχουμε:

$$x_1 = (2N + 1) \frac{\lambda}{4} + \frac{d}{2} \Rightarrow x_1 = (2N + 1) \cdot 0,5 + 1,5$$

Προκύπτει:

$$0 \leq x_1 \leq d \Rightarrow 0 \leq (2N + 1) \cdot 0,5 + 1,5 \leq 3$$

$$\text{ή } -2 < N < 1 \text{ άρα } N = -1, 0$$

Επομένως υπάρχουν **2 σημεία ακυρωτικής συμβολής** στο ΚΛ.

δ) Στο σημείο Μ τα δύο κύματα συμβάλλουν ταυτόχρονα τη χρονική στιγμή:

$$t = \frac{d}{v_\delta} \Rightarrow t = 3\text{ s}$$

Πριν τη χρονική στιγμή $t = 3\text{ s}$ το Μ θα είναι ακίνητο ενώ επειδή ανήκει στη μεσοκάθετο, αμέσως μετά τη χρονική στιγμή $t = 3\text{ s}$ (όπου και συμβάλλουν τα δύο κύματα) θα είναι σημείο ενισχυτικής συμβολής. Κατά τη χρονική διάρκεια $t_0 = 0 \rightarrow t_3 = 8\text{ s}$ το Μ θα εκτελεί:

$$N = \frac{\Delta t}{T} \Rightarrow N = \frac{8\text{ s} - 3\text{ s}}{4} \Rightarrow N = 1,25 \text{ ταλ.}$$

Το ζητούμενο διάγραμμα είναι το εξής:



Το σημείο Σ πριν τη χρονική στιγμή

$$t_1 = \frac{r_1}{v_\delta} = 2\text{ s} \text{ είναι ακίνητο, ενώ από τη χρονική}$$

στιγμή t_1 μέχρι τη χρονική στιγμή

$$t_2 = \frac{r_2}{v_\delta} = 4\text{ s} \text{ (όπου έχει φτάσει μόνο το κύμα}$$

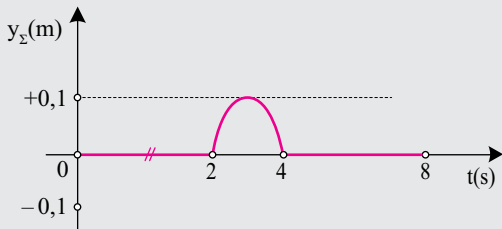
από την πηγή Π_1) ταλαντώνεται με πλάτος $A = A_M/2 = 0,1\text{ m}$.

Κατά τη χρονική διάρκεια $t_1 \rightarrow t_2$ το Σ θα εκτελεί:

$$N = \frac{\Delta t}{T} \Rightarrow N = \frac{4\text{ s} - 2\text{ s}}{4} \Rightarrow N = 0,5 \text{ ταλ}$$

Επειδή είναι σημείο ακυρωτικής συμβολής αμέσως μετά τη χρονική στιγμή t_2 θα παραμείνει ακίνητο.

Το ζητούμενο διάγραμμα είναι το εξής:



4.92 α) Από το στιγμιότυπο του κύματος προκύπτει:

$$A = 0,05 \text{ m}$$

$$\frac{9\lambda}{4} = 1,8\text{m} \Rightarrow \lambda = 0,8 \text{ m}$$

Σύμφωνα με τον θεμελιώδη νόμο της κυματικής έχουμε:

$$v_\delta = \lambda f \Rightarrow f = \frac{v_\delta}{\lambda} \Rightarrow f = 2,5\text{Hz} \Rightarrow$$

$$T = \frac{1}{f} \Rightarrow T = 0,4 \text{ s}$$

Η εξίσωση του κύματος είναι η εξής:

$$y = A \cdot \eta\mu \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right] \Rightarrow$$

$$y = 0,05 \cdot \eta\mu (5\pi t - 2,5\pi x) \text{ (S.I.)}$$

β) Για τη χρονική στιγμή t_1 έχουμε:

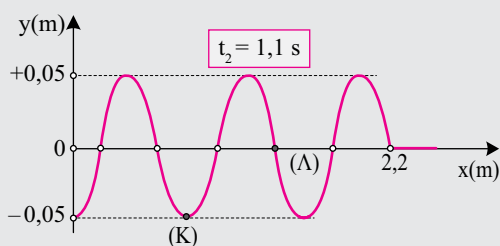
$$t_1 = \frac{x_1}{v_\delta} \Rightarrow t_1 = 0,9 \text{ s}$$

άρα, η χρονική στιγμή $t_2 = t_1 + \frac{T}{2} \Rightarrow t_2 = 1,1 \text{ s}$

Στον χρόνο αυτό το κύμα έχει διαδοθεί κατά

$$x_2 = v_\delta \cdot t_1 = 2,2\text{m} \Rightarrow x_2 = 2\lambda + \frac{3\lambda}{4}.$$

Το στιγμιότυπο φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Από το στιγμιότυπο προκύπτει ότι τα σημεία του ομογενούς ελαστικού μέσου που είναι ακίνητα την ίδια στιγμή είναι **6**.

γ) Τη χρονική στιγμή $t_2 = 1,1 \text{ s}$ οι ταχύτητες ταλάντωσης των σημείων (Κ) είναι $v_{(K)} = 0$ και (Λ) είναι:

$$v_{(\Lambda)} = +v_{\max} = \omega \cdot A = \frac{2\pi}{T} \cdot A \Rightarrow v_{(\Lambda)} = 0,25\pi \text{ m/s}$$

όπως προκύπτει από το στιγμιότυπο.

δ) Η διαφορά φάσης των σημείων (Κ) και (Λ) είναι:

$$\Delta\phi_{\text{KL}} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \Delta x_{\text{KL}} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{3\lambda}{4} = \frac{3\pi}{2} \text{ rad} \Rightarrow$$

$$\phi_K - \phi_\Lambda = \frac{3\pi}{2} \text{ rad} \Rightarrow \phi_K = \phi_\Lambda + \frac{3\pi}{2} \text{ rad}$$

Τη χρονική στιγμή κατά την οποία το υλικό σημείο (Λ) βρίσκεται στη θέση $y = +0,025 \text{ m}$ έχουμε:

$$y_\Lambda = 0,05 \cdot \eta\mu\phi_\Lambda \Rightarrow 0,025 = 0,05 \cdot \eta\mu\phi_\Lambda \Rightarrow$$

$$\eta\mu\phi_\Lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{συν}\phi_\Lambda = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Αφού κινείται προς την ακραία θετική θέση της ταλάντωσής του τότε:

$$v_\Lambda > 0 \Rightarrow v_{\max} \cdot \text{συν}\phi_\Lambda > 0 \Rightarrow \text{συν}\phi_\Lambda > 0$$

$$\text{άρα, } \text{συν}\phi_\Lambda = +\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Η απομάκρυνση του υλικού σημείου (Κ) την ίδια χρονική στιγμή είναι:

$$y_K = 0,05 \cdot \eta\mu\phi_K \Rightarrow y_K = 0,05 \cdot \eta\mu \left(\phi_\Lambda + \frac{3\pi}{2} \right) \Rightarrow$$

$$y_K = -0,025\sqrt{3} \text{ m}$$

4.93 α) Από το διάγραμμα που δίνεται ισχύει:

$$\Delta t = t_1 - t_2 \Rightarrow \frac{3T}{2} = 1,1 - 0,8 \Rightarrow T = 0,2s \Rightarrow$$

$$f = \frac{1}{T} \Rightarrow f = 5 \text{ Hz}$$

Υπολογίζουμε το μήκος κύματος των δύο κυμάτων. Ισχύει:

$$v_\delta = \lambda f \Rightarrow v_\delta = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow \lambda = v_\delta T \Rightarrow \lambda = 0,6 \text{ m}$$

β) Για τις αποστάσεις r_1 και r_2 του φελλού από τις δύο πηγές Π_1 και Π_2 αντίστοιχα έχουμε:

$$r_1 = v_\delta t_1 \Rightarrow r_1 = 3,3 \text{ m}$$

Επίσης έχουμε:

$$r_2 = v_\delta t_2 \Rightarrow r_2 = 2,4 \text{ m}$$

Στο φελλό έχουμε απόσβεση από τη χρονική στιγμή που φτάνουν σε αυτόν και τα δύο κύματα αφού παρατηρούμε ότι το πλάτος του μηδενίζεται από τη χρονική στιγμή 1,1 s και μετά.

γ) Έστω d_1 και d_2 οι αποστάσεις του σημείου (Z) από τις δύο πηγές. Αφού ανήκει στην ίδια υπερβολή απόσβεσης με το σημείο (Σ), ισχύει:

$$d_1 - d_2 = r_1 - r_2 = 3,3 - 2,4 = 0,9 \text{ m}$$

Το σημείο (Z) σταματάει την ταλάντωση του μια περίοδο πριν σταματήσει την ταλάντωσή του ο φελλός δηλαδή τη χρονική στιγμή:

$$t'_1 = t_1 - T = 0,9s$$

Εκείνη τη στιγμή στο σημείο (Z) φτάνει το κύμα από την πηγή Π_1 (αφού είναι πιο μακριά από το σημείο (Z)). Η απόστασή του d_1 από την πηγή Π_1 είναι $d_1 = v_\delta t'_1 \Rightarrow d_1 = 2,7 \text{ m}$

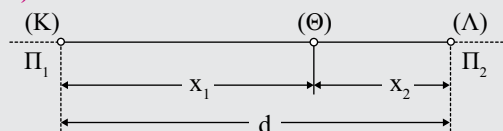
Έτσι έχουμε

$$d_1 - d_2 = 0,9m \Rightarrow d_2 = d_1 - 0,9m \Rightarrow d_2 = 1,8m$$

Η απόσταση των δύο πηγών είναι:

$$d = d_1 + d_2 \Rightarrow d = 4,5 \text{ m}$$

δ)



Έστω ένα σημείο (Θ) ενισχυτικής συμβολής του ευθύγραμμου τμήματος (ΚΛ).

Για το (Θ) ισχύει:

$$x_1 - x_2 = N\lambda \quad (1)$$

Επίσης έχουμε:

$$x_1 + x_2 = d \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) έχουμε:

$$x_1 = N \frac{\lambda}{2} + \frac{d}{2} \Rightarrow x_1 = 0,3N + 2,25$$

Προκύπτει:

$$0 \leq x_1 \leq d \Rightarrow 0 \leq 0,3N + 2,25 \leq 4,5 \Rightarrow$$

$$-7,5 \leq N \leq 7,5$$

Επομένως υπάρχουν 15 σημεία ενισχυτικής συμβολής

4.94 α) Το σημείο (Κ) παραμένει διαρκώς ακίνητο μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1 = 0,4 \text{ s}$ που φτάνει σε αυτό το κύμα από την πηγή Π_1 .

$$\text{Ισχύει: } v_\delta = \frac{r_1}{t_1} \Rightarrow v_\delta = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{Έχουμε: } v_\delta = \lambda f \Rightarrow \lambda = \frac{v_\delta}{f} \Rightarrow \lambda = 0,4 \text{ m}$$

β) Τα κύματα από τις δύο πηγές Π_1 και Π_2 φτάνουν στο σημείο (Κ) τις χρονικές στιγμές $t_1 = 0,4 \text{ s}$ και $t_2 = \frac{r_2}{v_\delta} = 0,8 \text{ s}$.

Το πλάτος της ταλάντωσης του σημείου (Κ) τη χρονική στιγμή 0,5 s είναι $A_{(K)} = 0,2 \text{ m}$ αφού αυτό ταλαντώνεται μόνο εξαιτίας του ενός κύματος από την πηγή Π_1 .

Τη χρονική στιγμή 1 s έχει αρχίσει το φαινόμενο της συμβολής στο σημείο (Κ). Ισχύει:

$$r_1 - r_2 = 0,8 - 1,6 = -0,8m = -2 \cdot 0,4m$$

οπότε, ικανοποιείται η συνθήκη ενίσχυσης $r_1 - r_2 = N\lambda$ με $N = -2$ άρα, το σημείο (Κ) ταλαντώνεται με μέγιστο πλάτος

$$A'_{(K)} = 2A \Rightarrow A'_{(K)} = 0,4 \text{ m}$$

γ) Μετά τη συμβολή των 2 κυμάτων στο σημείο (Λ) έχουμε:

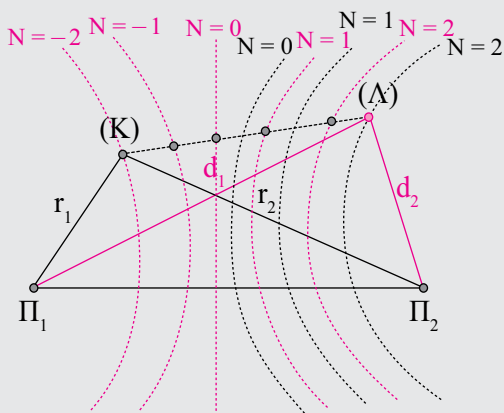
$$d_1 - d_2 = 2,4 - 1,4 = 1\text{ m} \Rightarrow$$

$$d_1 - d_2 = (2N + 1) \cdot \frac{0,4}{2}$$

οπότε, ικανοποιείται η συνθήκη απόσβεσης $d_1 - d_2 = (2N + 1) \frac{\lambda}{2}$ με $N = 2$ άρα, το σημείο

(Λ) παραμένει ακίνητο, δηλαδή $A_{(\Lambda)} = 0$

δ) Τα σημεία που βρίσκονται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα (ΚΛ) τα οποία ταλαντώνονται με το ίδιο πλάτος που ταλαντώνεται και το σημείο (Κ) μετά την έναρξη της συμβολής, είναι τα σημεία στα οποία έχω το φαινόμενο της ενίσχυσης και όπως φαίνεται από το παρακάτω σχήμα αυτά είναι 5 σημεία.



ε) Για να παραμένει διαρκώς ακίνητο μετά την έναρξη της συμβολής το σημείο (Κ), θα πρέπει σε αυτό να έχω απόσβεση, δηλαδή πρέπει:

$$r_1 - r_2 = (2N + 1) \frac{\lambda'}{2} \Rightarrow r_1 - r_2 = (2N + 1) \frac{v_\delta}{2f'} \Rightarrow$$

$$f' = (2N + 1) \frac{v_\delta}{2|r_1 - r_2|} \Rightarrow f' = (2N + 1) \cdot 1,25$$

$$\text{με } N = 0, 1, 2, \dots$$

άρα, $f' = 1,25 \text{ Hz}, 3,75 \text{ Hz}, 6,25 \text{ Hz}, 8,75 \text{ Hz}, \dots$

Το ελάχιστο ποσοστό αύξησης της συχνότητας των δύο κυμάτων είναι

$$\Pi\% = \frac{f' - f}{f} \cdot 100\% \Rightarrow \Pi\% = 25\%$$

4.95 α) Από τις εξισώσεις των αρμονικών κυμάτων έχουμε:

$$\frac{2\pi t}{T} = 10\pi t \Rightarrow T = 0,2 \text{ s}$$

Επίσης έχουμε:

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = 5\pi x \Rightarrow \lambda = 0,4 \text{ m}$$

Η εξίσωση του στάσιμου κύματος που προκύπτει είναι η εξής:

$$y = 2A \cdot \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \cdot \sin 2\pi \frac{t}{T} \Rightarrow$$

$$y = 0,2 \cdot \sin 5\pi x \cdot \sin 10\pi t \text{ (S.I.)}$$

β) Για το πλάτος του σημείου (Κ) ($x_K = -0,3 \text{ m}$) έχουμε:

$$A_K = |0,2 \cdot \sin(5\pi x_K)| = |0,2 \cdot \sin(5\pi \cdot (-0,3))| \Rightarrow$$

$$A_K = 0 \text{ (δεσμός)}$$

Για το πλάτος του σημείου (Λ) ($x_\Lambda = +0,6 \text{ m}$) έχουμε:

$$A_\Lambda = |0,2 \cdot \sin(5\pi x_\Lambda)| = |0,2 \cdot \sin(5\pi \cdot (+0,6))| \Rightarrow$$

$$A_\Lambda = 0,2 \text{ m (κοιλία)}$$

γ) Οι θέσεις των δεσμών υπολογίζονται από την εξίσωση:

$$x_\delta = (2N + 1) \frac{\lambda}{4} = 0,2N + 0,1 \quad (1)$$

Θέλω:

$$x_K \leq x_\delta \leq x_\Lambda \Rightarrow -0,3 \leq 0,2N + 0,1 \leq +0,6 \Rightarrow$$

$$-2 \leq N \leq 2,5$$

Άρα, $N = -2, -1, 0, 1, 2$

Βρίσκουμε τις θέσεις των δεσμών πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα (ΚΛ) θέτοντας στη σχέση (1) όπου $N = -2, -1, 0, 1, 2$ και έχουμε $-0,3 \text{ m}, -0,1 \text{ m}, 0,1 \text{ m}, 0,3 \text{ m}, 0,5 \text{ m}$.

Οι θέσεις των κοιλιών υπολογίζονται από την εξίσωση:

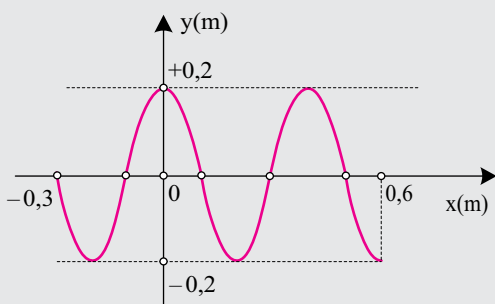
$$x_K = N \frac{\lambda}{2} = 0,2N \quad (2)$$

Θέλουμε:

$$x_K \leq x_K \leq x_A \Rightarrow -0,3 \leq 0,2N \leq +0,6 \\ \Rightarrow -1,5 \leq N \leq 3$$

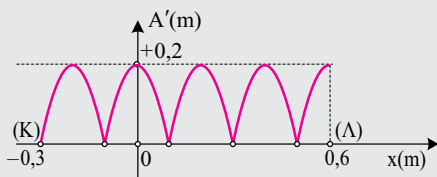
Άρα, $N = -1, 0, 1, 2, 3$

Βρίσκουμε τις θέσεις των κοιλιών πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα (ΚΛ) θέτοντας στη σχέση (2) όπου $N = -1, 0, 1, 2, 3$ και έχουμε $-0,2 \text{ m}, 0 \text{ m}, 0,2 \text{ m}, 0,4 \text{ m}, 0,6 \text{ m}$.



Το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος φαίνεται στο παραπάνω σχήμα από το οποίο προκύπτει ότι τα σημεία που βρίσκονται μεταξύ των σημείων (Κ) και (Λ) του ελαστικού μέσου και ταλαντώνονται με πλάτος ίσο με το πλάτος ταλάντωσης των αρχικών κυμάτων η συμβολή των οποίων έδωσε το στάσιμο είναι 9.

δ) Το διάγραμμα πλάτους σε συνάρτηση με τη θέση των σημείων μεταξύ των σημείων (Κ) και (Λ) φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



4.96 α) Αφού το σημείο αυτό διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του 20 φορές κάθε δευτερόλεπτο τότε έχει εκτελέσει 10 ταλαντώσεις καθώς σε μια ταλάντωση διέρχεται 2 φορές από τη θέση ισορροπίας του. Επομένως θα έχει περάσει χρόνος ίσος με 10 περιόδους άρα:

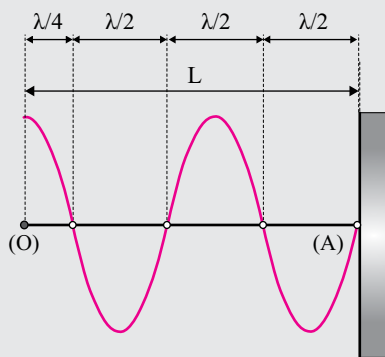
$$10T = 1 \Rightarrow T = 0,1 \text{ s}$$

β) Σε κάθε περίοδο το σημείο διανύει απόσταση ίση με 4 φορές το πλάτος του $4A_{(o)}$, άρα, σε 10T θα έχει διανύσει απόσταση $40A_{(o)}$. Ισχύει: $40A_{(o)} = 16 \Rightarrow A_{(o)} = 0,4 \text{ m}$.

Επειδή το σημείο (Ο) είναι κοιλιά ταλαντώνεται με πλάτος 2Α όπου Α το πλάτος των αρχικών κυμάτων η συμβολή των οποίων έδωσε το στάσιμο. Τελικά $A = 0,2 \text{ m}$.

Η μορφή της χορδής φαίνεται παρακάτω από την οποία προκύπτει:

$$L = \frac{3\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} = \frac{7\lambda}{4} \Rightarrow \frac{7\lambda}{4} = 0,7 \text{ m} \Rightarrow \lambda = 0,4 \text{ m}$$



Η εξίσωση του στάσιμου κύματος που προκύπτει είναι η εξής:

$$y = 2A \cdot \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \cdot \eta \mu 2\pi \frac{t}{T} \Rightarrow$$

$$y = 0,4 \cdot \sin 5\pi x \cdot \eta \mu 20\pi t \text{ (S.I.)}$$

γ) Για το πλάτος του σημείου (Ζ) ($x_Z = 0,25 \text{ m}$) έχουμε:

$$A_Z = |0,4 \cdot \sin(5\pi x_Z)| \Rightarrow A_Z = 0,2\sqrt{2} \text{ m}$$

Από την εφαρμογή της Α.Δ.Ε_τ για την ταλάντωση του (Ζ) για τη χρονική στιγμή t_1 , έχουμε (με απόδειξη):

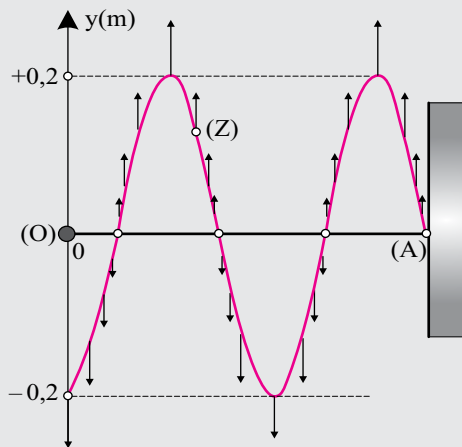
$$|v| = \omega \sqrt{A_Z^2 - y_Z^2} \Rightarrow |v| = 2\pi\sqrt{6} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Αφού το σημείο (Ζ) απομακρύνεται από τη θέση ισορροπίας του, έχει θετική ταχύτητα, άρα:

$$v = +2\pi\sqrt{6} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

δ) Τη χρονική στιγμή t_1 όλα τα σημεία του ελαστικού μέσου (εκτός από τους δεσμούς) θα βρίσκονται σε απομάκρυνση $y = \frac{|A'|}{2}$ όπου A' το πλάτος κάθε σημείου.

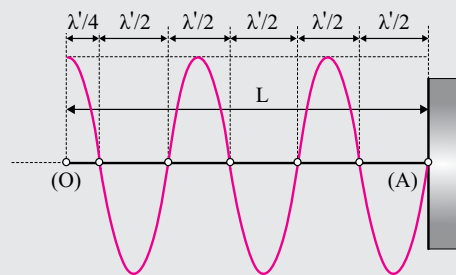
Η διαφορά φάσης του σημείου (Ο) με το (Ζ) είναι $\Delta\varphi = \pi \text{ rad}$, οπότε, το στιγμιότυπο της χορδής τη χρονική στιγμή t_1 είναι:



ε) Όταν μεταβάλλουμε τη συχνότητα ταλάντωσης του άκρου (Ο) του σχοινιού έτσι ώστε να εμφανίζονται στο σχοινί 2 περισσότερες κοιλίες, η μορφή της χορδής φαίνεται παρακάτω σχήμα, από την οποία προκύπτει για το νέο μήκος κύματος:

$$L = \frac{5\lambda'}{2} + \frac{\lambda}{4} = \frac{11\lambda}{4} \Rightarrow \frac{11\lambda'}{4} = 0,7\text{m} \Rightarrow \lambda' = \frac{2,8}{11} \text{ m}$$

$$\text{Τελικά ισχύει } \lambda'f' = \lambda f \Rightarrow f' = \frac{\lambda f}{\lambda'} \Rightarrow f' = \frac{110}{7} \text{ Hz}$$



4.97 α) Αφού το σημείο (Κ) απέχει από την πηγή απόσταση 10λ , το κύμα για να φτάσει σε αυτό θέλει χρόνο $10T$. Για τη χρονική στιγμή $2,45 \text{ s}$ ισχύει:

$$10T + 2T + \frac{T}{4} = 2,45\text{s} \Rightarrow T = 0,2 \text{ s}$$

β) Το σημείο (Κ) μέχρι τη χρονική στιγμή $2,45 \text{ s}$ κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του έχει εκτελέσει $2,25$ ταλαντώσεις άρα, έχει διανύσει απόσταση $9A$ αφού σε κάθε ταλάντωση διανύει απόσταση $4A$. Ισχύει:

$$9A = 4,5\lambda \Rightarrow 9 \cdot 0,2 = 4,5\lambda \Rightarrow \lambda = 0,4 \text{ m}$$

Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι:

$$v_\delta = \lambda f \Rightarrow v_\delta = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow v_\delta = 2 \text{ m/s}$$

γ) Η θέση του σημείου (Κ) είναι:

$$x_{(K)} = +10\lambda = +4 \text{ m}$$

Η διαφορά φάσης των σημείων (Κ) και (Λ) είναι:

$$\Delta\varphi_{KL} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \Delta x_{KL} \Rightarrow 2,5\pi = \frac{2\pi}{0,4} \cdot \Delta x_{KL} \Rightarrow$$

$$\Delta x_{KL} = 0,5\text{m} \Rightarrow x_{(A)} - x_{(K)} = 0,5\text{m} \Rightarrow$$

$$x_{(A)} = 4,5 \text{ m}$$

Η φάση του κύματος είναι:

$$\varphi = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \Rightarrow \varphi = 2\pi \left(\frac{t}{0,2} - \frac{x}{0,4} \right) \Rightarrow$$

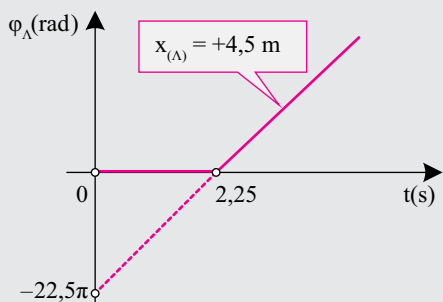
$$\varphi = 10\pi t - 5\pi x \text{ (S.I.)}$$

Η φάση του σημείου (Λ) σε συνάρτηση με το χρόνο είναι:

$$\varphi_\Lambda = 10\pi t - 5\pi x_\Lambda \Rightarrow$$

$$\varphi_\Lambda = 10\pi t - 22,5\pi \text{ (S.I.)}$$

Το διάγραμμα της φάσης του σημείου (Λ) σε συνάρτηση με τον χρόνο t φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



δ) Η ταχύτητα του σημείου (Λ) μηδενίζεται για δεύτερη φορά μετά την έναρξη της ταλάντωσής του μετά από χρόνο $\frac{3T}{4}$ στην κάτω ακραία θέση του. Το σημείο (Κ) ταλαντώνεται για περισσότερο χρόνο από το (Λ) κατά $T + \frac{T}{4} = \frac{5T}{4}$ αφού απέχει από αυτό απόσταση $0,5 \text{ m} = \lambda + \frac{\lambda}{4}$. Δηλαδή το (Κ) όταν η ταχύτητα του σημείου (Λ) μηδενίζεται για δεύτερη φορά μετά την έναρξη της ταλάντωσής του, ταλαντώνεται για χρόνο $\frac{3T}{4} + \frac{5T}{4} = 2T$. Έτσι η ταχύτητα του σημείου (Κ) εκείνη τη στιγμή θα είναι:

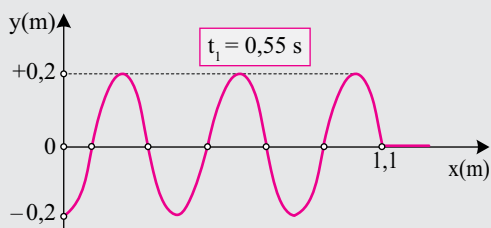
$$v_{(K)} = +v_{\max} = \omega \cdot A = \frac{2\pi}{T} \cdot A \Rightarrow v_{(K)} = 2\pi \text{ m/s}$$

ε) Για τη χρονική στιγμή $t_1 = 0,55 \text{ s}$ ισχύει:

$$t_1 = 2T + \frac{3T}{4}$$

Το κύμα θα έχει διαδοθεί κατά $2\lambda + \frac{3\lambda}{4} = 1,1 \text{ m}$

Το στιγμιότυπο φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



4.98 α) Σε χρονικό διάστημα κάθε το $\Delta t = 0,05 \text{ s}$ σημείο Ο διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του για πρώτη φορά μετά την $t = 0$ άρα:

$$\Delta t = \frac{T}{2} \Rightarrow T = 0,1 \text{ s}$$

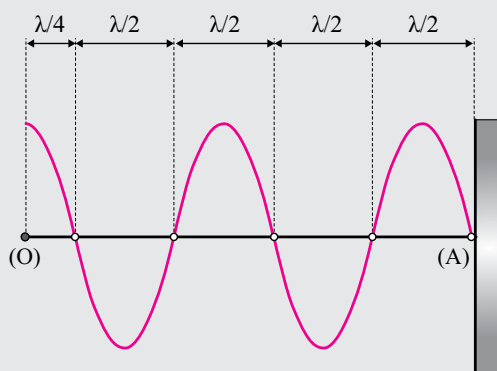
Η συχνότητα των δύο τρεχόντων κυμάτων

$$\text{ισούται με: } f = \frac{1}{T} \Rightarrow f = 10 \text{ Hz}$$

Σύμφωνα με τον θεμελιώδη νόμο της κυματικής έχουμε:

$$v_{\delta} = \lambda f \Rightarrow \lambda = \frac{v_{\delta}}{f} \Rightarrow \lambda = 0,4 \text{ m}$$

Με κατάλληλη διαδικασία δημιουργείται στη χορδή στάσιμο κύμα με 5 συνολικά κοιλίες. Σχεδιάζοντας ένα τυχαίο στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος, όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί.



Συμπεραίνουμε ότι το μήκος της χορδής ισούται με:

$$L = 2\lambda + \frac{\lambda}{4} \Rightarrow L = 9\frac{\lambda}{4} \Rightarrow L = 0,9 \text{ m}$$

β) Σε χρονικό διάστημα κάθε $\Delta t = 0,05 \text{ s}$ το σημείο Ο διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του για πρώτη φορά μετά την $t = 0$ και στο χρονικό διάστημα αυτό έχει διανύει διάστημα $S = 0,02 \text{ m}$.

Αυτό σημαίνει ότι $S = 2A \Rightarrow A = 0,01 \text{ m}$

Η εξίσωση του στάσιμου κύματος είναι:

$$y = 2A \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \eta \mu \frac{2\pi t}{T}$$

Άρα, $y = 0,2\sigma\upsilon\nu(5\pi x) \text{ ημ}(20\pi t)$ (S.I.)

Οι εξισώσεις των δύο τρεχόντων απλών αρμονικών κυμάτων είναι:

$$y_1 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \text{ ή}$$

$$y_1 = 0,01\eta\mu 2\pi(10t - 2,5x) \text{ (S.I.) και}$$

$$y_2 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right) \text{ ή}$$

$$y_2 = 0,01\eta\mu 2\pi(10t + 2,5x) \text{ (S.I.)}$$

γ) Το υλικό σημείο M που βρίσκεται στο μέσο της χορδής βρίσκεται στη θέση:

$$x_M = \frac{L}{2} = 0,45 \text{ m}$$

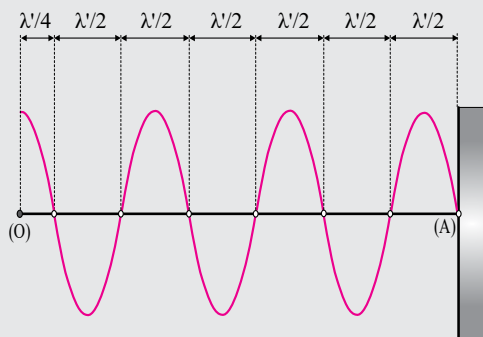
Ισχύει:

$$\frac{y_O}{y_M} = \frac{2A\sigma\upsilon\nu \frac{2\pi x_O}{\lambda} \eta\mu \frac{2\pi t}{T}}{2A\sigma\upsilon\nu \frac{2\pi x_M}{\lambda} \eta\mu \frac{2\pi t}{T}} \Rightarrow$$

$$\frac{y_O}{y_M} = \frac{\sigma\upsilon\nu \frac{2\pi x_O}{\lambda}}{\sigma\upsilon\nu \frac{2\pi x_M}{\lambda}} \Rightarrow \frac{y_O}{y_M} = \frac{\sigma\upsilon\nu 0}{\sigma\upsilon\nu \frac{9\pi}{4}} \Rightarrow$$

$$\frac{y_O}{y_M} = \sqrt{2} \Rightarrow y_M = 0,01\sqrt{2} \text{ m}$$

δ) Μεταβάλλουμε τη συχνότητα των δύο τρεχόντων κυμάτων, ώστε να παραμένουν μεταξύ τους ίσες, στο σημείο A να δημιουργείται δεσμός και μεταξύ του σημείου O (που παραμένει κοιλία και του σημείου A να υπάρχουν άλλες 2 κοιλίες.



Έχουμε:

$$L = 3\lambda' + \frac{\lambda'}{4} \Rightarrow L = \frac{13\lambda'}{4} \Rightarrow \lambda' = \frac{3,6}{13} \text{ m}$$

Η νέα συχνότητα θα είναι:

$$f' = \frac{v_\delta}{\lambda'} \Rightarrow f' = \frac{130}{9} \text{ Hz}$$

Η μεταβολή της συχνότητας ισούται με:

$$\Delta f = f' - f \Rightarrow \Delta f = \frac{40}{9} \text{ Hz}$$

4.99 α) Από το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή $t_1 = 0,35 \text{ s}$ προκύπτουν τα εξής:

$$A = 0,4 \text{ m}$$

$$\frac{7\lambda}{4} = 0,7 \text{ m} \Rightarrow \lambda = 0,4 \text{ m}$$

$$v_\delta = \frac{x_1}{t_1} = \frac{0,7 \text{ m}}{0,35 \text{ s}} \Rightarrow v_\delta = 2 \text{ m/s}$$

β) Για την περίοδο του κύματος έχουμε:

$$v_\delta = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow T = \frac{\lambda}{v_\delta} \Rightarrow T = 0,2 \text{ s}$$

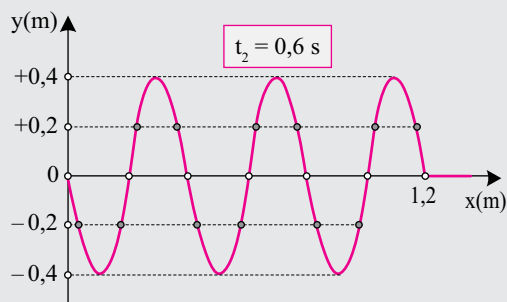
Η εξίσωση του αρμονικού κύματος είναι

$$y = A \cdot \eta\mu \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right] \Rightarrow$$

$$y = 0,4 \cdot \eta\mu(10\pi t - 5\pi x) \text{ (S.I.)}$$

Σχεδιάζουμε το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή $t_2 = 0,6 \text{ s}$.

Ισχύει $t_2 = 3T$ οπότε, το κύμα τη χρονική στιγμή t_2 έχει διαδοθεί κατά απόσταση $d = 3\lambda = 1,2 \text{ m}$.



Τα σημεία που απέχουν από τη θέση ισορροπίας τους απόσταση $d = 0,2 \text{ m}$ τη χρονική στιγμή $t_2 = 0,6 \text{ s}$, είναι αυτά που βρίσκονται σε απομάκρυνση $y = \pm 0,2 \text{ m}$. Τα σημεία αυτά όπως φαίνεται από το διάγραμμα είναι 12.

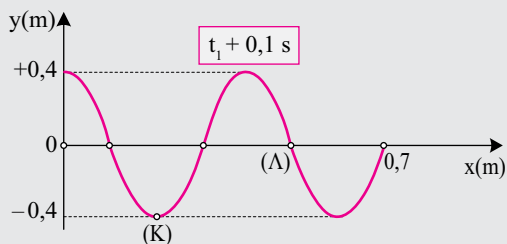
γ) Τα σημεία (Κ) και (Λ) απέχουν μεταξύ τους απόσταση $\Delta x = \frac{3\lambda}{4}$ με το σημείο (Κ) να είναι πιο κοντά στην πηγή του κύματος αφού το κύμα διαδίδεται προς τα θετικά του άξονα. Έτσι όταν το κύμα φτάνει στο (Κ), για να φτάσει στο (Λ) θέλει επιπλέον χρόνο $\Delta t = \frac{3T}{4}$.

Όταν το σημείο (Κ) ολοκληρώνει τη δεύτερη ταλάντωσή του (άρα, έχει περάσει χρόνος $2T$ από τη στιγμή που έφτασε το κύμα σε αυτό), το σημείο (Λ) ταλαντώνεται για χρόνο $\frac{3T}{4}$ λιγότερο από το (Κ) οπότε, ταλαντώνεται για χρόνο $\Delta t' = 2T - \frac{3T}{4} = \frac{5T}{4} = T + \frac{T}{4}$. Εκείνη τη στιγμή το σημείο (Λ) βρίσκεται στην μέγιστη θετική του απομάκρυνση οπότε, για την επιτάχυνσή του έχουμε:

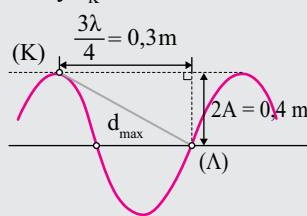
$$\alpha = -\alpha_{\max} = -\omega^2 A \Rightarrow \alpha = -\frac{4\pi^2}{T^2} A \Rightarrow$$

$$\alpha = -40\pi^2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

δ) Μετά από χρόνο $\Delta t = 0,1 \text{ s} = \frac{T}{2}$ όλα τα σημεία του στάσιμου κύματος, εκτός από τους δεσμούς, θα βρίσκονται στην άλλη ακραία θέση της ταλάντωσής τους σε σχέση με αυτή που βρίσκονται τη χρονική στιγμή t_1 .



ε) Το σημείο (Λ) είναι δεσμός, οπότε, είναι διαρκώς ακίνητο στη Θέση Ισορροπίας του, ενώ το σημείο (Κ) είναι κοιλία και ταλαντώνεται με πλάτος $A_K = 2A = 0,4 \text{ m}$.



Τα σημεία (Κ) και (Λ) κατά τη διάρκεια της ταλάντωσής τους απέχουν την μέγιστη απόστασή τους, όταν το σημείο (Κ) είναι σε μια από τις 2 ακραίες θέσεις της ταλάντωσής του. Έχουμε:

$$d_{\max} = \sqrt{(2A)^2 + \left(\frac{3\lambda}{4}\right)^2} \Rightarrow d_{\max} = 0,5 \text{ m}$$

4.100 α) Το σημείο (Κ) του ελαστικού μέσου σε κάθε περίοδο της ταλάντωσής του διανύει απόσταση $4A$ άρα:

$$d = 4A \Rightarrow A = \frac{d}{4} = 0,2 \text{ m}$$

Ένα «όρος» του κύματος σε κάθε περίοδο διανύει απόσταση ίση με ένα μήκος κύματος, άρα, $\lambda = 0,2 \text{ m}$.

Για την ενέργεια ταλάντωσης του σημείου (Κ) έχουμε:

$$E_T = \frac{1}{2} D A^2 = \frac{1}{2} \cdot \Delta m \cdot \omega^2 A^2 \Rightarrow$$

$$\omega = 20\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = 0,1 \text{ s}$$

Ένα «όρος» του κύματος σε κάθε περίοδο διανύει απόσταση ίση με ένα μήκος κύματος, άρα:

$$\lambda = 0,2 \text{ m}$$

Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι:

$$v_s = \lambda f \Rightarrow v_s = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow v_s = 2 \text{ m/s}$$

β) Η εξίσωση του στάσιμου κύματος είναι:

$$y = 2A \cdot \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \cdot \eta\mu \frac{2\pi t}{T}$$

Άρα:

$$y = 0,4 \sin 10\pi x \cdot \eta\mu 20\pi t \text{ (S.I.)}$$

γ) Τη χρονική στιγμή $t_1 = 0,3 \text{ s}$ το κάθε κύμα έχει «προχωρήσει» σε σχέση με τη θέση $x = 0$ κατά $3\lambda = 0,6 \text{ m}$ αφού η περίοδος των δύο κυμάτων είναι $T = 0,1 \text{ s}$.

Άρα, στάσιμο κύμα έχει δημιουργηθεί μεταξύ των θέσεων $-0,6 \text{ m}$ και $+0,6 \text{ m}$ δηλαδή σε μήκος $1,2 \text{ m}$ του ομογενούς ελαστικού μέσου.

δ) Οι θέσεις των κοιλιών υπολογίζονται από την εξίσωση:

$$x_k = N \frac{\lambda}{2} = 0,1N \text{ (I)}$$

Θέλουμε:

$$\begin{aligned} -0,6 \leq x_k \leq 0,6 &\Rightarrow -0,6 \leq 0,1N \leq 0,6 \\ &\Rightarrow -6 \leq N \leq 6 \end{aligned}$$

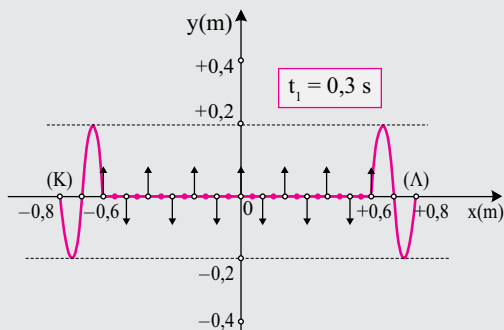
Άρα, $N = \pm 6, \pm 5, \pm 4, \pm 3, \pm 2, \pm 1, 0$ (13 κοιλίες)

Για τις θέσεις των κοιλιών έχουμε:

$$\pm 0,6\text{m}, \pm 0,5\text{m}, \pm 0,4\text{m}, \pm 0,3\text{m}, \pm 0,2\text{m}, \pm 0,1\text{m}, 0$$

Τη χρονική στιγμή $t_1 = 0,3 \text{ s} = 3T$ όλα τα σημεία στα οποία έχει δημιουργηθεί στάσιμο θα βρίσκονται στη θέση ισορροπίας τους με το σημείο που βρίσκεται στη θέση $x = 0$ να έχει θετική ταχύτητα.

Το στιγμιότυπο του ομογενούς και ελαστικού μέσου μεταξύ των σημείων (Κ) και (Λ) που βρίσκονται στις θέσεις $x_{(K)} = -0,8 \text{ m}$ και $x_{(Λ)} = +0,8 \text{ m}$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



ε) Τη χρονική στιγμή $t_1 = 0,3 \text{ s}$ το σημείο (Ζ) που βρίσκεται στη θέση $x_{(Z)} = -0,725 \text{ m}$ ταλαντώνεται εξαιτίας του κύματος που διαδίδεται προς τα θετικά αφού σε αυτό το σημείο δεν έχει ακόμα δημιουργηθεί στάσιμο κύμα. Για την ταχύτητα της ταλάντωσης του σημείου (Ζ) έχουμε:

$$v_Z = \omega A \cdot \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_{(Z)}}{\lambda} \right) \right] \Rightarrow$$

$$v_Z = 4\pi \cdot \sin (20\pi t + 7,25\pi) \text{ (S.I.)}$$

$$t_1 = 0,3 \text{ s}$$

$$\Rightarrow v_Z = 4\pi \cdot \sin (6\pi + 7,25\pi) \Rightarrow$$

$$v_Z = -2\pi\sqrt{2} \text{ m/s}$$

4.101 α) Συγκρίνουμε την εξίσωση του στάσιμου κύματος που δίνεται με τον γενικό τύπο της θεωρίας:

$$y = 2A \cdot \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \cdot \eta\mu 2\pi \frac{t}{T}$$

Προκύπτει:

$$2A = 0,6 \text{ m} \Rightarrow A = 0,3 \text{ m}$$

Επίσης ισχύει:

$$2\pi \frac{t}{T} = 20\pi t \Rightarrow T = 0,1 \text{ s}$$

$$\text{Και τέλος } 2\pi \frac{x}{\lambda} = 10\pi x \Rightarrow \lambda = 0,2 \text{ m}$$

Για την ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων η συμβολή των οποίων δημιούργησε το στάσιμο κύμα έχουμε:

$$v_s = \lambda f \Rightarrow v_s = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow v_s = 2 \text{ m/s}$$

β) Τα σημεία του ελαστικού μέσου που κάθε χρονική στιγμή βρίσκονται στη θέση ισορροπίας τους είναι οι δεσμοί του στάσιμου κύματος. Για τις θέσεις των δεσμών ισχύει:

$$x_s = (2N + 1) \frac{\lambda}{4}$$

Θέλουμε:

$$x_K < x_\delta < x_\Lambda \Rightarrow x_K < (2N+1)\frac{\lambda}{4} < x_\Lambda \Rightarrow$$

$$-0,2 < (2N+1) \cdot \frac{0,2}{4} < +0,25 \Rightarrow$$

$$-2,5 < N < 2$$

Επομένως οι ακέραιες τιμές που παίρνει το N είναι $-2, -1, 0, 1$ άρα, **4** σημεία κάθε χρονική στιγμή βρίσκονται στη θέση ισορροπίας τους.

γ) Υπολογίζουμε το πλάτος της ταλάντωσης του σημείου K .

$$A_K = 0,6 \cdot |\sin 10\pi x_K| = 0,6 \cdot |\sin 10\pi \cdot (-0,2)| \Rightarrow$$

$$A_K = 0,6 \text{ m} = 2A$$

Άρα, το **σημείο K είναι κοιλία** του στάσιμου κύματος.

Για να υπολογίσουμε το μέτρο της ταχύτητας ταλάντωσης του σημείου K τη χρονική στιγμή t_1 που η απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας του είναι $y = -0,3 \text{ m}$, εφαρμόζουμε τη διατήρηση της ενέργειας για την ταλάντωση του. Θεωρούμε ότι το σημείο K έχει στοιχειώδη μάζα Δm . Έχουμε:

$$E_{\text{ολ.}} = K + U \Rightarrow \frac{1}{2} D A_K^2 = \frac{1}{2} \Delta m \cdot v^2 + \frac{1}{2} D y^2 \Rightarrow$$

$$D A_K^2 = \Delta m \cdot v^2 + D y^2 \xrightarrow{D = \Delta m \cdot \omega^2} \Rightarrow$$

$$\Delta m \cdot \omega^2 A_K^2 = \Delta m \cdot v^2 + \Delta m \cdot \omega^2 y^2 \Rightarrow$$

$$\omega^2 A_K^2 = v^2 + \omega^2 y^2 \Rightarrow |v| = \omega \sqrt{A_K^2 - y^2}$$

$$\text{Όμως } \omega = \frac{2\pi}{T} = 20\pi \text{ rad/s} \text{ } \Rightarrow \text{οπότε, τελικά έχουμε:}$$

$$|v| = 20\pi \sqrt{0,6^2 - (-0,3)^2} \Rightarrow |v| = 6\sqrt{3}\pi \text{ m/s}$$

δ) Υπολογίζουμε το πλάτος της ταλάντωσης του σημείου Λ .

$$A_\Lambda = 0,6 \cdot |\sin 10\pi x_\Lambda| = 0,6 \cdot |\sin 10\pi \cdot 0,25| \Rightarrow$$

$$A_\Lambda = 0$$

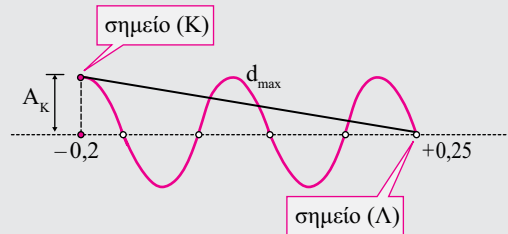
Το σημείο K είναι κοιλία ενώ το σημείο Λ είναι δεσμός.

Τα δύο αυτά σημεία απέχουν την μέγιστη απόσταση μεταξύ τους κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης τους όταν το σημείο K θα βρίσκεται σε

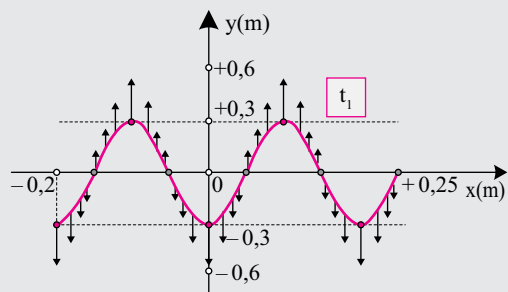
μία ακραία θέση της ταλάντωσης του. Για τη απόσταση αυτή ισχύει:

$$d_{\text{max}} = \sqrt{A_K^2 + (x_\Lambda - x_K)^2} \Rightarrow$$

$$d_{\text{max}} = 0,75 \text{ m}$$



ε) Τη χρονική στιγμή t_1 το σημείο K βρίσκεται στη θέση $y = -0,3 \text{ m}$ πράγμα το οποίο συμβαίνει για όλες τις κοιλίες που έχουν διαφορά φάσης $\Delta\phi = 0$ με το K , ενώ οι κοιλίες που έχουν διαφορά φάσης $\Delta\phi = \pi$ με το K βρίσκονται στη θέση $y = +0,3 \text{ m}$. Επιπλέον το σημείο που βρίσκεται στη θέση $x = 0$ είναι κοιλία και έχει διαφορά φάσης $\Delta\phi = 0$ με το K . Αφού επιβραδύνεται έπειτα αυτό κινείται προς τα κάτω όπως και όλα τα σημεία που έχουν $\Delta\phi = 0$ με αυτό ενώ τα υπόλοιπα που βρίσκονται στη θέση $y = +0,3 \text{ m}$ κινούνται προς τα πάνω. Από το ερώτημα γ έχουμε βρει τον αριθμό των δεσμών οπότε, το στιγμιότυπο φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



4.102 α) Από τη σύγκριση της εξίσωσης του κύματος που διαδίδεται:

$$y = \frac{0,4}{\pi} \cdot \eta \mu(10\pi t - 5\pi x)$$

με τη γενική εξίσωση του κύματος:

$$y = A \cdot \eta \mu \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right]$$

προκύπτει:

$$A = \frac{0,4}{\pi} \text{ m}, T = 0,2 \text{ s}, f = 5 \text{ Hz},$$

$$\omega = 10 \pi \text{ rad/s}, \lambda = 0,4 \text{ m}.$$

Η περίοδος του κύματος είναι η ίδια με την περίοδο ταλάντωσης της πηγής δηλαδή του σώματος Σ_1 οπότε, έχουμε:

$$k = m_1 \omega^2 \Rightarrow k = 400 \text{ N/m}$$

β) Η ταχύτητα που αποκτάει το Σ_1 μετά την κρούση είναι η μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσής του αφού την αποκτά στη (Θ.Ι.) του, άρα, ισχύει:

$$v_1' = \omega \cdot A \Rightarrow v_1' = 4 \text{ m/s}$$

Για την ταχύτητα του Σ_2 πριν την κρούση εφαρμόζουμε Θ.Μ.Κ.Ε. (I) $\rightarrow$ (II)

$$\Delta K = \Sigma W_F \Rightarrow \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} m_2 v_0^2 = -m_2 gh \Rightarrow$$

$$v_2 = \sqrt{v_0^2 - 2gh} \Rightarrow v_2 = 10 \text{ m/s}$$

Από Αρχή Διατήρησης της Ορμής έχουμε:

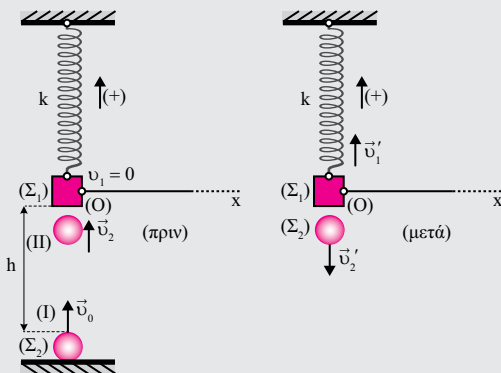
$$\vec{p}_{\text{ολ. (πριν)}} = \vec{p}_{\text{ολ. (μετά)}} \Rightarrow m_2 v_2 = m_1 v_1' - m_2 v_2' \Rightarrow$$

$$v_2' = 6 \text{ m/s}$$

$$K_{\text{ολ. (πριν)}} = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = 5 \text{ J}$$

$$K_{\text{ολ. (μετά)}} = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = 5 \text{ J}$$

Επειδή $K_{\text{ολ. (πριν)}} = K_{\text{ολ. (μετά)}}$, η κρούση είναι ελαστική.



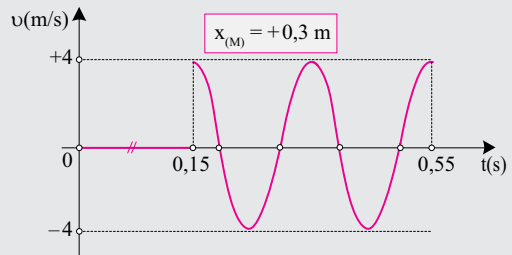
γ) Ισχύει: $v_\delta = \lambda f \Rightarrow v_\delta = 2 \text{ m/s}$

Το κύμα στο Μ φτάνει τη χρονική στιγμή

$$t_M = \frac{x_M}{v_\delta} = 0,15 \text{ s}.$$

$$v_{(z)} = \omega A \cdot \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_M}{\lambda} \right) \right] \Rightarrow$$

$$v_M = 4 \cdot \sin \left(10\pi t - \frac{3\pi}{2} \right) (\text{S.I.}), t \geq 0,15 \text{ s}$$



δ) $E_{\text{ολ.}} = K + U \xRightarrow{K=U} E_{\text{ολ.}} = 2U \Rightarrow \frac{1}{2} k A^2 = 2 \cdot \frac{1}{2} k y^2 \Rightarrow$

$$y = \pm \frac{A\sqrt{2}}{2} = \pm \frac{0,2\sqrt{2}}{\pi} \text{ m}$$

Επειδή σε κάθε περίοδο η δυναμική και η κινητική ενέργεια ενός σώματος γίνονται ίσες 4 φορές και αφού το Σ_1 ξεκινάει την ταλάντωσή του από τη Θ.Ι. του χωρίς αρχική φάση, τότε την 5η φορά που θα γίνουν οι 2 ενέργειες ίσες

το Σ_1 θα βρίσκεται στη θέση $y = + \frac{0,2\sqrt{2}}{\pi} \text{ m}$

για 3η φορά. Έχουμε:

$$y = \frac{0,4}{\pi} \cdot \eta \mu \left(10\pi t - 5\pi x \right) \xRightarrow{y = + \frac{0,2\sqrt{2}}{\pi} \text{ m}, x=0} \Rightarrow$$

$$+ \frac{0,2\sqrt{2}}{\pi} = \frac{0,4}{\pi} \cdot \eta \mu 10\pi t \Rightarrow \eta \mu 10\pi t = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$t = \frac{\kappa}{5} + \frac{1}{40} (1) \text{ ή } t = \frac{\kappa}{5} + \frac{3}{40} (2)$$

Η σχέση (1) για $\kappa = 1$ δίνει την 5η φορά που θα γίνουν οι 2 ενέργειες ίσες και είναι ίση με $t = 0,225 \text{ s}$.

Την συγκεκριμένη χρονική στιγμή το κύμα θα έχει διαδοθεί κατά απόσταση

$$x = v_{\delta} t \Rightarrow x = 0,45 \text{ m}$$

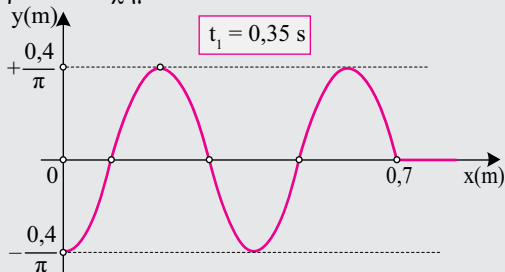
ε) $t_1 = 0,35 \text{ s} \Rightarrow t_1 = T + \frac{3T}{4}$

Σε κάθε περίοδο το κύμα διαδίδεται κατά απόσταση 1λ .

Σε χρόνο $T + \frac{3T}{4}$ το κύμα θα διαδοθεί κατά

απόσταση $\lambda + \frac{3\lambda}{4} = 0,7 \text{ m}$.

Το στιγμιότυπο του κύματος φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



4.103 α) Από το δοθέν διάγραμμα προκύπτει ότι τη χρονική στιγμή $t_1 = 0,1 \text{ s}$ έχει δημιουργηθεί στάσιμο κύμα ανάμεσα στις θέσεις $-0,20 \text{ m}$ και $+0,20 \text{ m}$ λόγω της συμβολής των δύο κυμάτων. Όλα τα άλλα σημεία του ελαστικού μέσου ταλαντώνονται με πλάτος $A = 0,3 \text{ m}$, που είναι και το πλάτος ταλάντωσης κάθε κύματος.

Επίσης κάθε κύμα έχει διαδοθεί κατά απόσταση $\Delta x = 0,20 \text{ m}$ στο χρονικό διάστημα 0 έως $0,1 \text{ s}$ που τυχαίνει όπως φαίνεται από το διάγραμμα να είναι και το μήκος κύματος δηλαδή $\lambda = 0,2 \text{ m}$. Η χρονική στιγμή t_1 είναι ίση με την

περίοδο, άρα, $T = 0,1 \text{ s}$ οπότε $f = \frac{1}{T} \Rightarrow f = 10 \text{ Hz}$

(Σε χρόνο T το κάθε κύμα διαδίδεται κατά λ)

$$v_{\delta} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v_{\delta} = 2 \text{ m/s}$$

β) Στις θέσεις $-0,2 \text{ m}$, $-0,1 \text{ m}$, 0 m , $0,1 \text{ m}$, $0,2 \text{ m}$ υπάρχουν κοιλίες, ενώ στις θέσεις $-0,15 \text{ m}$, $-0,05 \text{ m}$, $0,05 \text{ m}$, $0,15 \text{ m}$ υπάρχουν δεσμοί του στάσιμου κύματος.

Για τα σημεία του ελαστικού μέσου που βρίσκονται σε θέσεις $x < -0,2 \text{ m}$ η απομάκρυνση τους οφείλεται στο κύμα που διαδίδεται προς τα θετικά άρα:

$$y = A \cdot \eta\mu \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right] \Rightarrow$$

$$y = 0,3 \cdot \eta\mu(20\pi t - 10\pi x) \text{ (S.I.)}$$

Για τα σημεία του ελαστικού μέσου που βρίσκονται σε θέσεις $x > +0,2 \text{ m}$ η απομάκρυνση τους οφείλεται στο κύμα που διαδίδεται προς τα αρνητικά άρα:

$$y = A \cdot \eta\mu \left[2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right) \right] \Rightarrow$$

$$y = 0,3 \cdot \eta\mu(20\pi t + 10\pi x) \text{ (S.I.)}$$

Για τα σημεία του ελαστικού μέσου που βρίσκονται σε θέσεις $-0,2 \text{ m} \leq x \leq +0,2 \text{ m}$ είναι σημεία στάσιμου κύματος άρα, η απομάκρυνσή τους είναι:

$$y = 2A \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi x}{\lambda} \cdot \eta\mu \frac{2\pi t}{T} \Rightarrow$$

$$y = 0,6\sigma\upsilon\nu 10\pi x \cdot \eta\mu 20\pi t \text{ (S.I.)}$$

γ) Τη χρονική στιγμή $t_2 = t_1 + T = 0,2 \text{ s}$, στάσιμο κύμα έχει διαδοθεί μεταξύ των θέσεων $-0,4 \text{ m}$ και $+0,4 \text{ m}$ αφού κάθε ένα από τα τρέχοντα κύματα έχει διαδοθεί επιπλέον κατά απόσταση ενός μήκους κύματος σε σχέση με τη χρονική στιγμή t_1 .

Σημεία με μέγιστο πλάτος (κοιλίες)

$$-0,4 \text{ m} \leq x_{\text{κοιλίας}} \leq +0,4 \text{ m} \Rightarrow$$

$$-0,4 \leq \frac{N\lambda}{2} \leq +0,4 \Rightarrow$$

$$-0,4 \leq 0,1N \leq +0,4 \Rightarrow -4 \leq N \leq +4$$

Επειδή N ακέραιος οι τιμές του N είναι $N = -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$, οπότε, οι κοιλίες είναι **9** μαζί με τα σημεία που βρίσκονται στις θέσεις $-0,4 \text{ m}$ και $+0,4 \text{ m}$.

Σημεία που παραμένουν διαρκώς ακίνητα (δεσμοί).

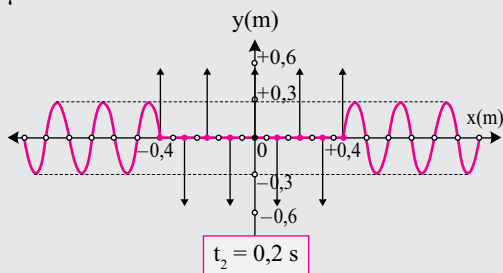
$$-0,4 \text{ m} \leq x_{\text{δεσμού}} \leq +0,4 \text{ m} \Rightarrow$$

$$-0,4 \leq (2N+1) \cdot \frac{\lambda}{2} \leq +0,4 \Rightarrow$$

$$-0,4 \leq 0,1N + 0,05 \leq +0,4 \Rightarrow -4,5 \leq N \leq +3,5$$

Επειδή N ακέραιος οι τιμές του N είναι $N = -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$, οπότε, οι δεσμοί είναι **8**.

δ) Τη χρονική στιγμή $t_2 = t_1 + T = 0,2 \text{ s} = 2T$, στάσιμο κύμα έχει διαδοθεί μεταξύ των θέσεων $-0,4 \text{ m}$ και $+0,4 \text{ m}$. Στη θέση $x = 0$ υπάρχει κοιλία και εκείνη τη στιγμή θα βρίσκεται στη θέση ισορροπίας της κινούμενη προς τα θετικά. Οπότε, όλα τα σημεία του στάσιμου κύματος είναι στη θέση ισορροπίας τους. Άρα, το στιγμιότυπο είναι:



ε) Προφανώς, σε όλα τα σημεία του ελαστικού μέσου που δεν έχει διαδοθεί στάσιμο κύμα το πλάτος ταλάντωσής τους είναι ίσο με το πλάτος ταλάντωσης των δύο κυμάτων. Αυτά βρίσκονται σε θέσεις για τις οποίες ισχύει $x > +0,4 \text{ m}$ και $x < -0,4 \text{ m}$.

Για τα σημεία του ελαστικού μέσου που βρίσκονται σε θέσεις $-0,4 \text{ m} \leq x \leq 0,4 \text{ m}$ έχω:

$$A' = 0,6 \cdot |\sin 10\pi x| \quad A' = 0,3\sqrt{2} \text{ m} \Rightarrow$$

$$0,3\sqrt{2} = 0,6 \cdot |\sin 10\pi x| \Rightarrow$$

$$|\sin 10\pi x| = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin 10\pi x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$10\pi x = (2\kappa + 1) \cdot \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = (2\kappa + 1) \cdot \frac{1}{40}$$

$$\text{όπου } \kappa = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Ομως:

$$-0,4 \text{ m} \leq x \leq +0,4 \text{ m} \Rightarrow$$

$$-0,4 \leq (2\kappa + 1) \cdot \frac{1}{40} \leq +0,4 \Rightarrow -8,5 \leq \kappa \leq 7,5$$

Άρα, υπάρχουν **16** σημεία τη χρονική στιγμή t_2 που ταλαντώνονται με πλάτος:

$$A' = 0,3\sqrt{2} \text{ m}$$

και βρίσκονται στις θέσεις:

$-0,375 \text{ m}, -0,325 \text{ m}, -0,275 \text{ m}, -0,225 \text{ m}, -0,175 \text{ m}, -0,125 \text{ m}, -0,075 \text{ m}, -0,025 \text{ m},$
 $+0,025 \text{ m}, +0,075 \text{ m}, +0,125 \text{ m}, +0,175 \text{ m}, +0,225 \text{ m}, +0,275 \text{ m}, +0,325 \text{ m}, +0,375 \text{ m}$

στ) Τη χρονική στιγμή $t_3 = t_1 + \frac{3T}{4} = 0,175 \text{ s}$

κάθε ένα απ' τα δύο κύματα έχει «προχωρήσει» κατά $\lambda + \frac{3\lambda}{4}$ απόσταση δηλαδή $0,35 \text{ m}$,

οπότε, στάσιμο κύμα έχει δημιουργηθεί μεταξύ των θέσεων $-0,35 \text{ m} \leq x \leq +0,35 \text{ m}$. Άρα, το σημείο M ταλαντώνεται εξαιτίας του κύματος που διαδίδεται προς τα αρνητικά οπότε:

$$y = 0,3 \cdot \eta\mu(20\pi t + 10\pi x)$$

$$t_3 = 0,175 \text{ s}, x_M = 0,45 \text{ m} \Rightarrow y_M = 0$$

$$v = \omega A \cdot \sin(20\pi t + 10\pi x)$$

$$t_3 = 0,175 \text{ s}, x_M = 0,45 \text{ m} \Rightarrow v_M = 6\pi \text{ m/s}$$

Κεφάλαιο 5: Ηλεκτρομαγνητισμός

ΘΕΜΑ Α

- 5.1 δ) 5.2 α) 5.3 γ) 5.4 δ)
 5.5 β) 5.6 α) 5.7 δ) 5.8 β)
 5.9 α) Λ, β) Λ, γ) Σ, δ) Σ, ε) Σ
 5.10 δ) 5.11 α) 5.12 α) 5.13 γ)
 5.14 β) 5.15 β) 5.16 γ) 5.17 α)
 5.18 γ) 5.19 α) 5.20 δ) 5.21 β)

ΘΕΜΑ Β

5.51 Σωστή απάντηση το α).

Για ένα στοιχειώδες τμήμα $\Delta \vec{l}$ του ευθύγραμμου τμήματος του αγωγού (1), εφαρμόζουμε τον νόμο των Biot-Savart για να υπολογίσουμε το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου που δημιουργεί στο Κ.

Ισχύει:

$$\Delta B_{(K),1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I_1 \cdot \Delta \ell}{r^2} \cdot \eta \mu 0^\circ \Rightarrow \Delta B_{(K),1} = 0$$

Το ίδιο ακριβώς θα ισχύει και για το ευθύγραμμο τμήμα του αγωγού (2).

Εφαρμόζουμε τον νόμο των Biot-Savart για στοιχειώδες τμήμα του ημικυκλίου του αγωγού (1) για να υπολογίσουμε το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου που δημιουργεί στο Κ. Έχουμε:

$$\Delta B'_{(K),1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I_1 \cdot \Delta \ell}{r^2} \cdot \eta \mu \theta(1)$$

Ισχύει ότι κάθε στοιχειώδες τμήμα $\Delta \vec{l}$ απέχει από το σημείο Κ απόσταση $r = a_1$ ενώ η γωνία μεταξύ κάθε στοιχειώδους τμήματος $\Delta \vec{l}$ και $\vec{r}$ είναι $\theta = \pi/2$ rad. Από τη σχέση (1) προκύπτει:

$$\Delta B'_{(K),1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I_1 \cdot \Delta l}{a_1^2} \cdot \eta \mu \frac{\pi}{2} \Rightarrow \Delta B'_{(K),1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I_1 \cdot \Delta l}{a_1^2}$$

- 5.22 δ) 5.23 α) 5.24 δ) 5.25 α)
 5.26 β) 5.27 β) 5.28 β) 5.29 β)
 5.30 α) 5.31 β) 5.32 δ) 5.33 β)
 5.34 β) 5.35 α) 5.36 β) 5.37 δ)
 5.38 α) 5.39 δ) 5.40 β) 5.41 α)
 5.42 β)
 5.43 α) Σ, β) Λ, γ) Σ, δ) Σ, ε) Σ
 5.44 β) 5.45 γ) 5.46 γ) 5.47 α)
 5.48 δ) 5.49 β) 5.50 β)

Για το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου που δημιουργεί στο Κ, ολόκληρο το ημικόκλιο, ισχύει:

$$B'_{(K),1} = \Sigma \Delta B'_{(K),1} \Rightarrow B'_{(K),1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I_1}{a_1^2} \cdot \Sigma \Delta l \Rightarrow$$

$$B'_{(K),1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I_1}{a_1^2} \cdot \pi a_1 \Rightarrow$$

$$B'_{(K),1} = \frac{\mu_0 I_1}{4a_1}$$

Σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού το διάνυσμα του $\vec{B}'_{(K),1}$ έχει κατεύθυνση κατακόρυφη με φορά από τον αναγνώστη προς τη σελίδα.

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία για το ημικυκλικό τμήμα του αγωγού (2) προκύπτει:

$$B'_{(K),2} = \frac{\mu_0 I_2}{4a_2}$$

Σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού το διάνυσμα του $\vec{B}'_{(K),2}$ έχει κατεύθυνση κατακόρυφη με φορά από τον αναγνώστη προς τη σελίδα.

Το μέτρο της έντασης που δημιουργούν και οι δύο αγωγοί στο Κ θα είναι:

$$B_{(K)} = B'_{(K),1} + B'_{(K),2} \Rightarrow B_{(K)} = \frac{\mu_0 I_1}{4a_1} + \frac{\mu_0 I_2}{4a_2} \Rightarrow$$

$$B_{(K)} = \frac{\mu_0 I_1}{4a_1} + \frac{\mu_0 3I_1}{4 \cdot 1,5 \cdot a_1} \Rightarrow$$

$$B_{(K)} = \frac{3\mu_0 I_1}{4a_1}$$

5.52 Σωστή απάντηση το β).

Από την εφαρμογή του νόμου του Ampere έχουμε:

$$\sum B \cdot \Delta l \cdot \sin \theta = \mu_0 (I_1 - I_2 - I_3 + I_4) \Rightarrow$$

$$0 = \mu_0 (I - 2I - I + I_4) \Rightarrow I_4 = 2I$$

5.53 Σωστή απάντηση το β).

Σε γωνία $\Delta\theta$ ο αγωγός σαρώνει εμβαδόν ΔS .
Σε γωνία 2π ο αγωγός σαρώνει εμβαδόν:

$$\pi(l+d)^2 - \pi d^2$$

Ισχύει:

$$\Delta S = \frac{1}{2} l(l+2d) \cdot \Delta\theta \Rightarrow$$

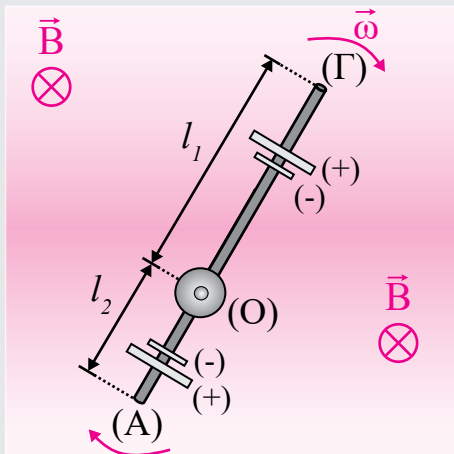
$$\Delta S = \frac{1}{2} l \left(l + 2 \frac{l}{2} \right) \cdot \Delta\theta \Rightarrow \Delta S = l^2 \cdot \Delta\theta$$

Από τον νόμο του Faraday προκύπτει:

$$E_{\epsilon\pi} = \left| \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \right| \Rightarrow E_{\epsilon\pi} = \frac{B \cdot \Delta S}{\Delta t} \Rightarrow$$

$$E_{\epsilon\pi} = \frac{Bl^2 \cdot \Delta\theta}{\Delta t} \Rightarrow E_{\epsilon\pi} = Bl^2 \omega$$

5.54 Σωστή απάντηση το β).



Προσδιορίζουμε την πολικότητα της ΗΕΔ από επαγωγή στα τμήματα ΑΟ και ΟΓ του αγωγού. Το μέτρο της ΗΕΔ από επαγωγή σε κάθε τμήμα του αγωγού είναι:

$$E_{\epsilon\pi,ΓΟ} = \frac{1}{2} B \omega l_1^2 \text{ και } E_{\epsilon\pi,ΑΟ} = \frac{1}{2} B \omega l_2^2$$

Η διαφορά δυναμικού στα άκρα του αγωγού είναι:

$$V_{ΑΓ} = E_{\epsilon\pi,ΑΟ} - E_{\epsilon\pi,ΓΟ} \Rightarrow V_{ΑΓ} = \frac{1}{2} B \omega (l_2^2 - l_1^2)$$

5.55 Σωστή απάντηση το γ).

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για να βρούμε το μέτρο της ταχύτητας που αποκτάει το σωματίδιο. Ισχύει:

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{F_{\eta\lambda}} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m v^2 - 0 = qV \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2qV}{m}}$$

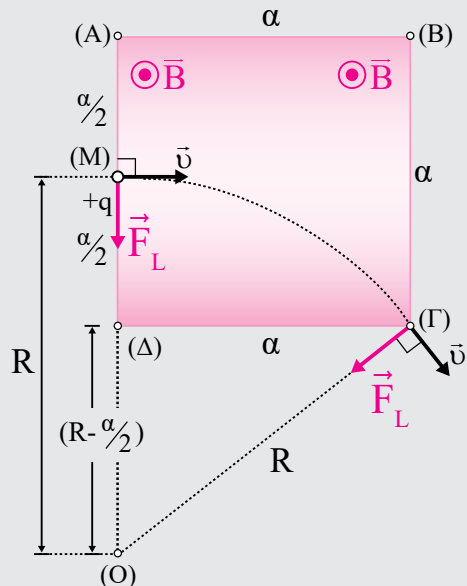
Ο χρόνος κίνησης στο μαγνητικό πεδίο είναι:

$$t = \frac{T}{4} \Rightarrow t = \frac{Bq}{4} \Rightarrow \frac{m}{q} = \frac{2Bt}{\pi}$$

Η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς είναι:

$$R = \frac{mv}{Bq} \Rightarrow R = \frac{2Bt}{B\pi} \sqrt{\frac{2qV}{m}} \Rightarrow R = 2 \sqrt{\frac{tV}{\pi B}}$$

5.56 Σωστή απάντηση το γ).



Βρίσκουμε το κέντρο της κυκλικής τροχιάς του σωματιδίου. Από το τρίγωνο ΓΔΟ έχουμε:

$$\left(R - \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \alpha^2 = R^2 \Rightarrow R = \frac{5\alpha}{4} \Rightarrow \frac{mv}{Bq} = \frac{5\alpha}{4} \Rightarrow v = \frac{5\alpha Bq}{4m}$$

5.57 Σωστή απάντηση το α).

Υπολογίζουμε το βήμα της έλικας. Ισχύει:

$$\beta = v \cdot \sin 30^\circ \cdot T \Rightarrow \beta = v \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{2\pi m}{B|q|} \Rightarrow \beta = 2\sqrt{3}\pi R$$

Ο αριθμός των περιφορών του σωματιδίου θα είναι:

$$N = \frac{\Delta x}{\beta} \Rightarrow N = \left(\frac{5\sqrt{3}\pi R}{2\sqrt{3}\pi R}\right) \text{ περ.} \Rightarrow N = 2,5 \text{ περ.}$$

5.58 Σωστή απάντηση το γ).

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για να υπολογίσουμε το μέτρο της ταχύτητας που θα αποκτήσει το ηλεκτρόνιο. Ισχύει:

$$\frac{1}{2} m_e v^2 = |q_e| V \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2|q_e|V}{m_e}}$$

Το βήμα της έλικας υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\beta = v \cdot \sin 60^\circ \cdot T \Rightarrow \beta = \sqrt{\frac{2|q_e|V}{m_e}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2m_e}{B|q_e|} \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{B} \sqrt{\frac{2V m_e}{|q_e|}}$$

5.59 Σωστή απάντηση το γ).

Όταν ο μεταγωγός είναι στη θέση (1), το ρεύμα έχει σταθεροποιηθεί στην τιμή I_0 . Από τον νόμο του Ohm για κλειστό κύκλωμα έχουμε:

$$I_0 = \frac{E}{R}$$

Η θερμότητα που θα παραχθεί στο κύκλωμα από τη στιγμή που ο μεταγωγός μεταφέρθηκε στη θέση (2) μέχρι να μηδενιστεί το ρεύμα στο κύκλωμα είναι:

$$Q = U_B \Rightarrow Q = \frac{1}{2} L I_0^2 \Rightarrow Q = \frac{L E^2}{2 R^2}$$

5.60 Σωστή απάντηση το γ).

Η τελική τιμή της έντασης του ρεύματος θα είναι:

$$I_0 = \frac{E}{R+r} \Rightarrow I_0 = \frac{E}{R + \frac{R}{10}} \Rightarrow I_0 = \frac{10E}{11R}$$

Τη χρονική στιγμή t_1 η ένταση του ρεύματος είναι:

$$i = \frac{55}{100} I_0 \Rightarrow i = \frac{55}{100} \cdot \frac{10E}{11R} \Rightarrow i = \frac{E}{2R}$$

Από τον 2^ο κανόνα του Kirchhoff έχουμε:

$$E - |E_{\text{αυτ}}| = i(R+r) \Rightarrow E - L \left| \frac{di}{dt} \right| = i(R+r) \Rightarrow$$

$$E - L \left| \frac{di}{dt} \right| = \frac{E}{2R} \left(R + \frac{R}{10} \right) \Rightarrow$$

$$\left| \frac{di}{dt} \right| = \frac{9E}{20L}$$

Επειδή η ένταση του ρεύματος αυξάνεται, ο ρυθμός μεταβολής της έντασης του ρεύματος είναι θετικός, επομένως προκύπτει:

$$\frac{di}{dt} = \frac{9E}{20L}$$

5.61 Σωστή απάντηση το γ).

Υπολογίζουμε τη θερμότητα που παράγεται στον αντιστάτη σε χρόνο μιας περιόδου του εναλλασσόμενου ρεύματος:

$$Q = Q_{\left(0-\frac{T}{4}\right)} + Q_{\left(\frac{T}{4}-\frac{3T}{4}\right)} + Q_{\left(\frac{3T}{4}-T\right)} = I^2 R \left(\frac{T}{4} - 0 \right) + I^2 R \left(\frac{3T}{4} - \frac{T}{4} \right) + 0 = I^2 R \frac{3T}{4}$$

Η ενεργός τιμή του παραπάνω εναλλασσόμενου ρεύματος πρέπει να προκαλεί το ίδιο θερμικό αποτέλεσμα στον αντιστάτη σε χρονική διάρκεια μιας περιόδου, άρα:

$$Q_{\text{εν.}} = Q \Rightarrow I_{\text{εν.}}^2 R T = I^2 R \frac{3T}{4} \Rightarrow I_{\text{εν.}} = \frac{I\sqrt{3}}{2}$$

5.62

Α. Σωστή απάντηση το α).

Αρχικά, όταν ο διακόπτης δ είναι ανοιχτός, στα άκρα του αγωγού ΚΛ αναπτύσσεται τάση

από επαγωγή αφού αυτός έχει ταχύτητα και βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο κάθετα στις δυναμικές του γραμμές. Για την τάση αυτή ισχύει:

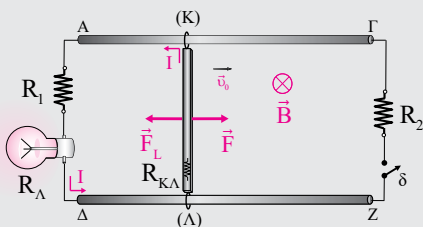
$$E_{\text{επ.}} = Bv_0L(1)$$

Το κλειστό κύκλωμα ΚΑΔΛΚ διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα έντασης:

$$I = \frac{E_{\text{επ.}}}{R_{\text{ολ.}}} \Rightarrow I = \frac{E_{\text{επ.}}}{R_1 + R_{\Lambda} + R_{\text{ΚΛ}}} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} I = \frac{Bv_0L}{3R}(2)$$

Ο αγωγός ΚΛ, αφού διαρρέεται από ρεύμα και βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο, δέχεται δύναμη Laplace η οποία αντιστέκεται στην κίνηση του αγωγού (κανόνας του Lenz) και έχει μέτρο:

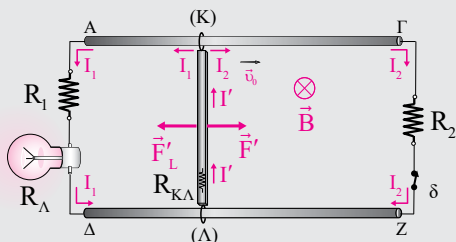
$$F_L = BIL \Rightarrow F_L = \frac{B^2L^2v_0}{3R}(3)$$



Για να κινείται ο αγωγός ΚΛ με σταθερή ταχύτητα πρέπει:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F = F_L \stackrel{(3)}{\Rightarrow} F = \frac{B^2L^2v_0}{3R}(4)$$

Η τάση στα άκρα του λαμπτήρα είναι $V_{\Lambda} = I \cdot R \Rightarrow V_{\Lambda} = \frac{Bv_0L}{3}(5)$ η οποία θα ισούται με την τάση κανονικής λειτουργίας του αφού αυτός λειτουργεί κανονικά.



Τελικά, όταν ο διακόπτης δ είναι κλειστός, στα άκρα του αγωγού ΚΛ αναπτύσσεται πάλι τάση από επαγωγή αλλά τώρα στο κύκλωμα υπάρχουν 3 ρεύματα όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα. Για να εξακολουθεί ο λαμπτήρας να λειτουργεί κανονικά θα πρέπει η τάση στα άκρα του να είναι πάλι ίση με την τάση κανονικής του λειτουργίας. Ισχύει:

$$V'_{\Lambda} = V_{\Lambda} \stackrel{(5)}{\Rightarrow} I_1 \cdot R = \frac{Bv_0L}{3} \Rightarrow I_1 = \frac{Bv_0L}{3R}(6)$$

Για την ολική αντίσταση του κυκλώματος όταν ο διακόπτης είναι κλειστός έχουμε:

$$R_{1,\Lambda} = R_1 + R_{\Lambda} = 2R$$

$$R_{1,\Lambda,2} = \frac{R_{1,\Lambda} \cdot R_2}{R_{1,\Lambda} + R_2} = \frac{2R \cdot 2R}{2R + 2R} = R$$

$$R_{\text{ολ.}} = R_{1,\Lambda,2} + R_{\text{ΚΛ}} = R + R = 2R$$

Για την νέα τάση από επαγωγή στα άκρα του αγωγού ισχύει $E'_{\text{επ.}} = Bv'_0L$ ενώ για το ολικό ρεύμα που διαρρέει τον αγωγό ΚΛ έχουμε:

$$I' = \frac{E'_{\text{επ.}}}{R'_{\text{ολ.}}} \Rightarrow I' = \frac{Bv'_0L}{2R}(7)$$

$$\text{Επειδή } V_{1,\Lambda} = V_2 \Rightarrow I_1 \cdot 2R = I_2 \cdot 2R \Rightarrow I_1 = I_2$$

και αφού $I' = I_1 + I_2$ τελικά παίρνουμε:

$$I_1 = I_2 = \frac{I'}{2} \stackrel{(7)}{\Rightarrow} I_1 = \frac{Bv'_0L}{4R} \stackrel{(6)}{\Rightarrow}$$

$$\frac{Bv_0L}{3R} = \frac{Bv'_0L}{4R} \Rightarrow v'_0 = \frac{4v_0}{3}$$

Β. Σωστή απάντηση το γ).

Για τη νέα δύναμη Laplace που ασκείται στον αγωγό ΚΛ όταν ο διακόπτης είναι κλειστός ισχύει:

$$F'_L = BI'L \Rightarrow F'_L = \frac{B^2L^2v'_0}{2R} \stackrel{(7)}{\Rightarrow}$$

$$F'_L = \frac{2B^2L^2v_0}{3R}(8)$$

Για να κινείται ο αγωγός ΚΛ με σταθερή ταχύτητα πρέπει:

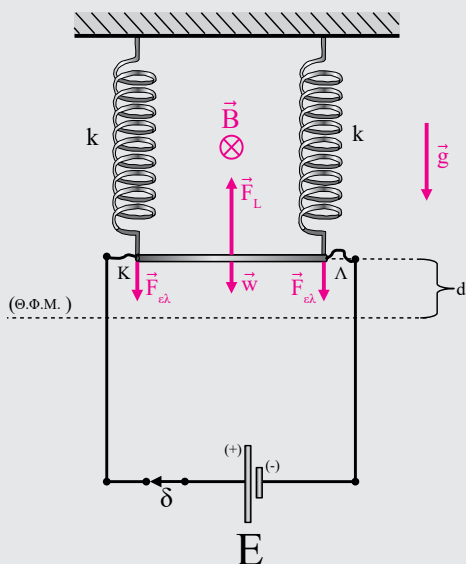
$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F' = F'_L \stackrel{(8)}{\Rightarrow} F' = \frac{2B^2L^2v_0}{3R} \Rightarrow$$

$$F' = 2F$$

5.63 Σωστή απάντηση το α).

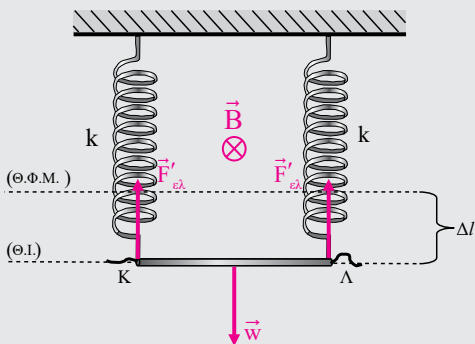
Στην αρχική κατάσταση ισορροπίας του αγωγού έχουμε:

$$\begin{aligned} \Sigma F = 0 &\Rightarrow 2F_{ελ.} + w = F_L \Rightarrow \\ 2kd + mg &= BI l \Rightarrow \\ 2kd + mg &= B \frac{E}{R} l \Rightarrow R = \frac{B/E}{2kd + mg} \quad (1) \end{aligned}$$



Όταν ανοίξουμε το διακόπτη δ, ο αγωγός αρχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με $D = 2k$, γύρω από τη θέση ισορροπίας του, για την οποία ισχύει:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow 2F'_{ελ.} = w \Rightarrow 2k \cdot \Delta l = mg \quad (2)$$



Τη στιγμή που ανοίγουμε το διακόπτη ο αγωγός έχει ταχύτητα $v = 0$, άρα, βρίσκεται σε

ακραία θέση της ταλάντωσής και επειδή καταργείται η δύναμη Laplace θα κινηθεί προς τα κάτω. Έτσι το πλάτος της ταλάντωσης που θα εκτελέσει είναι $A = d + \Delta l$.

Για την ολική ενέργεια της ταλάντωσής του ισχύει:

$$\begin{aligned} E_{ολ.} &= 9kd^2 \Rightarrow \frac{1}{2} DA^2 = 9kd^2 \Rightarrow \\ \frac{1}{2} 2kA^2 &= 9kd^2 \Rightarrow A^2 = 9d^2 \Rightarrow A = 3d \Rightarrow \\ d + \Delta l &= 3d \Rightarrow \Delta l = 2d \quad (3) \end{aligned}$$

$$(2) \Rightarrow 2k \cdot 2d = mg \Rightarrow 4kd = mg \quad (4)$$

$$\text{Τελικά } (1) \Rightarrow R = \frac{B/E}{2kd + 4kd} \Rightarrow R = \frac{B/E}{6kd}$$

5.64 Σωστή απάντηση το β).

Οι δύο αγωγοί είναι κατασκευασμένοι από το ίδιο σύρμα του ίδιου μήκους, άρα:

$$L_K = L_\Sigma \Rightarrow N_1 2\pi r_1 = N_2 2\pi r_2 \Rightarrow r_2 = 0,5r_1$$

$$N_1 r_1 = N_2 0,5r_1 \Rightarrow N_2 = 2N_1 \quad (1)$$

Γνωρίζουμε ότι η αντίσταση ενός αγωγού σταθερής διατομής είναι ανάλογη του μήκους του.

Επειδή:

$$L_K = L_\Sigma \Rightarrow R_K = R_\Sigma \quad (2)$$

Άρα, η ένταση του μαγνητικού πεδίου στο κέντρο του κυκλικού αγωγού είναι:

$$\begin{aligned} B_K &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi I_K}{r_1} N_1 \Rightarrow B_K = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi \frac{V}{R_K}}{r_1} N_1 \Rightarrow \\ B_K &= \frac{\mu_0 V \cdot N_1}{2r_1 R_K} \quad (3) \end{aligned}$$

Ενώ του σωληνοειδούς είναι:

$$\begin{aligned} B_\Sigma &= \frac{\mu_0}{4\pi} 4\pi I_\Sigma \frac{N_2}{l} \stackrel{(1), \ell=8r_1}{\Rightarrow} \\ B_\Sigma &= \frac{\mu_0}{4\pi} 4\pi \frac{V}{R_\Sigma} \cdot \frac{2N_1}{8r_1} \stackrel{(2)}{\Rightarrow} B_\Sigma = \frac{\mu_0 V \cdot N_1}{4R_K r_1} \quad (4) \end{aligned}$$

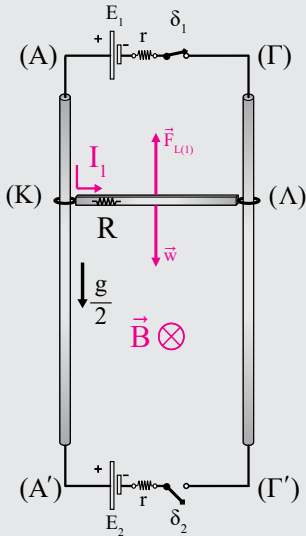
Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (3) και

$$(4), \text{ έχουμε } \frac{B_K}{B_\Sigma} = 2.$$

5.65 Σωστή απάντηση το γ).

Όταν κλείσουμε τον διακόπτη δ_1 και αφήσουμε τον αγωγό ΚΛ ελεύθερο να κινηθεί, έχουμε:
2^{ος} Νόμος του Νεύτωνα:

$$\begin{aligned}\Sigma F &= m\alpha \Rightarrow \\ mg - F_{L(1)} &= m\alpha \Rightarrow mg - BI_1 l = m \frac{g}{2} \Rightarrow \\ m \frac{g}{2} &= BI_1 l \Rightarrow m \frac{g}{2} = B \frac{E_1}{R+r} l \Rightarrow \\ E_1 &= \frac{mg(R+r)}{2Bl} \quad (1)\end{aligned}$$

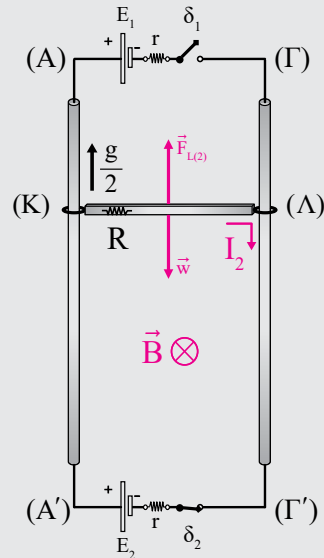


Όταν κλείσουμε τον διακόπτη δ_2 και αφήσουμε τον αγωγό ΚΛ ελεύθερο να κινηθεί, έχουμε:
2^{ος} Νόμος του Νεύτωνα:

$$\begin{aligned}\Sigma F &= m\alpha \Rightarrow \\ F_{L(2)} - mg &= m\alpha' \Rightarrow BI_2 l - mg = m \frac{g}{2} \Rightarrow \\ \frac{3mg}{2} &= BI_2 l \Rightarrow \frac{3mg}{2} = B \frac{E_2}{R+r} l \Rightarrow \\ E_2 &= \frac{3mg(R+r)}{2Bl} \quad (2)\end{aligned}$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει:

$$E_2 = 3E_1$$



5.66 Σωστή απάντηση το β).

Α' Τρόπος

Τόσο στην περίπτωση του σχήματος Α όσο και στην περίπτωση του σχήματος Β, καθώς ο μαγνήτης αρχικά πλησιάζει και μετά απομακρύνεται από τους δύο δακτυλίους, όλο και περισσότερες αρχικά μαγνητικές δυναμικές γραμμές και στη συνέχεια όλο και λιγότερες μαγνητικές δυναμικές γραμμές διέρχονται από αυτούς, οπότε μεταβάλλεται η μαγνητική ροή και με βάση τον νόμο επαγωγής του Faraday αναπτύσσεται τάση από επαγωγή στα άκρα τους. Στην περίπτωση όμως που ο δακτύλιος φέρει εγκοπή (σχήμα Α), δεν υπάρχει κλειστό κύκλωμα, άρα, δε διαρρέεται ο δακτύλιος από επαγωγικό ρεύμα οπότε δε δημιουργεί αυτός μαγνητικό πεδίο. Έτσι, ο μαγνήτης στην περίπτωση του σχήματος Α εκτελεί ελεύθερη πτώση. Όταν φτάσει στη θέση ΙΙ έχει κινητική ενέργεια:

$$K = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow K = 32J$$

Στην περίπτωση που ο δακτύλιος δεν φέρει εγκοπή (σχήμα Β), λόγω της τάσης που αναπτύσσεται στον δακτύλιο, επειδή έχουμε κλειστό κύκλωμα, αυτό θα διαρρέεται από επαγωγικό ρεύμα οπότε ο δακτύλιος θα δημιουργεί

μαγνητικό πεδίο. Η φορά του επαγωγικού ρεύματος που θα διαρρέει τον δακτύλιο με βάση τον κανόνα του Lenz θα αντιτίθεται στο αίτιο που το προκάλεσε, δηλαδή στην κίνηση του μαγνήτη (αρχικά καθώς πλησιάζει τον δακτύλιο και έπειτα καθώς απομακρύνεται από αυτόν). Έτσι το μαγνητικό πεδίο που θα δημιουργήσει ο δακτύλιος θα επιβραδύνει την κίνηση του μαγνήτη, οπότε όταν φτάσει στη θέση II θα έχει και μικρότερη ταχύτητα από αυτή που είχε στη ίδια θέση όταν ο δακτύλιος έχει την εγκοπή. Όταν φτάσει στη θέση II στην περίπτωση του σχήματος Β, ο μαγνήτης έχει κινητική ενέργεια:

$$K' = \frac{1}{2}mv'^2 \Rightarrow K' = 8J$$

Η θερμότητα που αναπτύσσεται, λόγω φαινομένου Joule, στον μεταλλικό δακτύλιο, κατά την κίνησή του από τη θέση I στη θέση II στη δεύτερη περίπτωση, θα είναι ίση με τη διαφορά των δύο κινητικών ενεργειών, (Η κινητική ενέργεια στη θέση II στην περίπτωση του σχήματος Α είναι ίση με την αρχική δυναμική ενέργεια του μαγνήτη αφού δεν έχουμε απώλειες ενέργειας) δηλαδή:

$$Q = K - K' \Rightarrow Q = 24J$$

Β' Τρόπος

Στην περίπτωση του σχήματος Α εφαρμόζουμε Αρχή διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας (Α.Δ.Μ.Ε) για τις θέσεις I και II:

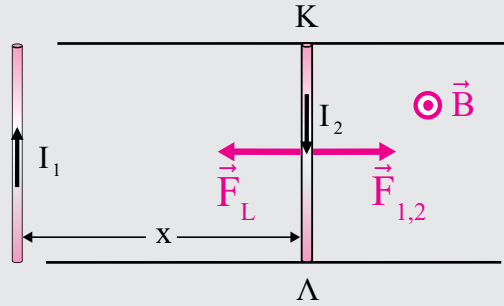
$$E_{\text{MHX.I}} = E_{\text{MHX.II}} \Rightarrow K_I + U_I = K_{II} + U_{II} \Rightarrow$$

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow mgh = 32J(1)$$

Στην περίπτωση του σχήματος Β εφαρμόζουμε Αρχή διατήρησης της Ενέργειας (Α.Δ.Ε) για τις θέσεις I και II:

$$\begin{aligned} E_{\text{MHX.I}} &= E_{\text{MHX.II}} + Q \Rightarrow \\ K_I + U_I &= K_{II} + U_{II} + Q \Rightarrow \\ mgh &= \frac{1}{2}mv'^2 + Q \Rightarrow \\ Q &= 24J \end{aligned}$$

5.67 Σωστή απάντηση το α).



Ο αγωγός ΚΛ βρίσκεται μέσα στο ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης $\vec{B}$ και μέσα στο μαγνητικό πεδίο που δημιουργείται γύρω από τον ευθύγραμμο ρευματοφόρο αγωγό. Προφανώς ο αγωγός θα ισορροπήσει όταν η συνισταμένη των δυνάμεων που ενεργούν πάνω του είναι ίση με μηδέν. Οι δυνάμεις που δέχεται ο αγωγός ΚΛ είναι:

Η δύναμη $\vec{F}_L$ από το ομογενές μαγνητικό πεδίο και η δύναμη $\vec{F}_{1,2}$ που ασκεί ο ευθύγραμμος ρευματοφόρος αγωγός στον αγωγό ΚΛ.

Ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{1,2} + \vec{F}_L = 0 \Rightarrow F_{1,2} = F_L \Rightarrow$$

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_1 \cdot I_2}{x} l = BI_2 l \Rightarrow$$

$$x = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi B}$$

5.68 Σωστή απάντηση το γ).

Η θερμότητα που εκλύεται στον αντιστάτη (έστω R) όταν διαρρέεται από εναλλασσόμενο ρεύμα σε χρόνο $t = 0,5h$ είναι $Q = I_{\text{ev}}^2 R t(1)$.

Όμως $I_{\text{ev}} = \frac{I}{\sqrt{2}}$, οπότε η σχέση (1) γίνεται

$$Q = \frac{I^2}{2} R t(2).$$

Όταν ο ίδιος αντιστάτης διαρρέεται από σταθερό ρεύμα, ίσο με το πλάτος του εναλλασσόμενου ρεύματος σε χρόνο $t' = 2h = 4t$, η θερμότητα που εκλύεται στον αντιστάτη είναι:

$$Q' = I^2 R t' = I^2 R \cdot 4t = 4I^2 R t \Rightarrow Q' = 8Q$$

5.69 Σωστή απάντηση β).

Α' τρόπος

Η στιγμιαία ισχύς της εναλλασσόμενης τάσης είναι:

$$p = v \cdot i$$

και επειδή η στιγμιαία τιμή της τάσης είναι της μορφής $v = V \eta \mu \omega t$ τότε η στιγμιαία τιμή της έντασης είναι $i = I \eta \mu \omega t$ οπότε τελικά η στιγμιαία ισχύς δίνεται από τη σχέση:

$$p = v \cdot i = V \cdot \eta \mu \omega t \cdot I \eta \mu \omega t \Rightarrow p = VI \cdot \eta \mu^2 \omega t$$

όπου $p_{\max} = VI$.

Για το ποσό θερμότητας Q_1 που εκλύεται πάνω στην αντίσταση R_1 , σε χρονικό διάστημα $\Delta t = T$, όπου T η περίοδος της αρμονικά εναλλασσόμενης τάσης (1), ισχύει:

$$Q_1 = V_{\text{εφ.}} \cdot I_{\text{εφ.}} \cdot T \Rightarrow Q_1 = \frac{V}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I}{\sqrt{2}} T \Rightarrow Q_1 = \frac{V \cdot I \cdot T}{2} (1)$$

Για το ποσό θερμότητας Q_2 που εκλύεται πάνω στην αντίσταση R_2 σε χρονικό διάστημα $\Delta t = T$, ισχύει:

$$Q_2 = V_{\Sigma} I_{\Sigma} T \Rightarrow Q_2 = P_{\Sigma} \cdot T$$

Από το διάγραμμα προκύπτει ότι $P_{\Sigma} = \frac{p_{\max}}{4}$ οπότε για το ποσό θερμότητας Q_2 τελικά παίρνουμε:

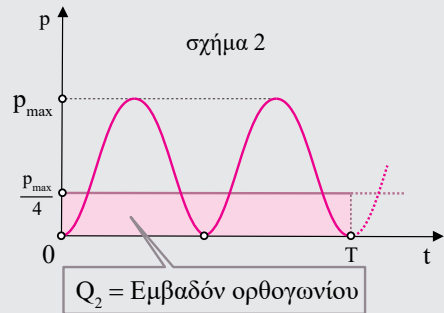
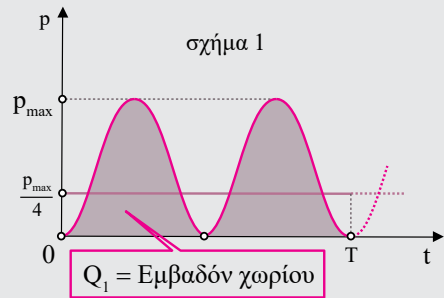
$$Q_2 = \frac{p_{\max}}{4} \cdot T \xRightarrow{p_{\max} = VI} Q_2 = \frac{V \cdot I \cdot T}{4} (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) τελικά προκύπτει:

$$Q_1 = 2Q_2$$

Β' τρόπος

Για τον υπολογισμό της θερμότητας μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν που σχηματίζεται μεταξύ της γραφικής παράστασης των αξόνων και των χρονικών στιγμών που θέλουμε να βρούμε τη θερμότητα, σε διάγραμμα $p = f(t)$.



Για τον υπολογισμό της θερμότητας Q_1 υπολογίζουμε το εμβαδόν του χωρίου που φαίνεται στο σχήμα 1. Λόγω συμμετρίας της γραφικής παράστασης της σχέσης $p(t) = p_{\max} \cdot \eta \mu^2 \omega t$, το εμβαδόν αυτό είναι ίσο με το μισό του εμβαδού του ορθογωνίου με πλευρές τις $p_{\max}$ και T . Άρα:

$$Q_1 = \frac{1}{2} p_{\max} \cdot T (1)$$

Για τον υπολογισμό της θερμότητας Q_2 υπολογίζουμε το εμβαδόν του ορθογωνίου με πλευρές τις $\frac{p_{\max}}{4}$ και T που φαίνεται στο σχήμα 2. Άρα:

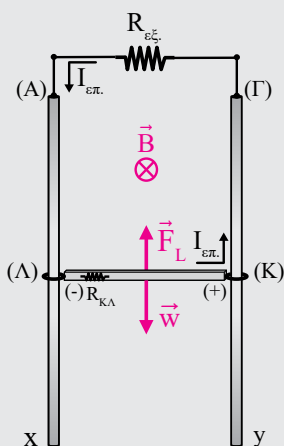
$$Q_2 = \frac{1}{4} p_{\max} \cdot T (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) τελικά προκύπτει:

$$Q_1 = 2Q_2$$

5.70 Σωστή απάντηση γ).

Έστω ότι τα πάνω άκρα Α και Γ των δύο κατακόρυφων συρμάτων x και y ενώνονται με μία εξωτερική αντίσταση $R_{\text{εξ.}}$ όπως φαίνεται στο σχήμα.



Όταν αφήσουμε τη ράβδο ελεύθερη, αρχίζει να κινείται προς τα κάτω επιταχυνόμενη λόγω της δύναμης του βάρους. Λόγω της κίνησης της (αφού αποκτά ταχύτητα) καθώς βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο αναπτύσσεται στα άκρα της τάση από επαγωγή που θα δίνεται από τη σχέση:

$$E_{\varepsilon\pi.} = Bvl(1)$$

Η τάση αυτή θα έχει ως αποτέλεσμα το κύκλωμα να διαρρέεται από ρεύμα (επαγωγικό):

$$I_{\varepsilon\pi.} = \frac{E_{\varepsilon\pi.}}{R_{\text{ολ.}}} \Rightarrow I_{\varepsilon\pi.} = \frac{Bvl}{R_{\varepsilon\xi.} + R_{\kappa\lambda}}(2)$$

Επειδή ο αγωγός διαρρέεται από ρεύμα και βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο θα του ασκηθεί δύναμη Laplace μέτρου:

$$F_L = BI_{\varepsilon\pi.}l \Rightarrow F_L = \frac{B^2 l^2}{R_{\varepsilon\xi.} + R_{\kappa\lambda}} \cdot v(3)$$

Η φορά του ρεύματος σύμφωνα με τον κανόνα του Lenz θα πρέπει να αντιτίθεται στο αίτιο που το προκάλεσε. Το ρεύμα το προκάλεσε η κίνηση του αγωγού προς τα κάτω, άρα, η δύναμη Laplace (που οφείλεται με τη σειρά της στο ρεύμα που διαρρέει τον αγωγό) πρέπει να είναι προς τα πάνω οπότε με τον κανόνα των τριών δακτύλων του δεξιού χεριού βρίσκουμε ότι η φορά του ρεύματος είναι αυτή που φαίνεται στο σχήμα.

Ο αγωγός επιταχύνεται άρα:

$$v \uparrow \Rightarrow E_{\varepsilon\pi.} \uparrow \Rightarrow I_{\varepsilon\pi.} \uparrow \Rightarrow F_L \uparrow \Rightarrow \Sigma F \downarrow \Rightarrow a \downarrow$$

Η κίνηση που θα εκτελέσει ο αγωγός είναι ευθύγραμμη μη ομαλά επιταχυνόμενη με συνεχώς μειούμενη επιτάχυνση. Κάποια στιγμή η επιτάχυνση θα γίνει μηδέν όταν και η συνισταμένη δύναμη γίνει μηδέν, οπότε από εκεί και μετά ο αγωγός θα εκτελέσει Ευθύγραμμη Ομαλή Κίνηση με σταθερή (οριακή) ταχύτητα.

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_L = mg \Rightarrow \frac{B^2 l^2}{R_{\varepsilon\xi.} + R_{\kappa\lambda}} v_{\text{op.}} = mg \Rightarrow v_{\text{op.}} = \frac{mg(R_{\varepsilon\xi.} + R_{\kappa\lambda})}{B^2 l^2}(4)$$

Στην περίπτωση 1 η εξωτερική αντίσταση είναι ο συνδυασμός των αντιστάσεων R_1 και R_2 που συνδέονται σε σειρά, ενώ στην περίπτωση 2 η εξωτερική αντίσταση είναι ο συνδυασμός των αντιστάσεων R_1 και R_2 που συνδέονται παράλληλα.

Περίπτωση 1: $R_{\varepsilon\xi.} = R_1 + R_2 = 4R$

$$(4) \Rightarrow v_{\text{op.}(1)} = \frac{mg(R_{\varepsilon\xi.} + R_{\kappa\lambda})}{B^2 l^2} = \frac{mg(4R + R)}{B^2 l^2} = \frac{5mgR}{B^2 l^2}(5)$$

Περίπτωση 2: $R_{\varepsilon\xi.} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{2R \cdot 2R}{2R + 2R} = R$

$$(4) \Rightarrow v_{\text{op.}(2)} = \frac{mg(R_{\varepsilon\xi.} + R_{\kappa\lambda})}{B^2 l^2} = \frac{mg(R + R)}{B^2 l^2} = \frac{2mgR}{B^2 l^2}(6)$$

Διαιρώντας τις σχέσεις (5) και (6) κατά μέλη παίρνουμε:

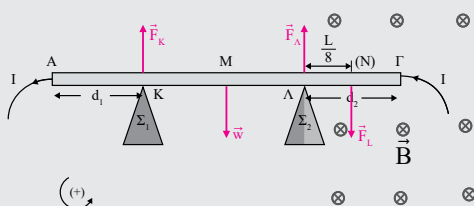
$$\frac{v_{\text{op.}(1)}}{v_{\text{op.}(2)}} = \frac{\frac{5mgR}{B^2 l^2}}{\frac{2mgR}{B^2 l^2}} = 2,5 \Rightarrow v_{\text{op.}(1)} = 2,5 v_{\text{op.}(2)}$$

5.71 Σωστή απάντηση το α).

Στη ρευματοφόρο ράβδο ασκούνται:

- οι δυνάμεις F_K και F_Λ από τα στηρίγματα,
- το βάρος $\vec{w}$ στο μέσο της M ,

- η δύναμη Laplace $\vec{F}_L$ από το μαγνητικό πεδίο στο μέσο M του τμήματος ΛΓ όπως φαίνεται στο σχήμα.



Εφόσον η ράβδος ισορροπεί, οριακά έτοιμη να ανατραπεί, θα ισχύει $F_K = 0$ και:

$$\begin{aligned}\Sigma \tau_A = 0 &\Rightarrow w \cdot (MA) - F_L \cdot (NA) = 0 \Rightarrow \\ mg \left(\frac{L}{2} - \frac{L}{4} \right) - F_L \frac{L}{8} &= 0 \Rightarrow mg \frac{L}{4} = BI \frac{L}{4} \frac{L}{8} \Rightarrow \\ I &= \frac{8mg}{BL}\end{aligned}$$

Για τον ρυθμό παραγωγής θερμότητας στον αγωγό ισχύει:

$$P_\Theta = I^2 R \Rightarrow P_\Theta = \frac{64m^2 g^2}{B^2 L^2} R$$

5.72 Σωστή απάντηση το γ).

Όταν αφήσουμε τον αγωγό ελεύθερο τη χρονική στιγμή $t = 0$ αρχίζει να κινείται προς τα κάτω επιταχυνόμενος λόγω της δύναμης του βάρους. Λόγω της κίνησής του, (αφού αποκτά ταχύτητα), καθώς βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο, αναπτύσσεται στα άκρα του τάση από επαγωγή που θα δίνεται από τη σχέση:

$$E_{\text{επ.}} = Bv_l$$

και πολικότητας που φαίνεται στο σχήμα.

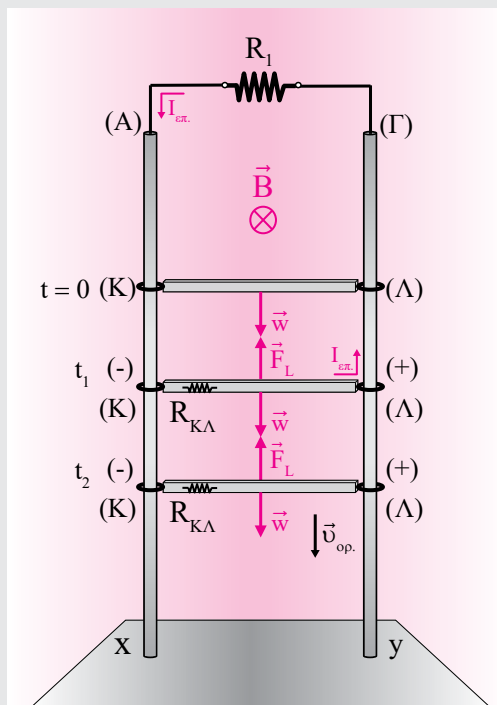
Η τάση αυτή θα έχει ως αποτέλεσμα το κύκλωμα να διαρρέεται από ρεύμα (επαγωγικό):

$$I_{\text{επ.}} = \frac{E_{\text{επ.}}}{R_{\text{ολ.}}}$$

Επειδή ο αγωγός διαρρέεται από ρεύμα και βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο θα του ασκηθεί δύναμη Laplace μέτρου:

$$F_L = BI_{\text{επ.}} l(1)$$

Και φοράς αντίθετης του βάρους όπως φαίνεται στο σχήμα.



Ο αγωγός επιταχύνεται άρα:

$$v \uparrow \Rightarrow E_{\text{επ.}} \uparrow \Rightarrow I_{\text{επ.}} \uparrow \Rightarrow F_L \uparrow \Rightarrow \Sigma F \downarrow \Rightarrow a \downarrow$$

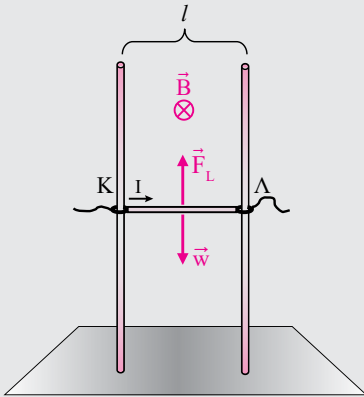
Η κίνηση που θα εκτελέσει ο αγωγός είναι ευθύγραμμη μη ομαλά επιταχυνόμενη με συνεχώς μειούμενη επιτάχυνση. Τη χρονική στιγμή t_2 που ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας του αγωγού ΚΛ μηδενίζεται δηλαδή η επιτάχυνση μηδενίζεται, η συνισταμένη δύναμη θα γίνει μηδέν, οπότε από εκεί και μετά ο αγωγός θα εκτελέσει Ευθύγραμμη Ομαλή Κίνηση με σταθερή (οριακή) ταχύτητα. Άρα:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_L = mg \Rightarrow BI_{\text{επ.}} l = mg \Rightarrow I_{\text{επ.}} = \frac{mg}{Bl} \quad (2)$$

Ο ρυθμός με τον οποίο παράγεται θερμότητα, λόγω φαινομένου Joule, στην αντίσταση R_1 από τη χρονική στιγμή και μετά που ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας του αγωγού ΚΛ μηδενίζεται, είναι:

$$\frac{\Delta Q_{R_1}}{\Delta t} = P_{R_1} = I_{\text{επ.}}^2 \cdot R_1 \Rightarrow \frac{\Delta Q_{R_1}}{\Delta t} = \left(\frac{mg}{Bl} \right)^2 \cdot 3R \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta Q_{R_1}}{\Delta t} = \frac{3m^2 g^2 R}{B^2 l^2}$$

5.73 Α. Σωστή απάντηση είναι το α).


Εφόσον ο αγωγός βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο, κάθετα στις δυναμικές του γραμμές και διαρρέεται από ρεύμα, τότε δέχεται δύναμη Laplace της οποίας το μέτρο θα δίνεται από τη σχέση:

$$F_L = BI l$$

Για να ισορροπεί ο αγωγός θα πρέπει σύμφωνα με τον 1ο Νόμο του Νεύτωνα να ισχύει:

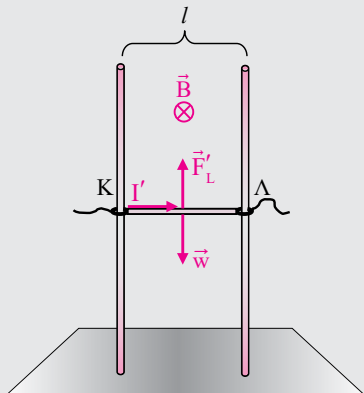
$$\Sigma F = 0$$

Για να συμβεί αυτό, θα πρέπει η φορά της δύναμης Laplace να είναι αντίθετη του βάρους και το μέτρο της ίσο με αυτό του βάρους. Με τον κανόνα των τριών δακτύλων του δεξιού χεριού προκύπτει ότι για να έχει η δύναμη Laplace φορά προς τα πάνω (βλέπε σχήμα), θα πρέπει η φορά του ηλεκτρικού ρεύματος που διαρρέει τον αγωγό να είναι από το άκρο του Κ προς το άκρο του Λ.

Β. Σωστή απάντηση είναι το β).

Απ' την αρχική ισορροπία του αγωγού έχουμε:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_L = w = mg \quad (1)$$



Αν υποδιπλασιάσουμε την ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος που διαρρέει τον αγωγό τότε η δύναμη Laplace θα υποδιπλασιαστεί:

$$F'_L = B \frac{I}{2} l = \frac{F_L}{2} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} F'_L = \frac{mg}{2} \quad (2)$$

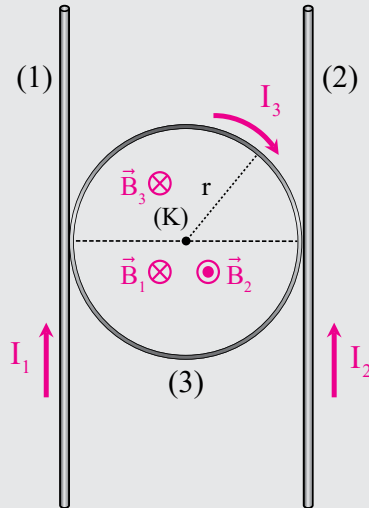
Επειδή $F'_L < mg$ ο αγωγός θα κινηθεί προς τα κάτω επιταχυνόμενος.

Για την αρχική επιτάχυνση που θα αποκτήσει ισχύει:

2ος Νόμος του Νεύτωνα

$$\Sigma F = ma \Rightarrow mg - F'_L = ma \stackrel{(2)}{\Rightarrow}$$

$$mg - \frac{mg}{2} = ma \Rightarrow a = \frac{g}{2}$$

5.74 Σωστή απάντηση είναι η α).


Για να είναι η συνολική ένταση του μαγνητικού πεδίου στο κέντρο (Κ) του κυκλικού αγωγού είναι ίση με μηδέν, πρέπει να ισχύει:

$$\vec{B}_{\text{ολ.}(K)} = 0 \Rightarrow B_1 + B_3 = B_2 \Rightarrow$$

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_1}{r} + \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2\pi I_3}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_2}{r} \Rightarrow$$

$$2I_1 + 2\pi I_3 = 2I_2 \Rightarrow I + \pi I_3 = 2I \Rightarrow I_3 = \frac{I}{\pi}$$

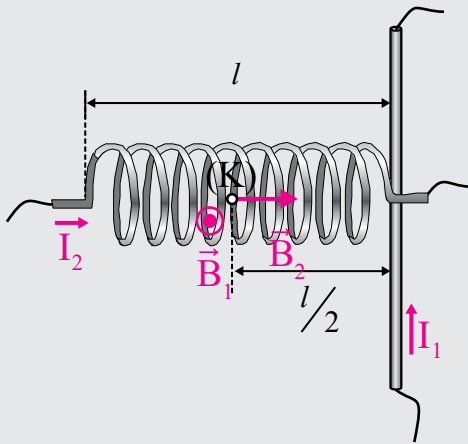
5.75 Σωστή απάντηση είναι η α).

Στο παρακάτω σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι κατευθύνσεις της έντασης του μαγνητικού πεδίου

ου εξαιτίας του ευθύγραμμου αγωγού και του σωληνοειδούς οι οποίες είναι κάθετες μεταξύ τους. Για τα μέτρα των B_1 και B_2 αντίστοιχα έχουμε:

$$B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_1}{d} \Rightarrow B_1 = \frac{\mu_0}{\pi} \cdot \frac{I_1}{l} \quad (1)$$

$$B_2 = \mu_0 \cdot I_2 \frac{N}{l} \Rightarrow B_2 = \frac{\mu_0}{\pi} \cdot \frac{I_1 N}{l} \Rightarrow B_2 = NB_1 \quad (2)$$



Για τη συνολική ένταση του μαγνητικού πεδίου στο κέντρο (Κ) του σωληνοειδούς που οφείλεται στον ευθύγραμμο αγωγό αλλά και στο σωληνοειδές, έχουμε:

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} \stackrel{(2)}{\Rightarrow} B^2 = B_1^2 + N^2 B_1^2 \Rightarrow B_1 = \frac{B}{\sqrt{N^2 + 1}}$$

5.76 Σωστή απάντηση είναι η α).

Με τη βοήθεια του διαγράμματος συμπεραίνουμε τα εξής: $I_1 = 2I$, $I_2 = I$ οπότε:

$$I_1 = 2I_2 \Rightarrow \frac{V_1}{R_1} = 2 \frac{V_2}{R_2} \Rightarrow \frac{V_1}{R_1} = 2 \frac{V_2}{4R_1} \Rightarrow V_2 = 2V_1 \quad (1)$$

$$\text{και } T_1 = 2T_2 \Rightarrow \frac{2\pi}{\omega_1} = 2 \frac{2\pi}{\omega_2} \Rightarrow \omega_2 = 2\omega_1 \quad (2)$$

Σύμφωνα με τις σχέσεις:

$$\Phi_1 = N_1 B_1 A_1 \sin(\omega_1 t) \text{ και}$$

$$\Phi_2 = N_1 2B_1 A_2 \sin(\omega_2 t)$$

και γνωρίζοντας ότι το πλάτος της έντασης της εναλλασσόμενης τάσης ισούται με $V = N \omega B A$ έχουμε:

$$V_1 = N_1 \omega_1 B_1 A_1 \quad (3) \text{ και } V_2 = N_1 \omega_2 2B_1 A_2 \quad (4)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (3), (4) έχουμε:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1 \omega_1 B_1 A_1}{N_1 \omega_2 2B_1 A_2} \stackrel{(1),(2)}{\Rightarrow} \frac{1}{2} = \frac{A_1}{4A_2} \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = 2$$

5.77 Σωστή απάντηση το γ).

Η συνολική αντίσταση του κυκλώματος ισούται με:

$$R_{\text{ολ}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + r \Rightarrow R_{\text{ολ}} = \frac{3R \cdot 6R}{3R + 6R} + 2R \Rightarrow R_{\text{ολ}} = 4R$$

Σύμφωνα με τον νόμο του Ohm ισχύει:

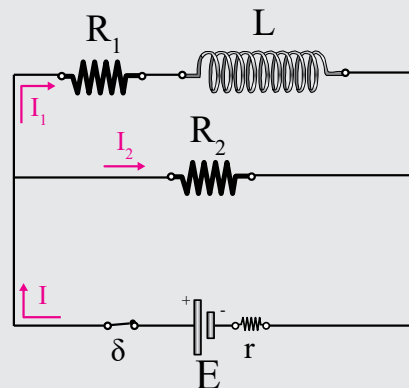
$$I = \frac{E}{R_{\text{ολ}}} \Rightarrow I = \frac{E}{4R}$$

Η πολική τάση στα άκρα της πηγής ισούται με:

$$V_{\pi} = E - Ir \Rightarrow V_{\pi} = E - \frac{E}{4R} 2R \Rightarrow V_{\pi} = \frac{E}{2}$$

Η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος που διαρρέει τον κλάδο που βρίσκεται το πηνίο ισούται με:

$$I_1 = \frac{V_{\pi}}{R_1} \Rightarrow I_1 = \frac{E}{6R}$$



Τη στιγμή που ανοίγει ο διακόπτης η ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στο πηνίο ισούται με:

$$U = \frac{1}{2} L I_1^2 \quad (1)$$

Μετά το άνοιγμα του διακόπτη, το ρεύμα μειώνεται και στα άκρα του πηνίου εμφανίζεται Η.Ε.Δ. από αυτεπαγωγή. Την στιγμή που η απόλυτη τιμή του ρυθμού μεταβολής της έντασης του ρεύματος ισούται με $\left| \frac{di}{dt} \right| = \frac{E}{L}$ η απόλυ-

τη τιμή της Η.Ε.Δ από αυτεπαγωγή ισούται με:

$$|E_{\text{αυτ}}| = L \left| \frac{di}{dt} \right| \Rightarrow |E_{\text{αυτ}}| = E$$

Η ένταση του ρεύματος που διαρρέει τον βρόγχο του κυκλώματος που περιέχει το πηνίο και τις αντιστάσεις R_1, R_2 ισούται με:

$$i = \frac{E_{\text{αυτ}}}{R_1 + R_2} \Rightarrow i = \frac{E}{9R} \Rightarrow i = \frac{2I_1}{3}$$

Η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου που είναι αποθηκευμένη στο πηνίο την παραπάνω χρονική στιγμή ισούται με:

$$U' = \frac{1}{2} Li^2 \Rightarrow U' = \frac{1}{2} L \frac{4I_1^2}{9} \Rightarrow U' = \frac{4U}{9}.$$

Η θερμότητα που εκλύθηκε στο κύκλωμα από την στιγμή που άνοιξε ο διακόπτης μέχρι τη στιγμή που η απόλυτη τιμή του ρυθμού μεταβολής της έντασης του ρεύματος ισούται με

$$\left| \frac{di}{dt} \right| = \frac{E}{L}, \text{ είναι } Q = U - U' \Rightarrow Q = \frac{5U}{9}$$

5.78 Σωστή απάντηση το α).

Ο αγωγός αρχικά εκτελεί ελεύθερη πτώση λόγω του βάρους του. Η ταχύτητα που έχει, αφού κατέβει κατά h , είναι:

$$\begin{aligned} E_{\text{MHX.}(αρχ.)} &= E_{\text{MHX.}(τελ.)} \Rightarrow \\ K_{αρχ.} + U_{αρχ.} &= K_{τελ.} + U_{τελ.} \Rightarrow \\ mgh &= \frac{1}{2} mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{2gh} \end{aligned}$$

Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ που κλείνουμε τον διακόπτη δ, έχουμε στα άκρα του αγωγού τάση από επαγωγή που θα δίνεται από τη σχέση:

$$E_{\text{επ.}} = Bvl = Bl\sqrt{2gh} \quad (1).$$

Η τάση αυτή θα έχει ως αποτέλεσμα το κύκλωμα να διαρρέεται από ρεύμα (επαγωγικό):

$$I_{\text{επ.}} = \frac{E_{\text{επ.}}}{R_{\text{ολ.}}} = \frac{Bl\sqrt{2gh}}{4R} \quad (2)$$

Ο ρυθμός με τον οποίο παράγεται θερμότητα, λόγω φαινομένου Joule, στην αντίσταση R_1 τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ είναι:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta Q_{R_1}}{\Delta t} &= P_{R_1} = I_{\text{επ.}}^2 \cdot R_1 \Rightarrow \\ \frac{\Delta Q_{R_1}}{\Delta t} &= \left(\frac{Bl\sqrt{2gh}}{4R} \right)^2 \cdot 3R = \frac{B^2 l^2 2gh}{16R^2} \cdot 3R \Rightarrow \\ \frac{\Delta Q_{R_1}}{\Delta t} &= \frac{3ghB^2 l^2}{8R} \end{aligned}$$

5.79 Σωστή απάντηση είναι το β).

Αρχικά ο μεταγωγός είναι στη θέση Ι. Η συνολική αντίσταση του κυκλώματος ισούται με:

$$R_{k,2} = \frac{R \cdot R}{R + R} = \frac{R}{2} \text{ και}$$

$$R_{\text{ολ.}} = R_{k,2} + R_1 \Rightarrow R_{\text{ολ.}} = \frac{R}{2} + R \Rightarrow R_{\text{ολ.}} = \frac{3R}{2}$$

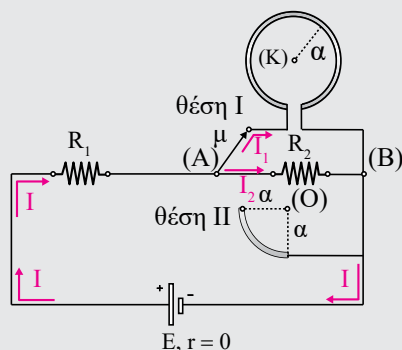
Σύμφωνα με τον νόμο του Ohm για κλειστό κύκλωμα έχουμε:

$$I = \frac{E}{R_{\text{ολ.}}} \Rightarrow I = \frac{2E}{3R}$$

$$V_{AB} = IR_{k,2} \Rightarrow V_{AB} = \frac{E}{3}$$

Για την ένταση του ρεύματος που διαρρέει τον κυκλικό αγωγό έχουμε:

$$I_1 = \frac{V_{AB}}{R_k} \Rightarrow I_1 = \frac{E}{3R}$$



Η ένταση του μαγνητικού πεδίου στο κέντρο (K) του κυκλικού αγωγού ισούται με:

$$B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi I_1}{\alpha} \Rightarrow B_1 = \frac{\mu_0}{6} \frac{E}{R\alpha} \quad (1)$$

Στη συνέχεια μεταφέρουμε τον μεταγωγό στη θέση II. Η συνολική αντίσταση του κυκλώματος ισούται με:

$$R_{O,2} = \frac{R \cdot \frac{R}{4}}{R + \frac{R}{4}} = \frac{R}{5} \text{ και}$$

$$R'_{o\lambda} = R_{O,2} + R_1 \Rightarrow R'_{o\lambda} = \frac{R}{5} + R \Rightarrow$$

$$R'_{o\lambda} = \frac{6R}{5}$$

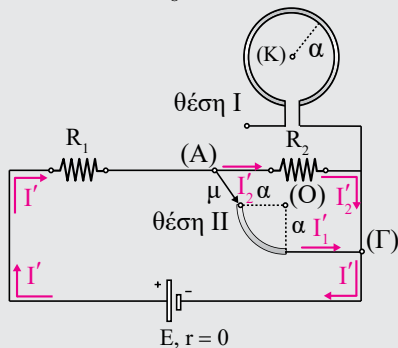
Σύμφωνα με τον νόμο του Ohm για κλειστό κύκλωμα έχουμε:

$$I' = \frac{E}{R'_{o\lambda}} \Rightarrow I' = \frac{5E}{6R}$$

$$V_{AG} = I'R_{O,2} \Rightarrow V_{AG} = \frac{E}{6}$$

Για την ένταση του ρεύματος που διαρρέει τον αγωγό τμήματος τεταρτοκυκλίου έχουμε:

$$I'_1 = \frac{V_{AG}}{R_O} \Rightarrow I'_1 = \frac{2E}{3R}$$



Για την ένταση του μαγνητικού πεδίου που δημιουργεί ο αγωγός σχήματος τεταρτοκυκλίου στο σημείο O, σύμφωνα με τον νόμο των Biot & Savart, έχουμε:

$$B_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I'_1}{\alpha^2} \Delta\ell_1 \eta\mu 90^\circ + \dots + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I'_1}{\alpha^2} \Delta\ell_v \eta\mu 90^\circ \Rightarrow$$

$$B_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I'_1}{\alpha^2} (\Delta\ell_1 + \dots \Delta\ell_v) \Rightarrow$$

$$B_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I'_1}{\alpha^2} \frac{2\pi\alpha}{4} \Rightarrow \dots$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 E}{12R\alpha} \quad (2)$$

Ο λόγος των σχέσεων (1),(2) είναι:

$$\frac{B_1}{B_2} = 2$$

5.80 Σωστή απάντηση το α).

Για να βρούμε το κέντρο (Κ) της κυκλικής τροχιάς του σωματιδίου Σ_1 , σχεδιάζουμε τη μαγνητική δύναμη Lorentz στο σημείο εισόδου (Α) και στο σημείο εξόδου (Γ). Το σημείο τομής (Κ) των φορέων των δυνάμεων που σχεδιάσαμε είναι το κέντρο (Κ) της κυκλικής τροχιάς.

Εφαρμόζουμε το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΚΔΓ. Ισχύει:

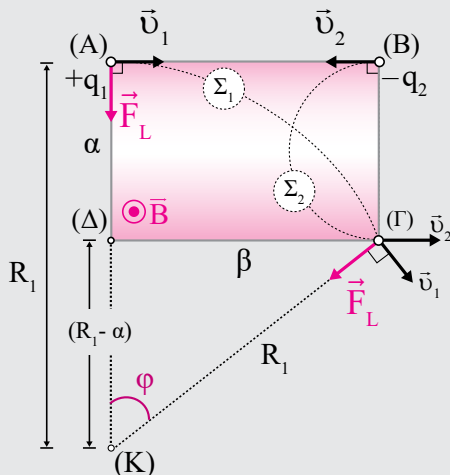
$$(ΚΓ)^2 = (ΚΔ)^2 + (ΔΓ)^2 \Rightarrow R_1^2 = (R_1 - \alpha)^2 + \beta^2 \Rightarrow$$

$$R_1^2 = R_1^2 + \alpha^2 - 2R_1\alpha + 3\alpha^2 \Rightarrow$$

$$2R_1\alpha = 4\alpha^2 \Rightarrow R_1 = 2\alpha(1)$$

Για την ακτίνα R_2 της κυκλικής τροχιάς του σωματιδίου Σ_2 έχουμε:

$$R_2 = \frac{\alpha}{2}(2)$$



Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{2\alpha}{\frac{\alpha}{2}} = 4 \Rightarrow \frac{\frac{m_1 v_1}{B|q_1|}}{\frac{m_2 v_2}{B|q_2|}} = 4 \Rightarrow \frac{m_1 v_1 |q_2|}{m_2 v_2 |q_1|} = 4 \quad (3)$$

Επειδή τα δύο σωματίδια Σ_1 και Σ_2 εξέρχονται από το πεδίο ταυτόχρονα, για τους χρόνους παραμονής Δt_1 και Δt_2 αντίστοιχα, ισχύει:

$$\Delta t_1 = \Delta t_2$$

Όμως $\Delta t_1 = \frac{\varphi}{360} \cdot T_1$ όπου για τη γωνία φ από

το τρίγωνο ΚΔΓ ισχύει:

$$\eta\mu\varphi = \frac{\beta}{R_1} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = 60^\circ$$

$$\text{Έτσι } \Delta t_1 = \frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot T_1 = \frac{2\pi m_1}{6B|q_1|} = \frac{\pi m_1}{3B|q_1|} \quad (4)$$

$$\Delta t_2 = \frac{T_2}{2} = \frac{2\pi m_2}{2B|q_2|} = \frac{\pi m_2}{B|q_2|} \quad (5)$$

$$\text{Πρέπει: } \Delta t_1 = \Delta t_2 \Rightarrow \frac{\pi m_1}{3B|q_1|} = \frac{\pi m_2}{B|q_2|} \Rightarrow$$

$$\frac{m_1}{3|q_1|} = \frac{m_2}{|q_2|} \Rightarrow m_1 |q_2| = 3m_2 |q_1| \quad (6)$$

Από τις σχέσεις (3) και (6) έχουμε:

$$\frac{m_1 v_1 |q_2|}{m_2 v_2 |q_1|} = 4 \Rightarrow \frac{3m_2 |q_1| v_1}{m_2 v_2 |q_1|} = 4 \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = 4$$

ΘΕΜΑ Γ

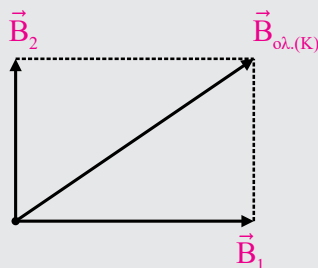
5.81 α) Το μέτρο της έντασης B_1 στο σημείο Κ που οφείλεται στον ευθύγραμμο αγωγό που διαρρέεται από ρεύμα I_1 είναι:

$$B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_1}{d} \Rightarrow B_1 = 3 \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

β) Το μέτρο της έντασης B_2 στο σημείο Κ που οφείλεται στον κυκλικό αγωγό που διαρρέεται από ρεύμα I_2 ισούται με:

$$B_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2\pi I_2}{r} \Rightarrow B_2 = 4 \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

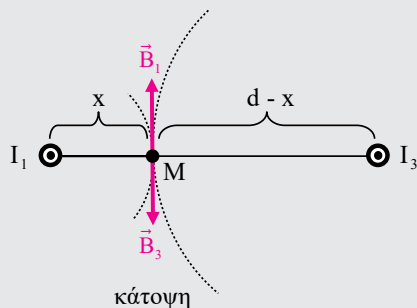
γ) Με τον κανόνα της δεξιάς παλάμης, προκύπτει ότι τα διανύσματα των εντάσεων του μαγνητικού πεδίου στο σημείο Κ που οφείλονται στον ευθύγραμμο και στον κυκλικό αγωγό, αντίστοιχα, είναι μεταξύ τους κάθετα.



Για το συνολικό μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου στο σημείο Κ του κυκλικού ρευματοφόρου αγωγού έχουμε:

$$B_{\text{ολ.}(Κ)} = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} \Rightarrow B_{\text{ολ.}(Κ)} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

δ) Επειδή τα ρεύματα I_1 και I_3 είναι ομόρροπα, η συνισταμένη ένταση του μαγνητικού πεδίου θα είναι μηδέν εντός των δύο αγωγών και προς την πλευρά του αγωγού που διαρρέεται από την μικρότερη ένταση ηλεκτρικού ρεύματος (χρησιμοποιούμε τον κανόνα του δεξιού χεριού για τον προσδιορισμό των εντάσεων του μαγνητικού πεδίου - η συνισταμένη ένταση δεν μπορεί να είναι μηδέν, εκτός των δύο αγωγών γιατί οι εντάσεις είναι ομόρροπες).



Έστω Μ το σημείο που γίνεται αυτό. Θεωρούμε x την απόσταση του σημείου Μ από τον αγωγό που διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα έντασης I_1 .

Προκύπτει:

$$B_{ολ.(M)} = 0 \Rightarrow B_1 = B_3 \Rightarrow$$

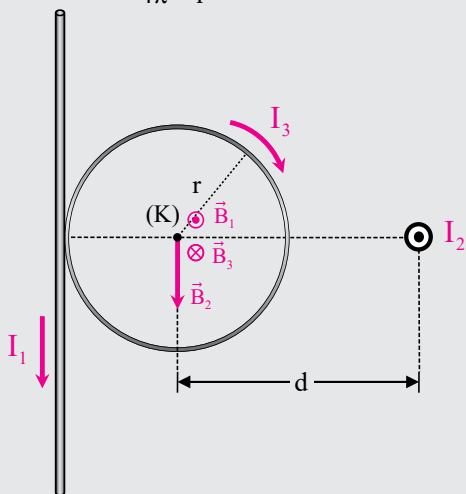
$$\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_1}{x} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_3}{d-x} \quad I_3=3I_1 \Rightarrow$$

$$\frac{I_1}{x} = \frac{3I_1}{d-x} \Rightarrow x = \frac{d}{4} \Rightarrow$$

$$x = 0,5 \text{ cm}$$

5.82 α) Υπολογίζουμε στο σημείο Κ την ένταση του μαγνητικού πεδίου που δημιουργεί ο κάθε αγωγός (μέτρο και κατεύθυνση). Για τον ευθύγραμμο αγωγό (1) έχουμε:

$$B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_1}{r} \Rightarrow B_1 = 2\pi \cdot 10^{-7} \text{ T}$$



Για τον ευθύγραμμο αγωγό (2) έχουμε:

$$B_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_2}{d} \Rightarrow B_2 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T}$$

Για τον κυκλικό αγωγό έχουμε:

$$B_3 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2\pi I_3}{r} \Rightarrow B_3 = 2\pi \cdot 10^{-7} \text{ T}$$

$$\text{Ισχύει } \vec{B}_K = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3$$

$$\text{Ομως } \vec{B}_{1,3} = \vec{B}_1 + \vec{B}_3 \Rightarrow B_{1,3} = B_1 - B_3 = 0$$

Άρα: $B_K = B_2 \Rightarrow B_K = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T}$ με κατεύθυνση ίδια με αυτήν του διανύσματος $\vec{B}_2$.

β) Εφόσον αλλάζουμε τη φορά του ρεύματος I_1 , αλλάζει και η κατεύθυνση της έντασης $\vec{B}_1$.

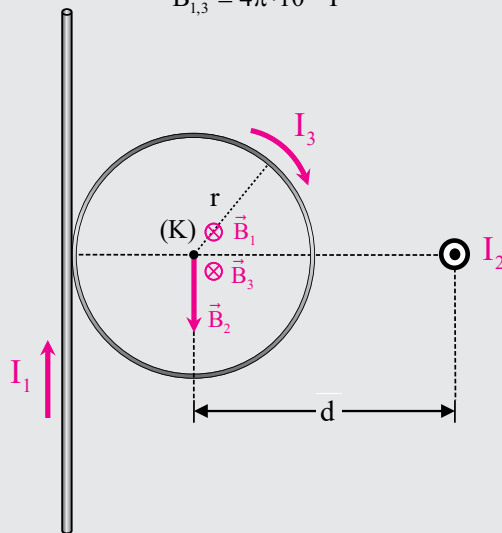
Από τον κανόνα του δεξιού χεριού η ένταση $\vec{B}_1$ θα έχει κατεύθυνση από τον αναγνώστη προς τη σελίδα.

$$\text{Ισχύει } \vec{B}_K = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3$$

Όμως:

$$\vec{B}_{1,3} = \vec{B}_1 + \vec{B}_3 \Rightarrow B_{1,3} = B_1 + B_3 \Rightarrow$$

$$B_{1,3} = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T}$$



Τα διανύσματα $\vec{B}_{1,3}$ και $\vec{B}_2$ είναι κάθετα μεταξύ τους συνεπώς έχουμε:

$$(K) \quad \vec{B}_K = \sqrt{B_{1,3}^2 + B_2^2} = \sqrt{2B_2^2} = B_2\sqrt{2} \Rightarrow B_K = 4\pi\sqrt{2} \cdot 10^{-7} \text{ T}$$

$$\text{και με κατεύθυνση } \epsilon\phi\theta = \frac{B_{1,3}}{B_2} = 1 \Rightarrow \theta = 45^\circ$$

με το διάνυσμα $\vec{B}_2$.

γ) Ισχύει: Η ένταση $\vec{B}_1$ στο κέντρο του κυκλικού αγωγού ισούται με:

$$B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2\pi I}{r} \Rightarrow I = \frac{B_1 4\pi r}{\mu_0 2\pi} \Rightarrow I = 5 \text{ A}$$

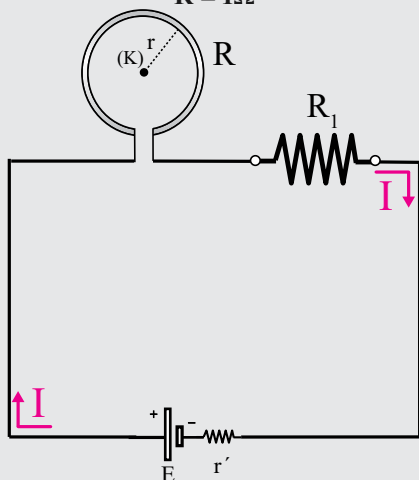
Από τον νόμο του Ohm για κλειστό κύκλωμα έχουμε:

$$I = \frac{E}{R_{ολ.}} \Rightarrow R_{ολ.} = \frac{E}{I} \Rightarrow R_{ολ.} = 6\Omega$$

Ισχύει:

$$R_{ολ} = R_1 + R + r' \Rightarrow$$

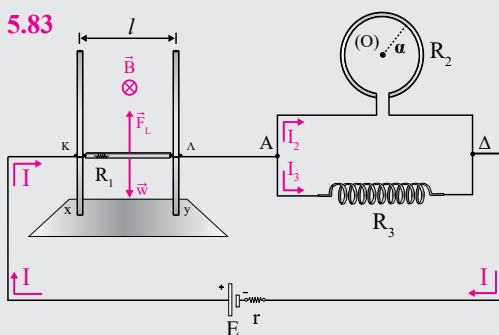
$$R = 1\Omega$$



δ) Σύμφωνα με τον νόμο του Joule ισχύει:

$$Q = I^2 \cdot R \cdot \Delta t \Rightarrow Q = 250J$$

5.83



α) Σύμφωνα με τον νόμο του Ohm για κλειστό κύκλωμα ισχύει:

$$I = \frac{E}{R_{ολ}} (1)$$

Υπολογίζουμε τη συνολική αντίσταση του κυκλώματος:

$$R_{ολ} = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} + r + R_1 \Rightarrow R_{ολ} = 12 \Omega$$

Από τη σχέση (1) έχουμε $I = 5 A$.

Ο αγωγός ΚΛ διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα I και είναι τοποθετημένος κάθετα στις μα-

γνητικές γραμμές του ομογενούς μαγνητικού πεδίου έντασης $\vec{B}$, οπότε ασκείται σε αυτόν δύναμη Laplace.

Ο αγωγός ΚΛ ισορροπεί άρα:

$$\Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F}_L + \vec{w} = 0 \Rightarrow F_L - w = 0 \Rightarrow$$

$$F_L = w \Rightarrow BI\ell = mg \Rightarrow$$

$$m = 0,5 \text{ kg}$$

β) Ο κυκλικός αγωγός και το σωληνοειδές είναι συνδεδεμένα παράλληλα οπότε ισχύει:

$$V_2 = V_3 \Rightarrow I_2 R_2 = I_3 R_3 \Rightarrow I_2 = I_3 \quad (2)$$

Σύμφωνα με τον κανόνα του Kirchhoff ισχύει:

$$I = I_2 + I_3 \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (2), (3) έχουμε:

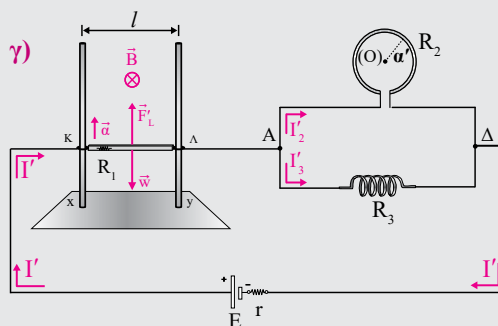
$$I_2 = I_3 = 2,5 A$$

Το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου που δημιουργείται στο κέντρο O του κυκλικού αγωγού εξ' αιτίας του ρευματοφόρου κυκλικού αγωγού είναι:

$$B_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2\pi I_2}{a} \Rightarrow B_2 = 5 \cdot 10^{-5} T$$

Το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου που δημιουργείται στο εσωτερικό του σωληνοειδούς είναι:

$$B_3 = \mu_0 I_3 \frac{N}{\ell'} \Rightarrow B_3 = 10^{-2} T$$



Αποσυνδέουμε τον κυκλικό αγωγό από το παραπάνω κύκλωμα και ξετυλίγουμε το σύρμα από το οποίο είναι φτιαγμένος. Στη συνέχεια, τυλίγουμε ξανά ολόκληρο το σύρμα, ώστε να φτιάξουμε ένα κυκλικό πλαίσιο, ακτίνας a' , που αποτελείται από $N = 2$ σπείρες. Το μη-

κος του σύρματος δεν αλλάζει, επομένως, δεν αλλάζει και η ωμική του αντίσταση. Ισχύει :

$$L = L' \Rightarrow 2\pi a = N2\pi a' \Rightarrow a' = \frac{\pi}{2} 10^{-2} \text{ m.}$$

Το τμήμα του σωληνοειδούς που συνδέουμε στο αρχικό κύκλωμα θα έχει αντίσταση

$$R'_3 = \frac{R_3}{4} \Rightarrow R'_3 = 2,5 \Omega. \left(R = \rho \frac{\ell'}{S} \right)$$

Σύμφωνα με τον νόμο του Ohm για κλειστό κύκλωμα ισχύει:

$$I' = \frac{E}{R'_{\text{ολ}}} (4)$$

Υπολογίζουμε τη συνολική αντίσταση του κυκλώματος:

$$R'_{\text{ολ}} = \frac{R_2 \cdot R'_3}{R_2 + R'_3} + r + R_1 \Rightarrow R'_{\text{ολ}} = 9 \Omega$$

Από τη σχέση (4) έχουμε $I' = \frac{20}{3} \text{ A.}$

$$V'_2 = V'_3 \Rightarrow I'_2 \cdot R_2 = I'_3 \cdot R'_3 \Rightarrow I'_2 = \frac{I'_3}{4} (5)$$

Σύμφωνα με τον κανόνα του Kirchhoff ισχύει:

$$I' = I'_2 + I'_3 (6)$$

Από τις σχέσεις (5), (6) έχουμε:

$$I'_2 = \frac{4}{3} \text{ A}$$

Το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου που δημιουργείται στο κέντρο Ο του κυκλικού αγωγού εξ' αιτίας του ρευματοφόρου κυκλικού αγωγού είναι:

$$B'_2 = N' \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2\pi I'_2}{a'} \Rightarrow B'_2 = \frac{32}{3} \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

δ) Για τον αγωγό ΚΛ ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a} \Rightarrow \vec{F}_L + \vec{w} = m \cdot \vec{a} \Rightarrow$$

$$F_L - m \cdot g = m \cdot a \Rightarrow$$

$$B \cdot I' \cdot \ell - m \cdot g = m \cdot a \Rightarrow a = \frac{10 \text{ m}}{3 \text{ s}^2}$$

με κατεύθυνση ομόρροπη της $\vec{F}_L$.

5.84 α) Όταν κλείσουμε τον διακόπτη δ_1 το κλειστό κύκλωμα ΑΓΖΔΑ διαρρέεται από εναλλασσόμενο ρεύμα.

Από τη σύγκριση της δοθείσας χρονικής εξίσωσης της έντασης του εναλλασσόμενου ρεύματος που διαρρέει την αντίσταση R_1 :

$$i = 10 \cdot \eta \mu 100\pi t \text{ (S.I.)}$$

με τη γενική της μορφή $i = I \cdot \eta \mu \omega t$ προκύπτει ότι το πλάτος της έντασης είναι $I = 10 \text{ A}$ και η γωνιακή συχνότητα του εναλλασσόμενου ρεύματος είναι $\omega = 100\pi \text{ rad/s.}$

$$\text{Όμως } \omega = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} \Rightarrow f = 50 \text{ Hz}$$

Από τον νόμο του Ohm για τα πλάτη της τάσης και της έντασης του εναλλασσόμενου ρεύματος έχουμε:

$$I = \frac{V}{R_1} \Rightarrow V = I \cdot R_1 \Rightarrow V = 20 \text{ V}$$

Η ενεργός τιμή της τάσης είναι:

$$V_{\text{ev.}} = \frac{V}{\sqrt{2}} \Rightarrow V_{\text{ev.}} = 10\sqrt{2} \text{ V}$$

β) Η χρονική εξίσωση της εναλλασσόμενης τάσης είναι:

$$v = V \cdot \eta \mu \omega t \Rightarrow v = 20 \cdot \eta \mu 100\pi t \text{ (S.I.)}$$

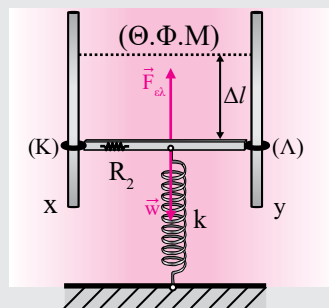
γ) Για τη θερμότητα που παράγεται στην αντίσταση R_1 σε χρονικό διάστημα $\Delta t = 1 \text{ min} = 60 \text{ s}$, σύμφωνα με τον νόμο του Joule, ισχύει:

$$Q = I_{\text{ev.}}^2 \cdot R_1 \cdot \Delta t$$

$$\text{Όμως } I_{\text{ev.}} = \frac{I}{\sqrt{2}} \Rightarrow I_{\text{ev.}} = 5\sqrt{2} \text{ A} \text{ οπότε για τη}$$

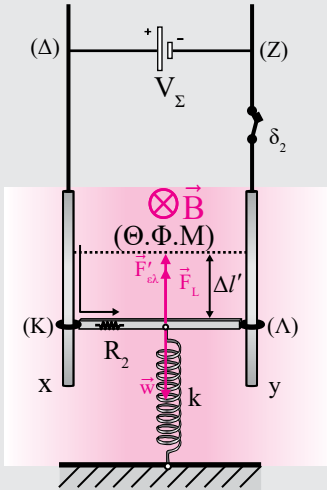
θερμότητα τελικά παίρνουμε με αντικατάσταση στην παραπάνω σχέση $Q = 6000 \text{ J}$

δ)



Στην αρχική κατάσταση ισορροπίας του αγωγού ΚΛ όταν οι δύο διακόπτες είναι ανοικτοί, το ελατήριο είναι συσπειρωμένο κατά Δl σε σχέση με το φυσικό του μήκος. Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{ελ.} = w \Rightarrow k \cdot \Delta l = w(1)$$



Στη νέα κατάσταση ισορροπίας του αγωγού ΚΛ διαρρέεται από συνεχές ρεύμα και επειδή βρίσκεται μέσα σε Ο.Μ.Π. κάθετα στις δυναμικές του γραμμές θα του ασκείται δύναμη Laplace, όπως φαίνεται στο σχήμα. Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F'_{ελ.} + F_L = w \Rightarrow$$

$$k \cdot \Delta l' + BI_{\Sigma} l = w \Rightarrow k \cdot \frac{\Delta l}{2} + BI_{\Sigma} l = w \Rightarrow^{(1)}$$

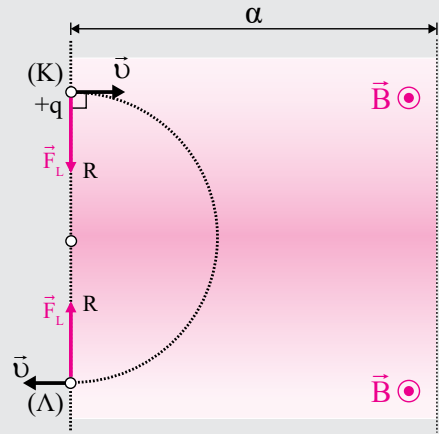
$$\frac{w}{2} + BI_{\Sigma} l = w \Rightarrow BI_{\Sigma} l = \frac{w}{2} \Rightarrow B \frac{V_{\Sigma}}{R_2} l = \frac{w}{2} \Rightarrow$$

$$V_{\Sigma} = \frac{mgR_2}{2Bl} \Rightarrow V_{\Sigma} = 10V$$

5.85 α) Το σωματίδιο δέχεται δύναμη Lorentz από το μαγνητικό πεδίο η οποία είναι κάθετη στην ταχύτητα $\vec{v}$ και βρίσκεται πάνω στο διαχωριστικό όριο του πεδίου.

Υπολογίζουμε την ακτίνα της κυκλικής τροχιάς. Ισχύει:

$$ΚΛ = 2R \Rightarrow R = \frac{ΚΛ}{2} \Rightarrow R = 2 \text{ m}$$



Για τη μάζα του σωματιδίου ισχύει:

$$R = \frac{mv}{B|q|} \Rightarrow m = \frac{RB|q|}{v} \Rightarrow m = 10^{-9} \text{ kg}$$

β) Το τόξο που διαγράφει το σωματίδιο μέσα στο μαγνητικό πεδίο είναι ημικύκλιο. Το μήκος του υπολογίζεται από τον τύπο:

$$s = \pi R \text{ ή } s = 2\pi m$$

Ο χρόνος παραμονής μέσα στο μαγνητικό πεδίο είναι:

$$\Delta t = \frac{T}{2} \Rightarrow \Delta t = \frac{2\pi m}{\frac{B|q|}{v}} \Rightarrow \Delta t = \frac{\pi m}{B|q|} \Rightarrow \Delta t = 0,01\pi \text{ s}$$

γ) Κατά την κίνηση στο μαγνητικό πεδίο το μέτρο της ορμής του σωματιδίου δε μεταβάλλεται. Ισχύει, δηλαδή:

$$|p_{αρχ}| = |p_{τελ}| = mv \Rightarrow$$

$$|p_{αρχ}| = |p_{τελ}| = 2 \cdot 10^{-7} \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Θεωρώντας ως θετική τη φορά της ορμής κατά την έξοδο από το σημείο Λ, έχουμε:

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}_{τελ} - \vec{p}_{αρχ} \Rightarrow \Delta p = p_{τελ} - (-p_{αρχ}) \Rightarrow$$

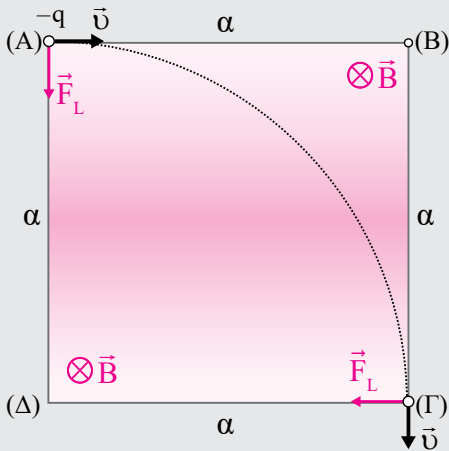
$$\Delta p = p_{τελ} + p_{αρχ} \Rightarrow \Delta p = 2p_{αρχ} \Rightarrow$$

$$\Delta p = 4 \cdot 10^{-7} \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

δ) Για να μην εξέρχεται το σωματίδιο από την απέναντι πλευρά θα πρέπει η ακτίνα της τροχιάς του να είναι μικρότερη από το εύρος του πεδίου, δηλαδή:

$$R \leq \alpha \Rightarrow \frac{mv}{B|q|} \leq \alpha \Rightarrow B \geq \frac{mv}{|q|\alpha} \Rightarrow B \geq 0,02 \text{ T}$$

5.86 α) Σχεδιάζουμε τη δύναμη Lorentz τη στιγμή της εισόδου και τη στιγμή της εξόδου του σωματιδίου από το μαγνητικό πεδίο. Η κορυφή Δ είναι το κέντρο της κυκλικής τροχιάς του σωματιδίου. Το σωματίδιο διαγράφει τεταρτοκύκλιο, επομένως, ισχύει $R = \alpha = 0,8 \text{ m}$.



Θέλουμε να υπολογίσουμε το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου. Ισχύει:

$$R = \frac{mv}{B|q|} \Rightarrow B = \frac{mv}{R|q|} \Rightarrow B = 1 \text{ T}$$

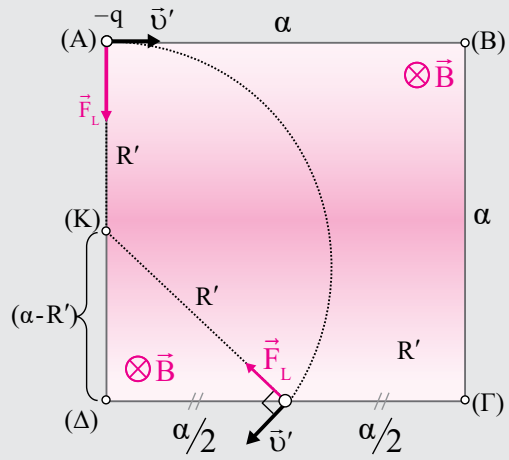
β) Η χρονική διάρκεια κίνησης του σωματιδίου είναι:

$$\Delta t = \frac{T}{4} \Rightarrow \Delta t = \frac{1}{4} \cdot \frac{2\pi m}{B|q|} \Rightarrow \Delta t = \pi \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

γ) Η κινητική ενέργεια του σωματιδίου δε μεταβάλλεται γιατί το μέτρο της ταχύτητάς του παραμένει σταθερό. Επομένως, για τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας έχουμε: $\Delta K = 0$

δ) Σχεδιάζουμε τη δύναμη Lorentz στα σημεία εισόδου και εξόδου από το μαγνητικό πεδίο. Το σημείο τομής των φορέων των δυνάμεων είναι το κέντρο της κυκλικής τροχιάς. Το κέντρο Κ της τροχιάς του σωματιδίου βρίσκεται στην πλευρά ΑΔ. Από το τρίγωνο ΚΔΜ έχουμε:

$$\begin{aligned} KM^2 &= K\Delta^2 + \Delta M^2 \Rightarrow \\ R'^2 &= (\alpha - R')^2 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \Rightarrow \\ R' &= \frac{5\alpha}{8} \Rightarrow R' = 0,5 \text{ m} \end{aligned}$$



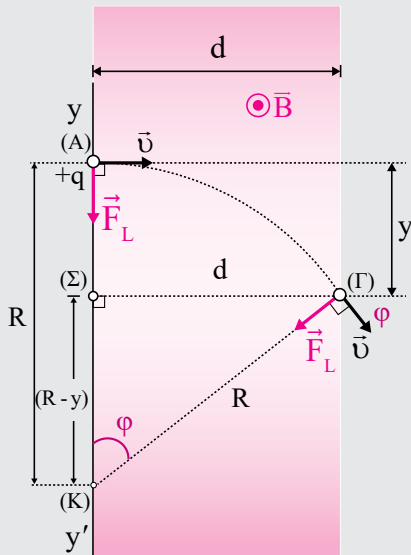
Για το μέτρο της ταχύτητας εισόδου θα έχουμε:

$$R' = \frac{mv'}{B|q|} \Rightarrow v' = \frac{R' B |q|}{m} \Rightarrow v' = 250 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

5.87 α) Το σωματίδιο επιταχύνεται από διαφορά δυναμικού V. Από την εφαρμογή του Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του σωματιδίου υπολογίζουμε το μέτρο της ταχύτητας που αποκτάει το σωματίδιο. Ισχύει:

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{F_{\eta\lambda}} \Rightarrow \frac{1}{2} mv^2 - 0 = qV \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{\frac{2qV}{m}} \Rightarrow v = 4 \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



β) Σχεδιάζουμε τη δύναμη Lorentz στα σημεία εισόδου και εξόδου από το μαγνητικό πεδίο. Το σημείο τομής των φορέων των δυνάμεων είναι το κέντρο της κυκλικής τροχιάς. Υπολογίζουμε την ακτίνα της κυκλικής τροχιάς. Ισχύει:

$$R = \frac{mv}{B|q|} \Rightarrow R = 0,1\text{m}$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΚΓΣ έχουμε:

$$\eta\mu\varphi = \frac{\Gamma\Sigma}{\text{ΚΓ}} \Rightarrow \eta\mu\varphi = \frac{d}{R} \Rightarrow$$

$$\eta\mu\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε την κατακόρυφη απόκλιση y.

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΚΓΣ προκύπτει:

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{R-y}{R} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{R-y}{R} \Rightarrow y = \frac{R}{2} \Rightarrow y = 0,05\text{m}$$

γ) Το μήκος του τόξου που διαγράφει το σωματίδιο είναι:

$$s = R\varphi \Rightarrow s = \frac{\pi}{30} \text{ m}$$

Η περίοδος της κυκλικής κίνησης του σωματιδίου είναι:

$$T = \frac{2\pi m}{B|q|} \Rightarrow T = 5\pi \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

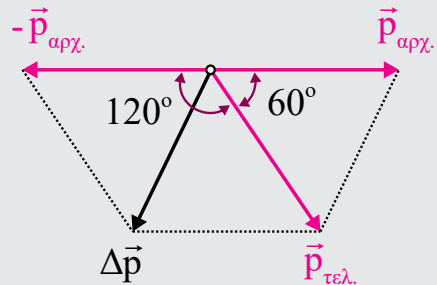
Για τον χρόνο κίνησης στο ομογενές μαγνητικό πεδίο έχουμε:

$$\omega = \frac{\varphi}{\Delta t} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi/3}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{T}{6} \Rightarrow$$

$$\Delta t = \frac{5\pi}{6} \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

δ) Το μέτρο της ορμής του σωματιδίου κατά την κίνησή του στο ομογενές μαγνητικό πεδίο είναι σταθερό και ισχύει:

$$p_{\text{αρχ}} = p_{\text{τελ}} = p = mv \Rightarrow p = 4 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



Για τη μεταβολή της ορμής έχουμε:

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}_{\text{τελ}} - \vec{p}_{\alpha\rho\chi} \Rightarrow \Delta \vec{p} = \vec{p}_{\text{τελ}} + (-\vec{p}_{\alpha\rho\chi})$$

Το μέτρο της μεταβολής της ορμής θα είναι:

$$\Delta p = \sqrt{p_{\alpha\rho\chi}^2 + p_{\text{τελ}}^2 + 2p_{\alpha\rho\chi}p_{\text{τελ}} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{3}} \Rightarrow$$

$$\Delta p = \sqrt{p^2 + p^2 + 2p^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} \Rightarrow \Delta p = p \Rightarrow$$

$$\Delta p = 4 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

5.88 α) Η ταχύτητα αναλύεται σε δύο συνιστώσες μια παράλληλη στη διεύθυνση των μαγνητικών γραμμών:

$$v_{\pi} = v \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi$$

Και μια κάθετη στη διεύθυνση των δυναμικών γραμμών:

$$v_k = v \cdot \eta \mu \phi$$

Από τον τύπο της ακτίνας της ελικοειδούς τροχιάς έχουμε:

$$R = \frac{mv_k}{B|q|} \Rightarrow R = \frac{mv \cdot \eta \mu \phi}{B|q|} \Rightarrow \\ \Rightarrow \eta \mu \phi = \frac{B|q|R}{mv} \Rightarrow \eta \mu \phi = \frac{1}{2} \Rightarrow \\ \phi = 30^\circ$$

β) Η περίοδος της ελικοειδούς κίνησης είναι:

$$T = \frac{2\pi m}{B|q|} \Rightarrow T = \pi \cdot 10^{-4} \text{ s}$$

Για το βήμα της έλικας έχουμε:

$$\beta = v_\pi T \Rightarrow \beta = v \cdot \sigma \nu \nu \phi \cdot T \Rightarrow \\ \beta = 2\pi\sqrt{3} \text{ m}$$

γ) Το μήκος της τροχιάς που θα διαγράψει το σωματίδιο είναι:

$$s = v \cdot \Delta t \Rightarrow s = 8\pi \text{ m}$$

δ) Το σωματίδιο κατά μήκος των δυναμικών γραμμών εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με ταχύτητα μέτρου v_π . Σε κάθε περίοδο διανύει στη διεύθυνση των δυναμικών γραμμών απόσταση ίση με το βήμα της έλικας. Επομένως, προκύπτει:

$$N = \frac{\Delta x}{\beta} \Rightarrow N = 10 \text{ περ.}$$

5.89 α) Υπολογίζουμε το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας με τη βοήθεια του τύπου της κεντρομόλου επιτάχυνσης. Ισχύει:

$$\alpha_k = \omega^2 \cdot KM \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{\alpha_k}{L}} \Rightarrow \omega = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

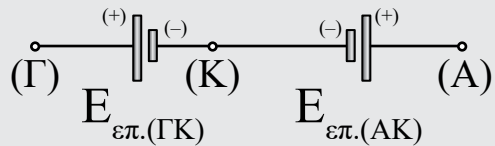
β) Η ΗΕΔ από επαγωγή που εμφανίζεται στο τμήμα ΓΚ του αγωγού είναι:

$$E_{\text{επ.ΓΚ}} = \frac{1}{2} B \omega \cdot \Gamma K^2 \Rightarrow E_{\text{επ.ΓΚ}} = \frac{1}{2} B \omega \cdot \left(\frac{L}{4}\right)^2 \Rightarrow \\ E_{\text{επ.ΓΚ}} = 0,1 \text{ V}$$

γ) Η ΗΕΔ από επαγωγή που εμφανίζεται στο τμήμα ΑΚ του αγωγού θα είναι:

$$E_{\text{επ.ΑΚ}} = \frac{1}{2} B \omega \cdot AK^2 \Rightarrow \\ E_{\text{επ.ΑΚ}} = \frac{1}{2} B \omega \cdot \left(L - \frac{L}{4}\right)^2 \Rightarrow \\ E_{\text{επ.ΑΚ}} = 0,9 \text{ V}$$

δ) Με τη βοήθεια του κανόνα του δεξιού χεριού καθορίζουμε τις πολικότητες των ΗΕΔ από επαγωγή στα δύο τμήματα. Ισχύει:



Η διαφορά δυναμικού στα άκρα του αγωγού θα είναι:

$$V_{\text{ΑΓ}} = E_{\text{επ.ΑΚ}} - E_{\text{επ.ΓΚ}} \Rightarrow V_{\text{ΑΓ}} = 0,8 \text{ V}$$

5.90 α) Από τον 2° κανόνα του Kirchhoff έχουμε:

$$|E_{\text{αυτ}}| = E - iR \quad (1)$$

Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, ισχύει $i = 0$ και ο ρυθμός μεταβολής της έντασης του ρεύματος είναι μέγιστος. Από τη σχέση (1) ισχύει:

$$L \left(\frac{di}{dt} \right)_{\text{max}} = E \Rightarrow \left(\frac{di}{dt} \right)_{\text{max}} = \frac{E}{L} \Rightarrow \\ \left(\frac{di}{dt} \right)_{\text{max}} = 10^3 \frac{\text{A}}{\text{s}}$$

β) Όταν η ΗΕΔ από αυτεπαγωγή που αναπτύσσεται στα άκρα του πηνίου μηδενιστεί η ένταση του ρεύματος σταθεροποιείται στη μέγιστη τιμή της. Η μέγιστη τιμή της έντασης του ρεύματος προκύπτει από τον νόμο του Ohm για κλειστό κύκλωμα. Ισχύει:

$$I = \frac{E}{R} \Rightarrow I = 10 \text{ A}$$

Η μέγιστη τιμή της ενέργειας του μαγνητικού πεδίου που έχει αποθηκευτεί στο πηνίο είναι:

$$U_{\text{max}} = \frac{1}{2} LI^2 \Rightarrow U_{\text{max}} = 1 \text{ J}$$

γ) Τη χρονική στιγμή t_1 η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα είναι:

$$i_1 = \frac{20}{100} I \Rightarrow i_1 = 2 \text{ A}$$

Από τον δεύτερο κανόνα του Kirchhoff για τη χρονική στιγμή t_1 έχουμε:

$$|E_{\text{αυτ}}|_{t_1} = E - i_1 R \Rightarrow L \frac{di}{dt} = E - i_1 R \Rightarrow$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{E - i_1 R}{L} \Rightarrow \frac{di}{dt} = 800 \frac{\text{A}}{\text{s}}$$

δ) Με τη βοήθεια του τύπου της ισχύος της πηγής υπολογίζουμε την ένταση του ρεύματος τη χρονική στιγμή t_2 . Ισχύει:

$$P = E i_2 \Rightarrow i_2 = \frac{P}{E} \Rightarrow i_2 = 4 \text{ A}$$

Εφαρμόζουμε πάλι τον 2^ο κανόνα του Kirchhoff για τη χρονική στιγμή t_2 για να υπολογίσουμε την ΗΕΔ από αυτεπαγωγή τη χρονική στιγμή t_2 . Έχουμε:

$$|E_{\text{αυτ}}|_{t_2} = E - i_2 R \Rightarrow |E_{\text{αυτ}}|_{t_2} = |E_{\text{αυτ}}|_{t_1} = 12 \text{ V}$$

Ο ρυθμός αποθήκευσης ενέργειας στο μαγνητικό πεδίο του πηνίου τη χρονική στιγμή t_2 είναι:

$$P_L = |E_{\text{αυτ}}|_{t_2} \cdot i_2 \Rightarrow P_L = 48 \text{ W}$$

5.91 α) Με τον μεταγωγό στη θέση (1) το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα σταθερής έντασης που υπολογίζεται από το νόμο του Ohm για κλειστό κύκλωμα. Ισχύει:

$$I = \frac{E}{R + r} \Rightarrow I = 6 \text{ A}$$

Η ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στο μαγνητικό πεδίο του πηνίου θα είναι:

$$U_0 = \frac{1}{2} L I^2 \Rightarrow U_0 = 18 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

β) Τη χρονική στιγμή t_1 η τιμή της έντασης του ρεύματος είναι:

$$i_1 = \frac{I}{2} \Rightarrow i_1 = 3 \text{ A}$$

Από τον νόμο του Ohm για κλειστό κύκλωμα έχουμε:

$$i_1 = \frac{|E_{\text{αυτ}}|}{R} \Rightarrow \left| \frac{\Delta i}{\Delta t} \right| = \frac{i_1 R}{L} \Rightarrow \left| \frac{\Delta i}{\Delta t} \right| = 12000 \frac{\text{A}}{\text{s}}$$

Επειδή η ένταση του ρεύματος μειώνεται θα ισχύει:

$$\frac{\Delta i}{\Delta t} = -12000 \frac{\text{A}}{\text{s}}$$

γ) Η θερμική ισχύς του αντιστάτη θα είναι:

$$P_R = i_1^2 R \Rightarrow P_R = 36 \text{ W}$$

δ) Υπολογίζουμε με τη βοήθεια του νόμου του Ohm την ένταση του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα, τη χρονική στιγμή t_2 . Έχουμε:

$$i_2 = \frac{V_2}{R} \Rightarrow i_2 = 2 \text{ A}$$

Η ενέργεια που είναι αποθηκευμένη εκείνη τη χρονική στιγμή στο πηνίο είναι:

$$U_2 = \frac{1}{2} L i_2^2 \Rightarrow U_2 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

Η θερμότητα που εκλύεται από τον αντιστάτη κατά τη χρονική διάρκεια $t_0 \rightarrow t_2$ θα είναι:

$$Q_R = U_0 - U_2 \Rightarrow Q_R = 16 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

5.92 α) Ισχύει:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I}{d} \Rightarrow I = \frac{2\pi B d}{\mu_0} \Rightarrow I = 5 \text{ A}$$

Για την ΗΕΔ της πηγής προκύπτει:

$$E = I(R_1 + R_3 + r) \Rightarrow E = 45 \text{ V}$$

β) Ισχύει:

$$I' = I + 4 \text{ A} \Rightarrow I' = 9 \text{ A}$$

Έχουμε:

$$I' = \frac{E}{R_{2,3} + r + R_1} \Rightarrow R_{2,3} = \frac{E - I'r - I'R_1}{I'} \Rightarrow$$

$$R_{2,3} = 2 \Omega$$

Τελικά προκύπτει:

$$R_{2,3} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} \Rightarrow R_2 = \frac{R_3 R_{2,3}}{R_3 - R_{2,3}} \Rightarrow R_2 = 3 \Omega$$

γ) Ισχύει:

$$V_{\Gamma\Delta} = I' R_{2,3} \Rightarrow V_{\Gamma\Delta} = 18 \text{ V}$$

Έχουμε:

$$I_2' = \frac{V_{\Gamma\Delta}}{R_2} \Rightarrow I_2' = 6\text{ A}$$

Η ζητούμενη θερμική ισχύς είναι:

$$P_{R_2} = I_2'^2 R_2 \Rightarrow P_{R_2} = 108\text{ W}$$

δ) Έχουμε:

$$I_3' = \frac{V_{\Gamma\Delta}}{R_3} \Rightarrow I_3' = 3\text{ A}$$

Προκύπτει:

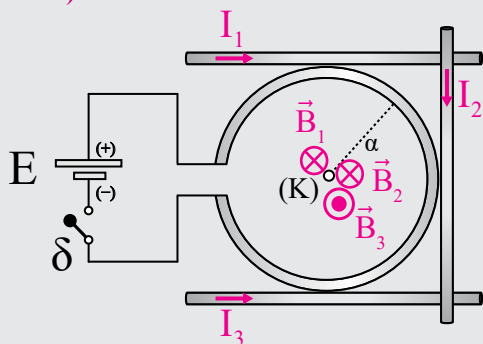
$$B' = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_3'}{d} \Rightarrow B' = 1,2 \cdot 10^{-5}\text{ T}$$

Το ζητούμενο ποσοστό επί τοις εκατό θα είναι ίσο:

$$\Pi(\%) = \frac{B' - B}{B} \cdot 100\% \Rightarrow$$

$$\Pi(\%) = -40\%$$

5.93 α)



Ισχύουν:

$$B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_1}{r} \Rightarrow B_1 = 2 \cdot 10^{-6}\text{ T}$$

$$B_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_2}{r} \Rightarrow B_2 = 2 \cdot 10^{-6}\text{ T}$$

$$B_3 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_3}{r} \Rightarrow B_3 = 8 \cdot 10^{-6}\text{ T}$$

Η ένταση του σύνθετου μαγνητικού πεδίου στο κέντρο K θα έχει μέτρο:

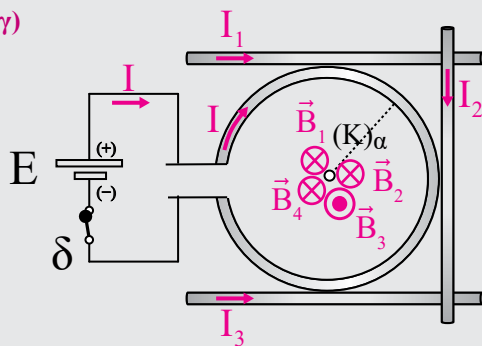
$$B_K = B_3 - B_2 - B_1 \Rightarrow B_K = 4 \cdot 10^{-6}\text{ T}$$

με φορά από τη σελίδα προς τον αναγνώστη.

β) Η ένταση του ρεύματος που διαρρέει τον κυκλικό αγωγό είναι:

$$I = \frac{E}{R} \Rightarrow I = \frac{E}{R \cdot 2\pi r} \Rightarrow I = \frac{20}{\pi}\text{ A}$$

γ)



Το μέτρο της έντασης του κυκλικού αγωγού στο κέντρο του K θα είναι:

$$B_4 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2\pi I}{r} \Rightarrow B_4 = 8 \cdot 10^{-6}\text{ T}$$

Η νέα ένταση του σύνθετου μαγνητικού πεδίου στο κέντρο K θα έχει μέτρο:

$$B'_K = B_1 + B_2 - B_3 + B_4 \Rightarrow B'_K = 4 \cdot 10^{-6}\text{ T}$$

με φορά από τον αναγνώστη προς τη σελίδα.

δ) Ισχύει:

$$0 = B_1 + B_2 - B_3 + B'_4 \Rightarrow B'_4 = B_3 - B_1 - B_2 \Rightarrow$$

$$B'_4 = 4 \cdot 10^{-6}\text{ T}$$

Έχουμε:

$$B'_4 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2\pi I'}{r} \Rightarrow I' = \frac{B'_4 r}{\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot 2\pi} \Rightarrow$$

$$I' = \frac{10}{\pi}\text{ A}$$

Η τιμή της ΗΕΔ της πηγής είναι:

$$E' = I' R \cdot 2\pi r \Rightarrow E' = 10\text{ V}$$

5.94 α) Η τιμή της ΗΕΔ της πηγής είναι:

$$V_\pi = E \Rightarrow E = 175\text{ V}$$

β) Έχουμε:

$$I = \frac{E}{R_\Sigma + r + R_1} \Rightarrow I = 5\text{ A}$$

Το ποσό της θερμότητας που εκλύεται σε όλο το κύκλωμα είναι:

$$Q = I^2 (R_\Sigma + r + R_1) \cdot \Delta t \Rightarrow Q = 105000\text{ J}$$

γ) Ισχύει:

$$B = \mu_0 nI \Rightarrow B = \pi \cdot 10^{-3} \text{ T}$$

Για το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου, στα άκρα του σωληνοειδούς, έχουμε:

$$B_{\text{ακρ}} = \frac{B}{2} \Rightarrow B_{\text{ακρ}} = 5\pi \cdot 10^{-4} \text{ T}$$

δ) Βρίσκουμε τη νέα ένταση του ρεύματος που διαρρέει την πηγή:

$$I' = \frac{E}{\frac{R_{\Sigma} R_2}{R_{\Sigma} + R_2} + r + R_1} \Rightarrow I' = 7 \text{ A}$$

Η τάση στα άκρα του σωληνοειδούς είναι:

$$V = I' \frac{R_{\Sigma} R_2}{R_{\Sigma} + R_2} \Rightarrow V = 140 \text{ V}$$

Η ένταση του ρεύματος που θα διαρρέει το σωληνοειδές θα είναι:

$$I_{\Sigma} = \frac{V}{R_{\Sigma}} \Rightarrow I_{\Sigma} = \frac{14}{3} \text{ A}$$

Προκύπτει:

$$B' = \mu_0 n I_{\Sigma} \Rightarrow B' = \frac{28}{3} \pi \cdot 10^{-4} \text{ T}$$

5.95 α) Για την ένταση του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα προκύπτει:

$$P_R = I^2 R \Rightarrow I = \sqrt{\frac{P_R}{R}} \Rightarrow I = 2 \text{ A}$$

β) Προκύπτει:

$$Q_{\Theta} = I^2 R_{\pi} \cdot \Delta t \Rightarrow R_{\pi} = \frac{Q_{\Theta}}{I^2 \cdot \Delta t} \Rightarrow R_{\pi} = 2 \Omega$$

Υπολογίζουμε τον αριθμό των σπειρών του πηνίου. Έχουμε:

$$L = N\pi\Delta \Rightarrow N = \frac{L}{\pi\Delta} \Rightarrow N = 200 \text{ σπ.}$$

γ) Υπολογίζουμε το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου στο κέντρο του πηνίου. Προκύπτει:

$$B = \mu_0 \frac{N}{\ell} I \Rightarrow B = \mu_0 \frac{N}{N\delta} I \Rightarrow B = 4\pi \cdot 10^{-3} \text{ T}$$

Υπολογίζουμε το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου στα άκρα του πηνίου. Ισχύει:

$$B_{\text{ακρ}} = \frac{B}{2} \Rightarrow B_{\text{ακρ}} = 2\pi \cdot 10^{-3} \text{ T}$$

δ) Βρίσκουμε την ηλεκτρεγερτική δύναμη της πηγής. Έχουμε:

$$E = I(R_{\pi} + R) \Rightarrow E = 20 \text{ V}$$

Τελικά προκύπτει:

$$P = EI \Rightarrow P = 40 \text{ W}$$

5.96 α) Ισχύει:

$$B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_1}{\frac{L}{2}} \Rightarrow B_1 = 6\pi \cdot 10^{-4} \text{ T}$$

β) Με τη βοήθεια του διαγράμματος προκύπτει:

$$E = 12 \text{ V}, I_{\beta} = 12 \text{ A}$$

Ισχύει:

$$I_{\beta} = \frac{E}{r} \Rightarrow r = \frac{E}{I_{\beta}} \Rightarrow r = 1 \Omega$$

Για την ένταση του ρεύματος που διαρρέει το σωληνοειδές προκύπτει:

$$I_{\Sigma} = \frac{E}{r + R_{\Sigma}} \Rightarrow I_{\Sigma} = 1 \text{ A}$$

γ) Για το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου, στο εσωτερικό του σωληνοειδούς έχουμε:

$$B_2 = \mu_0 \cdot \frac{N}{L} I_{\Sigma} \Rightarrow B_2 = 8\pi \cdot 10^{-4} \text{ T}$$

δ) Για το μέτρο της έντασης του σύνθετου μαγνητικού πεδίου στο Κ έχουμε:

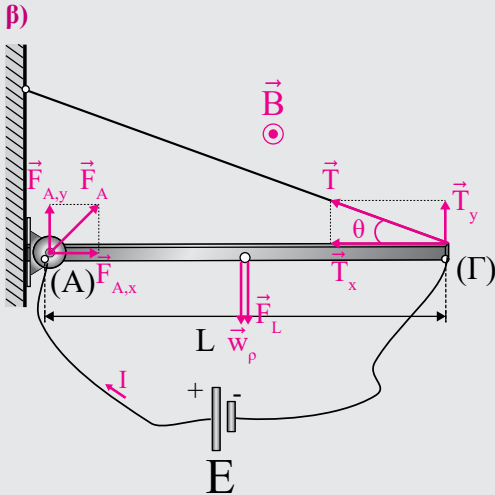
$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} \Rightarrow B = \pi \cdot 10^{-3} \text{ T}$$

5.97 α) Υπολογίζουμε την ένταση του ρεύματος που διαρρέει τον αγωγό. Ισχύει:

$$I = \frac{E}{R} \Rightarrow I = 5 \text{ A}$$

Το μέτρο της δύναμης Laplace που ασκείται στον αγωγό θα είναι:

$$F_L = BIL \Rightarrow F_L = 40 \text{ N}$$



Στον αγωγό ασκούνται το βάρος του $\vec{w}_p$, η δύναμη από την άρθρωση $\vec{F}_A$, η τάση του νήματος $\vec{T}$ και η δύναμη Laplace $\vec{F}_L$.

Αφού ο αγωγός ισορροπεί, η συνισταμένη των ροπών των δυνάμεων που ασκούνται στον αγωγό είναι μηδέν ως προς οποιοδήποτε σημείο του αγωγού. Έχουμε:

$$\begin{aligned} \Sigma \tau_A = 0 &\Rightarrow T \cdot \eta \mu \theta \cdot L - w_p \frac{L}{2} - F_L \frac{L}{2} = 0 \Rightarrow \\ T &= \frac{Mg + F_L}{2 \cdot \eta \mu \theta} \Rightarrow \\ T &= 50 \text{ N} \end{aligned}$$

γ) Από την ισορροπία του αγωγού προκύπτει:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_{A,x} = T \cdot \sigma \nu \nu \theta \Rightarrow F_{A,x} = 30 \text{ N}$$

Επίσης έχουμε:

$$\begin{aligned} \Sigma F_y = 0 &\Rightarrow F_{A,y} + T \cdot \eta \mu \theta = w_p + F_L \Rightarrow \\ F_{A,y} &= Mg + F_L - T \cdot \eta \mu \theta \Rightarrow \\ F_{A,y} &= 40 \text{ N} + 40 \text{ N} - 40 \text{ N} \Rightarrow \\ F_{A,y} &= 40 \text{ N} \end{aligned}$$

Η δύναμη που δέχεται ο αγωγός από την άρθρωση θα έχει μέτρο:

$$F_A = \sqrt{F_{A,x}^2 + F_{A,y}^2} \Rightarrow F_A = 50 \text{ N}$$

δ) Από την ισορροπία του αγωγού έχουμε:

$$\begin{aligned} \Sigma \tau_A = 0 &\Rightarrow T_{\theta p} \cdot \eta \mu \theta \cdot L - w_p \frac{L}{2} - F_L' \frac{L}{2} = 0 \Rightarrow \\ 2T_{\theta p} \cdot \eta \mu \theta - Mg &= BI'L \Rightarrow \\ 2T_{\theta p} \cdot \eta \mu \theta - Mg &= B \frac{E'}{R} L \Rightarrow \\ E' &= \frac{R \cdot (2T_{\theta p} \cdot \eta \mu \theta - Mg)}{BL} \Rightarrow \\ E' &= 30 \text{ V} \end{aligned}$$

5.98 α) Από την ισορροπία του αγωγού έχουμε:

$$\begin{aligned} \Sigma F_y = 0 &\Rightarrow w = F_L \Rightarrow mg = BIL \Rightarrow I = \frac{mg}{BL} \Rightarrow \\ I &= 8 \text{ A} \end{aligned}$$

Προκύπτει:

$$I = \frac{E}{r + R} \text{ ή } r = \frac{E - IR}{I} \Rightarrow r = 2 \Omega$$

β) Ισχύει:

$$I' = \frac{E}{r} \Rightarrow I' = 40 \text{ A}$$

Για το μέτρο της επιτάχυνσης που αποκτάει ο αγωγός, ισχύει:

$$\begin{aligned} \Sigma F_y = ma &\Rightarrow F_L' - w = ma \Rightarrow \\ BI'L - mg &= ma \Rightarrow a = \frac{BI'L - mg}{m} \Rightarrow \\ a &= 40 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{aligned}$$

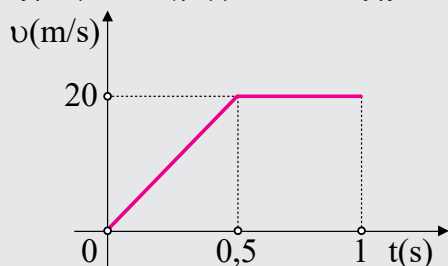
γ) Για τον ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας, ισχύει:

$$\begin{aligned} \frac{dK}{dt} &= \Sigma F \cdot v_1 \Rightarrow \frac{dK}{dt} = ma(\alpha_1) \Rightarrow \\ \frac{dK}{dt} &= 128 \frac{\text{J}}{\text{s}} \end{aligned}$$

δ) Ο αγωγός μετά τη χρονική στιγμή $t_2 = 0,5 \text{ s}$ θα αρχίσει να εκτελεί Ε.Ο.Κ. με ταχύτητα μέτρου:

$$v_2 = at_2 \Rightarrow v_2 = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Το ζητούμενο διάγραμμα είναι το εξής:



5.99 α) Ισχύει:

$$\Phi_0 = B_0 \pi r^2 \Rightarrow \Phi_0 = 5\pi \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$$

β) Έχουμε:

$$\frac{dB}{dt} = \frac{\Delta B}{\Delta t} \Rightarrow \frac{dB}{dt} = \frac{B - B_0}{t - t_0} \Rightarrow B = B_0 + \frac{dB}{dt} t \Rightarrow$$

$$B = 0,5 + 10\pi t \text{ (S.I.)}$$

$$\text{Ισχύει: } \Phi = B \cdot \pi \cdot r^2 \Rightarrow \Phi = 5\pi \cdot 10^{-3} + t \text{ (S.I.)}$$

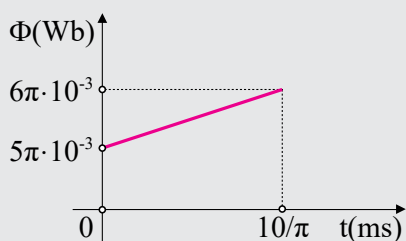
Τη χρονική στιγμή $t_1 = 10/\pi \text{ ms}$ παίρνουμε:

$$B_1 = 0,5 + 10\pi t_1 \Rightarrow B_1 = 0,6 \text{ T}$$

Προκύπτει:

$$\Phi_1 = B_1 \pi r^2 \Rightarrow \Phi_1 = 6\pi \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$$

Το ζητούμενο διάγραμμα είναι το εξής:



γ) Η ΗΕΔ από επαγωγή που αναπτύσσεται στο πλαίσιο είναι:

$$E_{\text{επ}} = -N \frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow E_{\text{επ}} = -N\pi r^2 \frac{dB}{dt} \Rightarrow$$

$$E_{\text{επ}} = -100 \text{ V}$$

δ) Για το ηλεκτρικό φορτίο που διέρχεται από μια διατομή του αγωγού, ισχύει:

$$q_{\text{επ}} = N \frac{|\Delta\Phi|}{R} \Rightarrow q_{\text{επ}} = 0,05\pi \text{ C}$$

5.100 α) Για τον αριθμό των σπειρών του πλαισίου προκύπτει:

$$\ell = N2\pi a \Rightarrow N = \frac{\ell}{2\pi a} \Rightarrow N = 1000 \text{ σπείρες}$$

β) $0 \leq t < 2\text{s}$:

Ισχύει:

$$E_{\text{επ},1} = -N \frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow E_{\text{επ},1} = -N \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \Rightarrow$$

$$E_{\text{επ},1} = -5 \text{ V}$$

Επίσης έχουμε:

$$I_{\text{επ},1} = \frac{E_{\text{επ},1}}{R} \Rightarrow I_{\text{επ},1} = -1 \text{ A}$$

$2\text{s} \leq t < 6\text{s}$:

Ισχύει:

$$E_{\text{επ},2} = -N \frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow E_{\text{επ},2} = -N \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \Rightarrow E_{\text{επ},2} = 4 \text{ V}$$

Επίσης έχουμε:

$$I_{\text{επ},2} = \frac{E_{\text{επ},2}}{R} \Rightarrow I_{\text{επ},2} = 0,8 \text{ A}$$

$6\text{s} \leq t \leq 10\text{s}$:

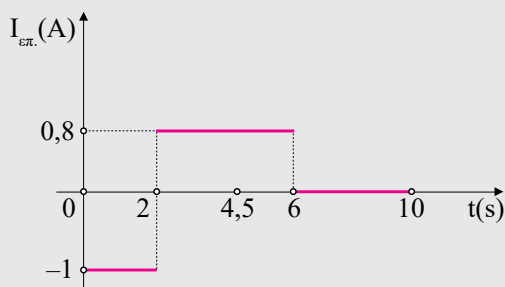
Ισχύει:

$$E_{\text{επ},3} = -N \frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow E_{\text{επ},3} = -N \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \Rightarrow E_{\text{επ},3} = 0$$

Επίσης έχουμε:

$$I_{\text{επ},3} = \frac{E_{\text{επ},3}}{R} \Rightarrow I_{\text{επ},3} = 0$$

Το ζητούμενο διάγραμμα είναι το εξής:



γ) $0 \leq t < 2s$:

Ισχύει:

$$|q_1| = N \frac{|\Delta\Phi|}{R} \Rightarrow |q_1| = 2C$$

$2s \leq t < 6s$:

Ισχύει:

$$|q_2| = N \frac{|\Delta\Phi|}{R} \Rightarrow |q_2| = 3,2C$$

$6s \leq t \leq 10s$:

Ισχύει:

$$|q_3| = N \frac{|\Delta\Phi|}{R} \Rightarrow |q_3| = 0$$

Για το φορτίο που πέρασε από μια διατομή του σύρματος, προκύπτει:

$$|q_{ολ}| = |q_1| + |q_2| + |q_3| \Rightarrow |q_{ολ}| = 5,2C$$

δ) $0 \leq t < 2s$:

Ισχύει:

$$Q_1 = I_{επ,1}^2 R \cdot \Delta t \Rightarrow Q_1 = 10J$$

$2s \leq t < 6s$:

Ισχύει:

$$Q_2 = I_{επ,2}^2 R \cdot \Delta t \Rightarrow Q_2 = 12,8J$$

$6s \leq t < 10s$:

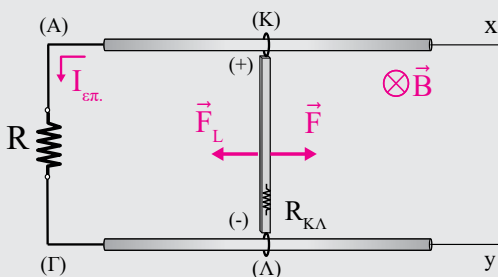
Ισχύει:

$$Q_3 = 0$$

Για τη θερμότητα που εκλύθηκε από το πλαίσιο, λόγω φαινομένου Joule, προκύπτει:

$$Q_{ολ} = Q_1 + Q_2 + Q_3 \Rightarrow Q_{ολ} = 22,8J$$

5.101 α)



Ισχύει:

$$E_{επ} = \frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow E_{επ} = \frac{BL \cdot dx}{dt} \Rightarrow E_{επ} = BvL$$

Μια τυχαία χρονική στιγμή $t > t_1$ το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα:

$$I_{επ} = \frac{E_{επ}}{R + R_{KΛ}} \Rightarrow I_{επ} = \frac{BvL}{R + R_{KΛ}}$$

Το μέτρο της δύναμης Laplace που θα ασκείται στον αγωγό θα είναι:

$$F_L = BI_{επ}L \Rightarrow F_L = \frac{B^2 v L^2}{R + R_{KΛ}}$$

Εφαρμόζοντας τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για τον αγωγό ΑΓ προκύπτει:

$$\Sigma F = ma \Rightarrow F - F_L = ma \Rightarrow a = \frac{F - \frac{B^2 v L^2}{R + R_{KΛ}}}{m} \quad (1)$$

Θέτοντας στη σχέση (1) όπου $a = 0$ υπολογίζουμε το μέτρο της οριακής ταχύτητας. Έχουμε:

$$v_{op} = \frac{F(R + R_{KΛ})}{B^2 L^2} \Rightarrow v_{op} = 10 \frac{m}{s}$$

β) Ισχύει:

$$v_1 = \frac{v_{op}}{5} \Rightarrow v_1 = 2 \frac{m}{s}$$

Προκύπτει:

$$I_{επ,1} = \frac{Bv_1 L}{R + R_{KΛ}} \Rightarrow I_{επ,1} = 0,5A$$

Τελικά έχουμε:

$$P_{R_{KΛ}} = I_{επ,1}^2 R_{KΛ} \Rightarrow P_{R_{KΛ}} = 0,25W$$

γ) Για την ισχύ της δύναμης Laplace προκύπτει:

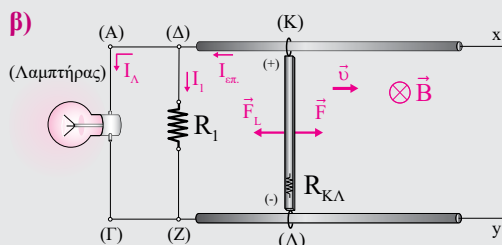
$$\frac{dK}{dt} = \Sigma F \cdot v_3 \Rightarrow \frac{dK}{dt} = F_L \cdot v_3 \Rightarrow \frac{dK}{dt} = P_{F_L} \Rightarrow P_{F_L} = -16W$$

δ) Από την εφαρμογή του Θ.Μ.Κ.Ε. για τον αγωγό ΚΛ έχουμε:

$$0 - \frac{1}{2} m v_{op}^2 = W_{F_L} \Rightarrow W_{F_L} = -5J$$

5.102 α) Για την αντίσταση του λαμπτήρα ισχύει:

$$R_{\Lambda} = \frac{V_{\kappa}^2}{P_{\kappa}} \Rightarrow R_{\Lambda} = 4\Omega$$



Ισχύει:

$$I_{\Lambda} = \frac{P_{\kappa}}{V_{\kappa}} \Rightarrow I_{\Lambda} = 2A$$

Προκύπτει:

$$V_{\kappa\Lambda} = I_{\Lambda} R_{\Lambda} \Rightarrow V_{\kappa\Lambda} = 8V$$

Τελικά έχουμε:

$$P_{R_1} = \frac{V_{\kappa\Lambda}^2}{R_1} \Rightarrow P_{R_1} = \frac{16}{3} W$$

γ) Προκύπτει:

$$I = I_{\Lambda} + I_1 \Rightarrow I = I_{\Lambda} + \frac{V_{\kappa\Lambda}}{R_1} \Rightarrow I = \frac{8}{3} A$$

Ισχύει:

$$E_{\varepsilon\pi} = \frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow E_{\varepsilon\pi} = \frac{BL \cdot dx}{dt} \Rightarrow E_{\varepsilon\pi} = BuL$$

Επίσης έχουμε:

$$I = \frac{E_{\varepsilon\pi}}{R_{\kappa\Lambda} + R_{\Lambda}} \Rightarrow I = \frac{BuL}{R_{\kappa\Lambda} + \frac{R_{\Lambda} R_1}{R_{\Lambda} + R_1}} \Rightarrow$$

$$L = \frac{I \left(R_{\kappa\Lambda} + \frac{R_{\Lambda} R_1}{R_{\Lambda} + R_1} \right)}{Bu} \Rightarrow$$

$$L = 0,8 m$$

δ) Έχουμε:

$$F_L = BIL \Rightarrow F_L = \frac{256}{30} N$$

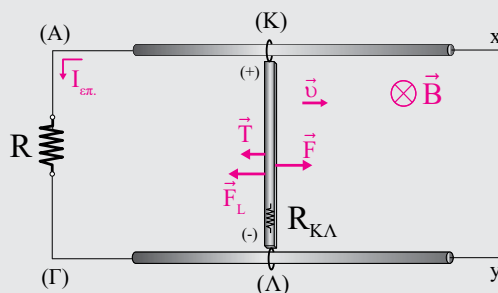
Ισχύει:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F = F_L \Rightarrow F = \frac{256}{30} N$$

Για την ισχύ της εξωτερικής δύναμης που ασκείται στον αγωγό, προκύπτει:

$$P_F = Fv \Rightarrow P_F = \frac{128}{3} W$$

5.103 α)



Ισχύει:

$$E_{\varepsilon\pi} = \frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow E_{\varepsilon\pi} = \frac{BL \cdot dx}{dt} \Rightarrow E_{\varepsilon\pi} = BuL \Rightarrow$$

$$E_{\varepsilon\pi} = 4V$$

Μια τυχαία χρονική στιγμή $t > t_1$ το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα:

$$I_{\varepsilon\pi} = \frac{E_{\varepsilon\pi}}{R + R_{\kappa\Lambda}} \Rightarrow I_{\varepsilon\pi} = 1A$$

Το μέτρο της δύναμης Laplace που θα ασκείται στον αγωγό θα είναι:

$$F_L = BI_{\varepsilon\pi} L \Rightarrow F_L = 2N$$

β) Για τον συντελεστή τριβής ολίσθησης προκύπτει:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F = F_L + T \Rightarrow F = F_L + \mu mg \Rightarrow$$

$$\mu = \frac{F - F_L}{mg} \Rightarrow \mu = 0,2$$

γ) Ισχύει:

$$q = \frac{\Delta\Phi}{R + R_{\kappa\Lambda}} \Rightarrow q = \frac{Bu \cdot \Delta t \cdot L}{R + R_{\kappa\Lambda}} \Rightarrow$$

$$q = 2C$$

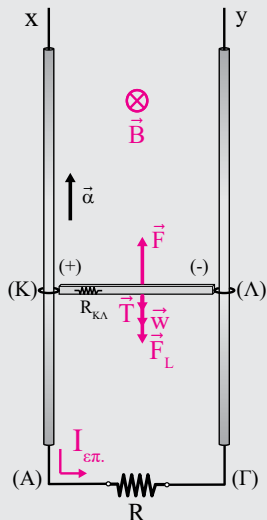
δ) Για το ζητούμενο ποσοστό έχουμε:

$$\Pi(\%) = \frac{Q}{W_F} \cdot 100\% \Rightarrow \Pi(\%) = \frac{|T v \cdot \Delta t|}{F v \cdot \Delta t} \cdot 100\% \Rightarrow$$

$$\Pi(\%) = \frac{\mu mg}{F} \cdot 100\% \Rightarrow$$

$$\Pi(\%) = \frac{100}{3} \%$$

5.104 α)



Ισχύει:

$$E_{\varepsilon\pi} = \frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow E_{\varepsilon\pi} = \frac{BLdy}{dt} \Rightarrow$$

$$E_{\varepsilon\pi} = BLv \Rightarrow E_{\varepsilon\pi} = BLat$$

Μια τυχαία χρονική στιγμή $t > t_0$ το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα:

$$I_{\varepsilon\pi} = \frac{E_{\varepsilon\pi}}{R + R_{K\Lambda}} \Rightarrow I_{\varepsilon\pi} = \frac{BLat}{R + R_{K\Lambda}} \Rightarrow I_{\varepsilon\pi} = t(\text{S.I.})$$

Το μέτρο της δύναμης Laplace που θα ασκείται στον αγωγό θα είναι:

$$F_L = BI_{\varepsilon\pi}L \Rightarrow F_L = t(\text{S.I.})$$

Εφαρμόζοντας τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για τον αγωγό ΚΛ προκύπτει:

$$\Sigma F = ma \Rightarrow F - F_L - w - T = ma \Rightarrow$$

$$F = ma + F_L + mg + T \Rightarrow \mathbf{F} = \mathbf{5} + \mathbf{t}(\text{S.I.})$$

β) Ισχύει:

$$I_{\varepsilon\pi,1} = t_1 \Rightarrow I_{\varepsilon\pi,1} = 1\text{A}$$

Για τη ζητούμενη θερμική ισχύ, προκύπτει:

$$P_R = I_{\varepsilon\pi,1}^2 R \Rightarrow P_R = 2\text{W}$$

γ) Έχουμε:

$$P_F = F_2 v_2 \Rightarrow P_F = (5 + t_2) \alpha t_2 \Rightarrow$$

$$P_F = 70\text{W}$$

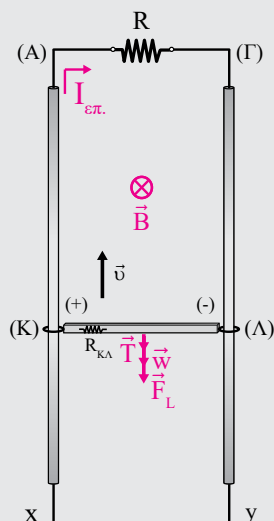
δ) Ισχύει:

$$h = \frac{1}{2} \alpha t_1^2 \Rightarrow h = 2,5\text{m}$$

Για τη μέση ισχύ του βάρους του αγωγού, προκύπτει:

$$\bar{P}_w = \frac{-mgh}{t_1} \Rightarrow \bar{P}_w = -5\text{W}$$

5.105 α)



Ισχύει:

$$v_1 = \frac{v_0}{4} \Rightarrow v_1 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Προκύπτει:

$$E_{\varepsilon\pi,1} = B v_1 L \Rightarrow E_{\varepsilon\pi,1} = 2\text{V}$$

Την χρονική στιγμή t_1 το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα έντασης:

$$I_{\varepsilon\pi,1} = \frac{E_{\varepsilon\pi,1}}{R + R_{K\Lambda}} \Rightarrow I_{\varepsilon\pi,1} = 0,5\text{A}$$

Για τη ζητούμενη θερμική ισχύ, έχουμε:

$$P_R = I_{\varepsilon\pi,1}^2 R \Rightarrow P_R = 0,75\text{W}$$

β) Ισχύει:

$$P_{\eta\lambda} = E_{\varepsilon\pi,1} I_{\varepsilon\pi,1} \Rightarrow P_{\eta\lambda} = 1W$$

γ) Το μέτρο της δύναμης Laplace που θα ασκείται στον αγωγό τη χρονική t_1 θα είναι:

$$F_{L,1} = BI_{\varepsilon\pi,1} L \Rightarrow F_{L,1} = 0,5N$$

Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του αγωγού ΚΛ είναι:

$$\frac{dK}{dt} = \Sigma F \cdot v_1 \Rightarrow \frac{dK}{dt} = (-F_{L,1} - w - T) \cdot v_1 \Rightarrow$$

$$\frac{dK}{dt} = -7 \frac{J}{s}$$

δ) Εφαρμόζοντας το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για τον αγωγό ΚΛ τη χρονική στιγμή t_2 , προκύπτει:

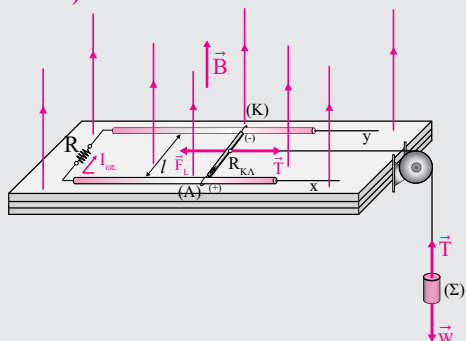
$$\Sigma F = m\alpha \Rightarrow F_{L,2} + w + T = m\alpha \Rightarrow$$

$$\frac{B^2 v_2 L^2}{R + R_{K\Lambda}} = m\alpha - mg - T \Rightarrow$$

$$v_2 = \frac{(m\alpha - mg - T)(R + R_{K\Lambda})}{B^2 L^2} \Rightarrow$$

$$v_2 = 1 \frac{m}{s}$$

5.106 α)



Για το σώμα Σ ισχύει:

$$\Sigma F_y = m\alpha \Rightarrow w - T = m\alpha \Rightarrow mg - T = m\alpha \quad (1)$$

Μια τυχαία χρονική στιγμή $t > t_0$ το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα:

$$I_{\varepsilon\pi} = \frac{E_{\varepsilon\pi}}{R + R_{K\Lambda}} \Rightarrow I_{\varepsilon\pi} = \frac{BvL}{R + R_{K\Lambda}}$$

Το μέτρο της δύναμης Laplace που θα ασκείται στη ράβδο ΚΛ θα είναι:

$$F_L = BI_{\varepsilon\pi} L \Rightarrow F_L = \frac{B^2 v L^2}{R + R_{K\Lambda}}$$

Εφαρμόζοντας τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για τη ράβδο ΚΛ προκύπτει:

$$\Sigma F_y = m_{K\Lambda} \alpha \Rightarrow T - F_L = m_{K\Lambda} \alpha \Rightarrow$$

$$T - \frac{B^2 v L^2}{R + R_{K\Lambda}} = m_{K\Lambda} \alpha \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) έχουμε:

$$\alpha = \frac{mg - \frac{B^2 v L^2}{R + R_{K\Lambda}}}{m + m_{K\Lambda}} \quad (3)$$

Από την τελευταία σχέση (3) προκύπτει ότι όσο αυξάνεται η ταχύτητα της ράβδου ΚΛ, τόσο θα μειώνεται και το μέτρο της επιτάχυνσής της. Επομένως, **η ράβδος θα εκτελεί επιταχυνόμενη κίνηση με επιτάχυνση που το μέτρο της συνεχώς μειώνεται μέχρι τη στιγμή που θα μηδενιστεί η επιτάχυνση και πλέον θα κινείται με σταθερή ταχύτητα, την οριακή της ταχύτητα.**

β) Θέτοντας στη σχέση (3) όπου $\alpha = 0$ βρίσκουμε το μέτρο της οριακής ταχύτητας του αγωγού. Για το μέτρο της οριακής ταχύτητας που αποκτάει η ράβδος, προκύπτει:

$$\frac{B^2 v_{op} L^2}{R + R_{K\Lambda}} = mg \Rightarrow v_{op} = \frac{(R + R_{K\Lambda})}{B^2 L^2} mg \Rightarrow$$

$$v_{op} = 10 \frac{m}{s}$$

γ) Ισχύει:

$$F_{L,1} = \frac{B^2 v_{op} L^2}{R + R_{K\Lambda}} \Rightarrow F_{L,1} = 1N$$

Τελικά προκύπτει:

$$\frac{dE_{\eta\lambda}}{dt} = \left| F_{L,1} \frac{v_{op}}{5} \right| \Rightarrow \frac{dE_{\eta\lambda}}{dt} = 2 \frac{J}{s}$$

δ) Ο ρυθμός μεταβολής της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας του Σ είναι:

$$\frac{dU}{dt} = -mg \frac{v_{op}}{5} \Rightarrow \frac{dU}{dt} = -10 \frac{J}{s}$$

5.107 α) Για την περίοδο της εναλλασσόμενης τάσης προκύπτει:

$$\Delta t = \frac{T}{2} \Rightarrow T = 2 \cdot \Delta t \Rightarrow T = 20ms$$

Η γωνιακή συχνότητα της τάσης είναι:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = 100\pi \frac{rad}{s}$$

β) Προκύπτει:

$$t_1 = \frac{T}{4} \Rightarrow t_1 = 5ms$$

γ) Για τη ζητούμενη μεταβολή της φάσης ισχύει:

$$\Delta\phi = \omega \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta\phi = 8\pi \text{ rad}$$

δ) Ισχύει:

$$v = V\eta\mu\omega t \Rightarrow \frac{V}{2} = V\eta\mu\omega t_2 \Rightarrow$$

$$\eta\mu\omega t_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \omega t_2 = \frac{\pi}{6} \Rightarrow$$

$$\frac{2\pi}{T} t_2 = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t_2 = \frac{T}{12}$$

Επίσης ισχύει:

$$v = V\eta\mu\omega t \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}V}{2} = V\eta\mu\omega t_3 \Rightarrow$$

$$\eta\mu\omega t_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$\omega t_3 = \frac{5\pi}{4} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} t_3 = \frac{5\pi}{4} \Rightarrow t_3 = \frac{5T}{8}$$

Για τη ζητούμενη χρονική διάρκεια, προκύπτει:

$$\Delta t = t_3 - t_2 \Rightarrow \Delta t = \frac{5T}{8} - \frac{T}{12} \Rightarrow \Delta t = \frac{13T}{24} \Rightarrow$$

$$\Delta t = \frac{65}{6} ms$$

5.108 α) Βρίσκουμε την αντίσταση του λαμπτήρα. Ισχύει:

$$R_{\Lambda} = \frac{V_K^2}{P_K} \Rightarrow R_{\Lambda} = 50\Omega$$

Ισχύει:

$$p = vi \Rightarrow p = VI \cdot \eta\mu^2\omega t \Rightarrow p = \frac{V^2}{R_{\Lambda}} \cdot \eta\mu^2\omega t \Rightarrow$$

$$p = 6400W$$

β) Ισχύει:

$$V_{ev} = \frac{V}{\sqrt{2}} \Rightarrow V_{ev} = 400V$$

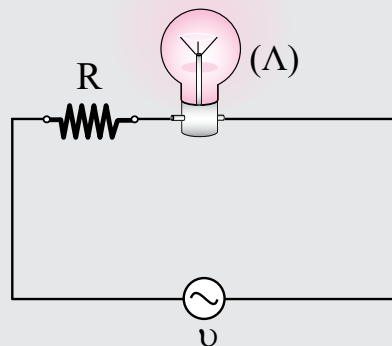
Επομένως, προκύπτει ότι:

$$V_{ev} > V_K$$

Αρα, ο λαμπτήρας δεν λειτουργεί κανονικά.

γ) Για να λειτουργεί κανονικά ο λαμπτήρας θα πρέπει να διαρρέεται από ρεύμα:

$$I_K = \frac{P_K}{V_K} \Rightarrow I_K = 2A$$



Για την αντίσταση R προκύπτει:

$$V_{ev} = I_K (R + R_{\Lambda}) \Rightarrow R = \frac{V_{ev} - I_K R_{\Lambda}}{I_K} \Rightarrow$$

$$R = 150\Omega$$

δ) Ισχύει:

$$i = \frac{I_K}{2} \Rightarrow i = 1A$$

Η ισχύς που καταναλώνει ο αντιστάτης είναι:

$$p_R = i^2 R \Rightarrow p_R = 150 \text{ W}$$

5.109 α) Για την περίοδο του ρεύματος προκύπτει:

$$i = I \eta \mu \omega t \Rightarrow \frac{I}{\sqrt{2}} = I \eta \mu \omega t_1 \Rightarrow$$

$$\eta \mu \omega t_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \omega t_1 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow$$

$$\frac{2\pi}{T} t_1 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow T = 8 t_1 \Rightarrow T = 0,04 \text{ s}$$

β) Έχουμε:

$$\frac{\Delta t}{T} = \frac{80 \cdot 10^{-3} \text{ s}}{0,04 \text{ s}} \Rightarrow \Delta t = 2T$$

Επομένως, η ένταση του ρεύματος μηδενίζεται σε χρονική διάρκεια Δt 4 φορές.

γ) Ισχύει:

$$\frac{t_2}{T} = \frac{10^{-2}}{0,04} \Rightarrow t_2 = \frac{T}{4}$$

Για το πλάτος της έντασης του ρεύματος προκύπτει:

$$i_2 = I \Rightarrow I = 2 \text{ A}$$

δ) Έχουμε:

$$i = I \eta \mu \omega t \Rightarrow \pm \frac{I}{\sqrt{2}} = I \eta \mu \omega t \Rightarrow \eta \mu \omega t = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$\eta \mu \omega t = \eta \mu \frac{\pi}{4} (1) \text{ και } \eta \mu \omega t = \eta \mu - \frac{\pi}{4} (2)$$

Από τη σχέση (1) προκύπτουν οι λύσεις:

$$\omega t = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} t = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow$$

$$t = \left(\kappa + \frac{1}{8} \right) T (3)$$

Θέτοντας στην (3) $\kappa = 0$ προκύπτει:

$$t = \frac{T}{8}$$

Από τη σχέση (1) προκύπτουν επίσης οι λύσεις:

$$\omega t = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} t = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{4} \Rightarrow$$

$$t = \left(\kappa + \frac{3}{8} \right) T (4)$$

Θέτοντας στην (4) $\kappa = 0$ προκύπτει:

$$t = \frac{3T}{8}$$

Από τη σχέση (2) προκύπτουν οι λύσεις:

$$\omega t = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} t = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow$$

$$t = \left(\kappa - \frac{1}{8} \right) T (5)$$

Θέτοντας στην (5) $\kappa = 1$ προκύπτει:

$$t = \frac{7T}{8}$$

Από τη σχέση (2) προκύπτουν επίσης οι λύσεις:

$$\omega t = 2\kappa\pi + \pi - \left(-\frac{\pi}{4} \right) \Rightarrow \frac{2\pi}{T} t = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{4} \Rightarrow$$

$$t = \left(\kappa + \frac{5}{8} \right) T (6)$$

Θέτοντας στην (6) $\kappa = 1$ προκύπτει:

$$t = \frac{5T}{8}$$

5.110 α) Από το διάγραμμα έχουμε:

$$T + \frac{T}{2} = 15 \text{ ms} \Rightarrow T = 10 \text{ ms}$$

Για τη συχνότητα της εναλλασσόμενης τάσης, προκύπτει:

$$f = \frac{1}{T} \Rightarrow f = 100 \text{ Hz}$$

β) Ισχύει:

$$p = v i \Rightarrow p = V I \cdot \eta \mu^2 \omega t (1)$$

Από τη σχέση (1) προκύπτει:

$$p_{\max} = V I \Rightarrow p_{\max} = I^2 R \Rightarrow I = \sqrt{\frac{p_{\max}}{R}} \Rightarrow$$

$$I = 2\sqrt{2} \text{ A}$$

Για την ενεργό ένταση του ρεύματος που διαρρέει τον αντιστάτη έχουμε:

$$I_{\text{ev}} = \frac{I}{\sqrt{2}} \Rightarrow I_{\text{ev}} = 2 \text{ A}$$

γ) Για τη μέση ισχύ έχουμε:

$$\bar{P} = V_{\text{εV}} I_{\text{εV}} \Rightarrow \bar{P} = \frac{VI}{2} \Rightarrow \bar{P} = \frac{P_{\text{max}}}{2} \Rightarrow \bar{P} = 200 \text{ W}$$

δ) Για τη ζητούμενη θερμότητα προκύπτει:

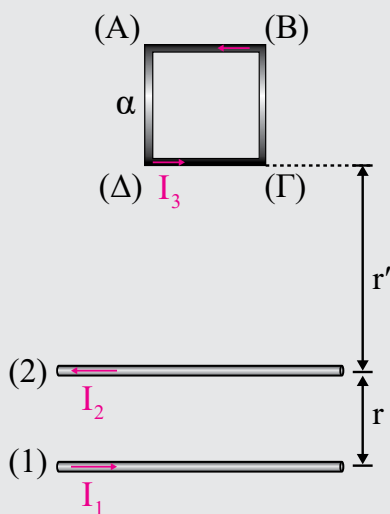
$$Q_{\Theta} = I_{\text{εV}}^2 R \cdot \Delta t \Rightarrow Q_{\Theta} = 10 \text{ J}$$

ΘΕΜΑ Δ

5.111 α) Οι αγωγοί (1), (2) απωθούνται επομένως τα ρεύματα I_1 , I_2 είναι αντίρροπα. Για το μήκος της πλευράς του πλαισίου έχουμε:

$$\frac{F}{\ell} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_1 I_2}{r} \Rightarrow r = \frac{2 \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I_1 I_2}{\frac{F}{\ell}} \Rightarrow$$

$$\alpha = 0,2 \text{ m}$$

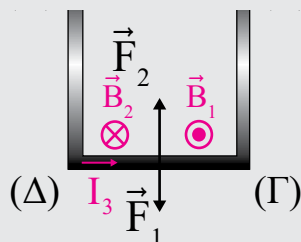


β) Ισχύει:

$$B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_1}{r + r'} \Rightarrow B_1 = 10^{-6} \text{ T}$$

Επίσης ισχύει:

$$B_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_2}{r'} \Rightarrow B_2 = 2 \cdot 10^{-6} \text{ T}$$



Έχουμε:

$$F_1 = B_1 I_3 \alpha \Rightarrow F_1 = 2 \cdot 10^{-6} \text{ N}$$

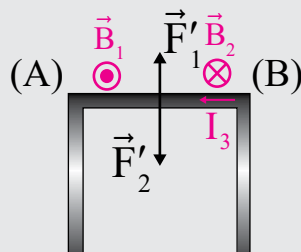
$$F_2 = B_2 I_3 \alpha \Rightarrow F_2 = 4 \cdot 10^{-6} \text{ N}$$

Η συνισταμένη δύναμη που δέχεται η πλευρά ΔΓ του πλαισίου είναι:

$$\Sigma F_{\Delta\Gamma} = F_2 - F_1 \Rightarrow \Sigma F_{\Delta\Gamma} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ N}$$

γ) Ισχύει:

$$B'_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_1}{\alpha + r + r'} \Rightarrow B'_1 = 8 \cdot 10^{-7} \text{ T}$$



Επίσης ισχύει:

$$B'_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_2}{r' + r} \Rightarrow B'_2 = 15 \cdot 10^{-7} \text{ T}$$

Έχουμε:

$$F'_1 = B'_1 I_3 \alpha \Rightarrow F'_1 = 1,6 \cdot 10^{-6} \text{ N}$$

Επίσης έχουμε:

$$F'_2 = B'_2 I_3 \alpha \Rightarrow F'_2 = 3 \cdot 10^{-6} \text{ N}$$

Η συνισταμένη δύναμη που δέχεται η πλευρά ΑΒ του πλαισίου είναι:

$$\Sigma F_{AB} = F'_2 - F'_1 \Rightarrow \Sigma F_{AB} = 1,4 \cdot 10^{-6} \text{ N}$$

δ) Η συνισταμένη δύναμη στις πλευρές ΑΔ και ΒΓ είναι ίση με μηδέν.

Τελικά, η συνισταμένη δύναμη που δέχεται όλο το πλαίσιο, είναι:

$$\Sigma F_{\text{ολ}} = \Sigma F_{\Delta\Gamma} - \Sigma F_{\text{AB}} \Rightarrow \Sigma F_{\text{ολ}} = 0,6 \cdot 10^{-6} \text{ N}$$

5.112 α) Για το μήκος του σύρματος από το οποίο είναι φτιαγμένο το πηνίο ισχύει:

$$l_1 = N_1 \pi \Delta$$

Το εμβαδόν διατομής του σύρματος είναι:

$$S = \pi \frac{\delta^2}{4}$$

Για την αντίσταση του πηνίου έχουμε:

$$R_\pi = \rho \frac{l_1}{S} \Rightarrow R_\pi = \rho \frac{N_1 \pi \Delta}{\pi \frac{\delta^2}{4}} \Rightarrow R_\pi = \frac{4 \rho N_1 \Delta}{\delta^2} \Rightarrow R_\pi = 2 \Omega$$

β) Υπολογίζουμε την ένταση του ρεύματος που διαρρέει την πηγή:

$$I_1 = \frac{E}{R_\pi + r + R} \Rightarrow I_1 = 2 \text{ A}$$

Για την πολική τάση της πηγής προκύπτει:

$$V_\pi = E - I_1 r \Rightarrow V_\pi = 18 \text{ V}$$

γ) Ισχύει:

$$\Pi(\%) = \frac{I_1^2 R \cdot \Delta t}{EI_1 \cdot \Delta t} \cdot 100\% \Rightarrow \Pi(\%) = \frac{I_1 R}{E} \cdot 100\% \Rightarrow \Pi(\%) = 70\%$$

δ) Για να είναι η ένταση του μαγνητικού πεδίου ίση με μηδέν στο κέντρο του κυκλικού αγωγού θα πρέπει οι εντάσεις $\vec{B}_1$ και $\vec{B}_2$ λόγω του πηνίου και λόγω του κυκλικού πλαισίου να είναι αντίθετες. Δηλαδή ισχύει:

$$B_1 = B_2 \Rightarrow \mu_0 \frac{N_1}{\ell} I_1 = N_2 \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2\pi I_2}{r_2} \Rightarrow N_2 = \frac{2N_1 I_1 r_2}{I_2 \ell} \Rightarrow N_2 = 1000 \text{ σπείρες}$$

5.113 α) Έχουμε:

$$\frac{R_{\Sigma_1}}{R_{\Sigma_2}} = \frac{L_1}{L_2} \Rightarrow \frac{R_{\Sigma_1}}{R_{\Sigma_2}} = 3 \Rightarrow R_{\Sigma_2} = \frac{R_{\Sigma_1}}{3}$$

Τελικά, για την αντίσταση του πηνίου Π_1 , προκύπτει:

$$R_{\Sigma_1} + R_{\Sigma_2} = R_\Sigma \Rightarrow \frac{4R_{\Sigma_1}}{3} = R_\Sigma \Rightarrow R_{\Sigma_1} = 12 \Omega$$

Ισχύει:

$$n_1 = n \Rightarrow n_1 = 600 \frac{\text{σπείρες}}{\text{m}}$$

β) Έχουμε:

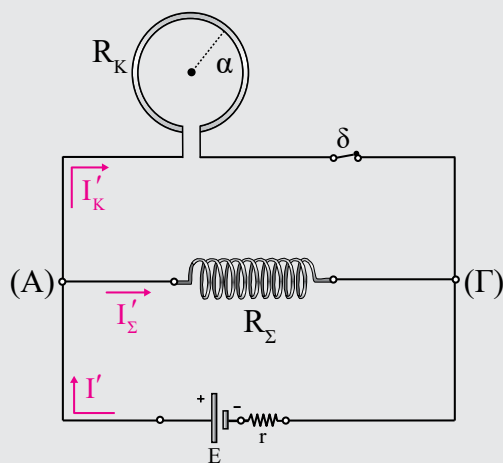
$$I = \frac{E}{R_{\Sigma_1} + r} \Rightarrow I = 5 \text{ A}$$

Το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου, στο κέντρο του πηνίου Π_1 , είναι:

$$B_1 = \mu_0 n_1 I \Rightarrow B_1 = 12 \cdot \pi \cdot 10^{-4} \text{ T}$$

γ) Έχουμε:

$$I' = \frac{E}{\frac{R_{\Sigma_1} R_K}{R_{\Sigma_1} + R_K} + r} \Rightarrow I' = 14 \text{ A}$$



Ισχύει:

$$V_{\text{A}\Gamma} = V_\pi \Rightarrow V_{\text{A}\Gamma} = E - I' r \Rightarrow V_{\text{A}\Gamma} = 42 \text{ V}$$

Προκύπτει:

$$I'_K = \frac{V_{\text{A}\Gamma}}{R_K} \Rightarrow I'_K = 10,5 \text{ A}$$

Το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου, στο κέντρο του κυκλικού αγωγού, είναι:

$$B_K = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi I'_K}{a} \Rightarrow B_K = 42 \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

δ) Για την ηλεκτρική ισχύ που παρέχει η πηγή στο εξωτερικό κύκλωμα, έχουμε:

$$P_{e\xi} = V_{\pi} I' \Rightarrow P_{e\xi} = 588 \text{ W}$$

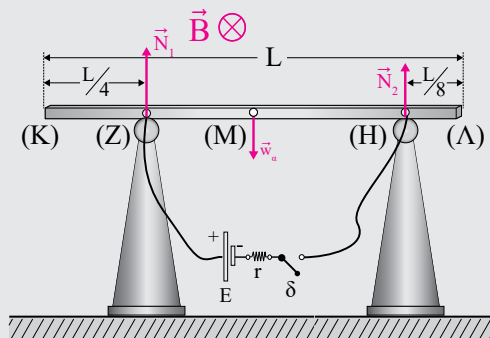
Ισχύει:

$$I'_{\Sigma} = \frac{V_{A\Gamma}}{R_{\Sigma_1}} \Rightarrow I'_{\Sigma} = \frac{21}{6} \text{ A}$$

Προκύπτει τελικά:

$$B_a = \frac{\mu_0 n_1 I'_{\Sigma}}{2} \Rightarrow B_a = 42\pi \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

5.114 α)



Ισχύει:

$$\Sigma \tau_Z = 0 \Rightarrow N_2 \frac{5L}{8} = w_{\alpha} \frac{L}{4} \Rightarrow N_2 = \frac{2mg}{5} \Rightarrow$$

$$N_2 = 16 \text{ N}$$

Επίσης έχουμε:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_1 + N_2 = w_{\alpha} \Rightarrow N_1 = mg - N_2 \Rightarrow$$

$$N_1 = 24 \text{ N}$$

β) Ισχύει:

$$ZH = \frac{5L}{8} \Rightarrow ZH = 0,5 \text{ m}$$

Βρίσκουμε την αντίσταση του τμήματος ZH του αγωγού ΚΛ. Ισχύει:

$$\frac{R_{\text{ΚΛ}}}{R_{\text{ZH}}} = \frac{L}{5L} \Rightarrow R_{\text{ZH}} = \frac{5}{8} R_{\text{ΚΛ}} \Rightarrow R_{\text{ZH}} = 5 \Omega$$

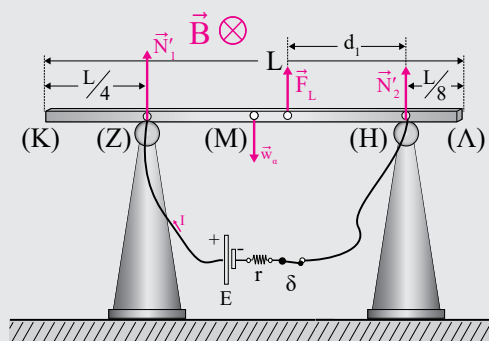
Υπολογίζουμε την ένταση του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα. Ισχύει:

$$I = \frac{E}{R_{\text{ZH}}} \Rightarrow I = 5 \text{ A}$$

Το μέτρο της δύναμης Laplace που ασκείται στον αγωγό είναι:

$$F_L = BI \cdot ZH \Rightarrow F_L = 5 \text{ N}$$

γ)



Έχουμε:

$$d_1 = \frac{ZH}{2} \Rightarrow d_1 = 0,25 \text{ m}$$

Ισχύει:

$$\Sigma \tau_H = 0 \Rightarrow N'_1 \frac{5L}{8} + F_L d_1 = w_{\alpha} \frac{3L}{8} \Rightarrow$$

$$N'_1 = \frac{mg \frac{3L}{8} - F_L d_1}{\frac{5L}{8}} \Rightarrow N'_1 = 21,5 \text{ N}$$

Επίσης έχουμε:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N'_1 + N'_2 + F_L = w_{\alpha} \Rightarrow$$

$$N'_2 = mg - N'_1 - F_L \Rightarrow$$

$$N'_2 = 13,5 \text{ N}$$

δ) Για να μην ανατρέπεται ο αγωγός θα πρέπει:

$$N'_2 \geq 0(1)$$

Ισχύει:

$$\Sigma \tau_z = 0 \Rightarrow N_2'' \frac{5L}{8} + F_L'' d_1 = w_\alpha \frac{L}{4} \Rightarrow$$

$$N_1'' = \frac{mg \frac{L}{4} - BI \cdot ZH \cdot d_1}{\frac{5L}{8}} \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει:

$$mg \frac{L}{4} - BI \cdot ZH \cdot d_1 \geq 0 \Rightarrow B \leq \frac{mg \frac{L}{4}}{I \cdot ZH \cdot d_1} \Rightarrow$$

$$B_{\max} = 12,8 \text{ T}$$

5.115 α) Ισχύει:

$$\Delta U = 0 - mgh \Rightarrow h = \frac{-\Delta U}{mg} \Rightarrow h = 0,05 \text{ m}$$

Υπολογίζουμε το μέτρο της ταχύτητας του αγωγού τη χρονική στιγμή t_1 :

$$v_1 = gt_1 \Rightarrow v_1 = g \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow v_1 = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ισχύει:

$$E_{\varepsilon\pi,1} = \frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow E_{\varepsilon\pi} = \frac{BLdy}{dt} \Rightarrow E_{\varepsilon\pi,1} = BLv_1 \Rightarrow$$

$$E_{\varepsilon\pi,1} = 2 \text{ V}$$

Για την τάση στα άκρα του αγωγού ισχύει:

$$V_{A\Gamma} = E_{\varepsilon\pi,1} \Rightarrow V_{A\Gamma} = 2 \text{ V}$$

β) Τη χρονική στιγμή t_1 η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα είναι:

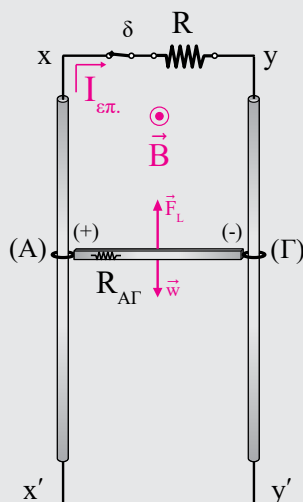
$$I_{\varepsilon\pi,1} = \frac{E_{\varepsilon\pi,1}}{R + R_{A\Gamma}} \Rightarrow I_{\varepsilon\pi,1} = 4 \text{ A}$$

Το μέτρο της δύναμης Laplace που ασκείται στον αγωγό ΑΓ είναι:

$$F_{L,1} = BI_{\varepsilon\pi,1}L \Rightarrow F_{L,1} = 8 \text{ N}$$

Το βάρος του αγωγού είναι:

$$w = mg \Rightarrow w = 5 \text{ N}$$



Παρατηρούμε ότι $w < F_{L,1}$ επομένως, αμέσως μετά τη χρονική στιγμή που θα κλείσουμε τον διακόπτη, ο αγωγός ΑΓ θα αρχίσει να επιβραδύνεται.

Μια τυχαία χρονική στιγμή $t > t_1$ το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα:

$$I_{\varepsilon\pi} = \frac{E_{\varepsilon\pi}}{R + R_{A\Gamma}} \Rightarrow I_{\varepsilon\pi} = \frac{BvL}{R + R_{A\Gamma}}$$

Το μέτρο της δύναμης Laplace που θα ασκείται στον αγωγό θα είναι:

$$F_L = BI_{\varepsilon\pi}L \Rightarrow F_L = \frac{B^2 v L^2}{R + R_{A\Gamma}}$$

Εφαρμόζοντας τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για τον αγωγό ΑΓ προκύπτει:

$$\Sigma F = ma \Rightarrow F_L - w = ma \Rightarrow$$

$$\alpha = \frac{\frac{B^2 v L^2}{R + R_{A\Gamma}} - mg}{m} \quad (1)$$

Από την τελευταία σχέση (1) προκύπτει ότι όσο μικραίνει η ταχύτητα του αγωγού ΑΓ, τόσο θα μειώνεται και το μέτρο της επιβραδυνσης του αγωγού. Επομένως, ο αγωγός θα εκτελεί επιβραδυνόμενη κίνηση με επιβράδυνση που το μέτρο της συνεχώς μειώνεται

μέχρι τη στιγμή που θα μηδενιστεί η επιβράδυνση και πλέον θα κινείται με σταθερή ταχύτητα, την οριακή του ταχύτητα.

γ) Θέτοντας στη σχέση (1) όπου $\alpha = 0$ βρίσκουμε το μέτρο της οριακής ταχύτητας του αγωγού. Προκύπτει:

$$v_{op} = \frac{mg(R + R_{AG})}{B^2 L^2} \Rightarrow v_{op} = 0,625 \frac{m}{s}$$

Ισχύει:

$$v_2 = \frac{6v_{op}}{5} \Rightarrow v_2 = 0,75 \frac{m}{s}$$

Προκύπτει:

$$I_{\varepsilon\pi,2} = \frac{Bv_2 L}{R + R_{AG}} \Rightarrow I_{\varepsilon\pi,2} = 3A$$

Τελικά έχουμε:

$$P_R = I_{\varepsilon\pi,2}^2 R \Rightarrow P_R = 2,7W$$

δ) Ο ζητούμενος ρυθμός μεταβολής της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας είναι:

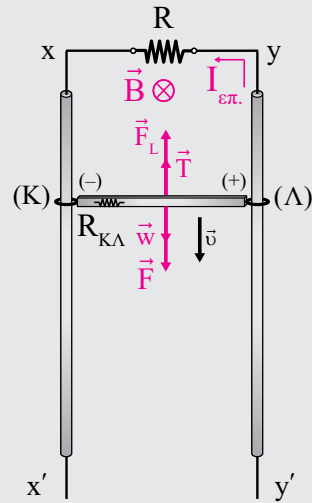
$$\frac{dU}{dt} = -mgv_{op} \Rightarrow \frac{dU}{dt} = -3,125 \frac{J}{s}$$

5.116 α) Ισχύει:

$$E_{\varepsilon\pi} = BLv \Rightarrow E_{\varepsilon\pi} = BL(v_0 + \alpha t)$$

Μια τυχαία χρονική στιγμή $t > t_0$ το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα:

$$I_{\varepsilon\pi} = \frac{E_{\varepsilon\pi}}{R + R_{KL}} \Rightarrow I_{\varepsilon\pi} = \frac{BL(v_0 + \alpha t)}{R + R_{KL}} \Rightarrow I_{\varepsilon\pi} = 8 + 4t \text{ (S.I.)}$$



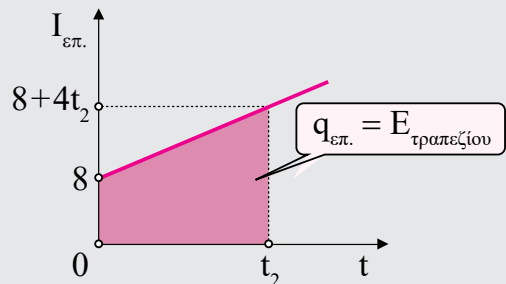
Το μέτρο της δύναμης Laplace που θα ασκείται στον αγωγό θα είναι:

$$F_L = BI_{\varepsilon\pi} L \Rightarrow F_L = 8 + 4t \text{ (S.I.)}$$

Τη χρονική στιγμή t_1 έχουμε:

$$F_{L,1} = 8 + 4t_1 \Rightarrow F_{L,1} = 10N$$

β) Σχεδιάζουμε το διάγραμμα $I_{\varepsilon\pi}$ - t για τη χρονική διάρκεια $t_0 = 0 \rightarrow t_2$:



Ισχύει:

$$q_{\varepsilon\pi} = E \Rightarrow q_{\varepsilon\pi} = \frac{t_2(8 + 8 + 4t_2)}{2} \Rightarrow t_2^2 + 4t_2 - 5 = 0 \Rightarrow t_2 = 1s$$

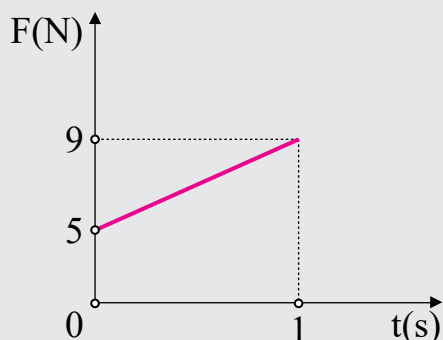
γ) Εφαρμόζοντας τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για τον αγωγό ΚΛ προκύπτει:

$$\Sigma F = ma \Rightarrow F - F_L + w - T = ma \Rightarrow$$

$$F = ma + F_L - mg + T \Rightarrow$$

$$F = 5 + 4t \text{ (S.I.)}$$

Το διάγραμμα για τη χρονική διάρκεια 0-1s είναι το εξής:



δ) Για το μέτρο της οριακής ταχύτητας που θα αποκτήσει ο αγωγός ΚΛ, προκύπτει:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow -F_L - T + w = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{B^2 v_{op} L^2}{R + R_{KL}} + T = mg \Rightarrow$$

$$v_{op} = \frac{(mg - T)(R + R_{KL})}{B^2 L^2} \Rightarrow v_{op} = 2 \frac{m}{s}$$

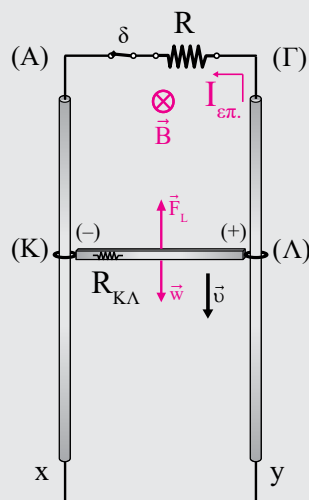
5.117 α) Για το μέτρο της ταχύτητας του αγωγού, έχουμε:

$$\frac{dU}{dt} = -mgv_1 \Rightarrow v_1 = \frac{\frac{dU}{dt}}{-mg} \Rightarrow v_1 = 2 \frac{m}{s}$$

β) Τη χρονική στιγμή t_1 η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα είναι:

$$I_{\varepsilon\pi,1} = \frac{E_{\varepsilon\pi,1}}{R + R_{KL}} \Rightarrow I_{\varepsilon\pi,1} = \frac{Bv_1 L}{R + R_{KL}} \Rightarrow$$

$$I_{\varepsilon\pi,1} = 2A$$



Το μέτρο της δύναμης Laplace που ασκείται στον αγωγό ΑΓ είναι:

$$F_{L,1} = BI_{\varepsilon\pi,1} L \Rightarrow F_{L,1} = 1N$$

Το βάρος του αγωγού είναι:

$$w = mg \Rightarrow w = 2N$$

Παρατηρούμε ότι $w > F_{L,1}$ επομένως, αμέσως μετά τη χρονική στιγμή που θα κλείσουμε τον διακόπτη, ο αγωγός ΑΓ θα αρχίσει να επιταχύνεται.

Μια τυχαία χρονική στιγμή $t > t_1$ το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα:

$$I_{\varepsilon\pi} = \frac{E_{\varepsilon\pi}}{R + R_{KL}} \Rightarrow I_{\varepsilon\pi} = \frac{BvL}{R + R_{KL}}$$

Το μέτρο της δύναμης Laplace που θα ασκείται στον αγωγό θα είναι:

$$F_L = BI_{\varepsilon\pi} L \Rightarrow F_L = \frac{B^2 v L^2}{R + R_{KL}}$$

Εφαρμόζοντας τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για τον αγωγό ΚΛ προκύπτει:

$$\Sigma F = ma \Rightarrow w - F_L = ma \Rightarrow$$

$$\alpha = \frac{mg - \frac{B^2 v L^2}{R + R_{KL}}}{m} \quad (1)$$

Από την τελευταία σχέση (1) προκύπτει ότι όσο αυξάνεται η ταχύτητα του αγωγού ΚΛ,

τόσο θα μειώνεται και το μέτρο της επιτάχυνσης του αγωγού. Επομένως, ο αγωγός θα εκτελεί επιταχυνόμενη κίνηση με επιτάχυνση που το μέτρο της συνεχώς μειώνεται μέχρι τη στιγμή που θα μηδενιστεί η επιτάχυνση και πλέον ο αγωγός θα κινείται με σταθερή ταχύτητα, την οριακή του ταχύτητα.

Θέτοντας στη σχέση (1), όπου $\alpha = 0$, βρίσκουμε το μέτρο της οριακής ταχύτητας του αγωγού. Προκύπτει:

$$v_{op} = \frac{mg(R + R_{KL})}{B^2 L^2} \Rightarrow v_{op} = 4 \frac{m}{s}$$

Η κινητική ενέργεια του αγωγού θα είναι:

$$K = \frac{1}{2} m v_{op}^2 \Rightarrow K = 1,6 J$$

γ) Ισχύει:

$$q_{\varepsilon\pi} = \frac{|\Delta\Phi|}{R + R_{KL}} \Rightarrow q_{\varepsilon\pi} = \frac{BLh}{R + R_{KL}} \Rightarrow$$

$$q_{\varepsilon\pi} = 7,2 C$$

δ) Από την εφαρμογή του Θ.Μ.Κ.Ε. έχουμε:

$$\frac{1}{2} m v_{op}^2 - \frac{1}{2} m v^2 = W_{F_L} + W_w \Rightarrow$$

$$W_{F_L} = \frac{1}{2} m v_{op}^2 - \frac{1}{2} m v^2 - mgh \Rightarrow$$

$$W_{F_L} = -13,2 J$$

Η συνολική θερμότητα που εκλύεται από το κύκλωμα για τη συγκεκριμένη κίνηση είναι:

$$Q_{\Theta} = -|W_{F_L}| \Rightarrow Q_{\Theta} = 13,2 J$$

Επειδή οι δύο αντιστάτες κάθε χρονική στιγμή διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα, θα ισχύει:

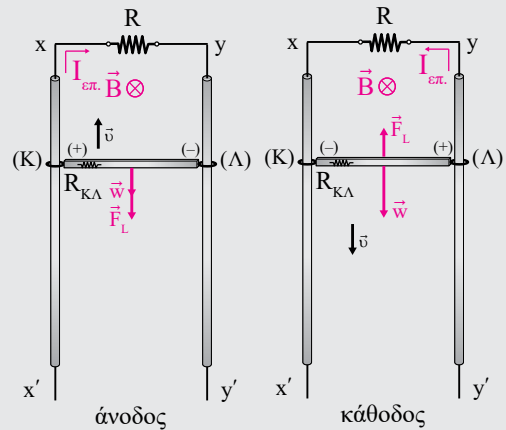
$$\frac{Q_{R_{KL}}}{Q_R} = \frac{R_{KL}}{R} \Rightarrow \frac{Q_{R_{KL}}}{Q_R} = \frac{3}{2} \Rightarrow Q_R = \frac{2}{3} Q_{R_{KL}}$$

Τελικά προκύπτει:

$$Q_{\Theta} = Q_{R_{KL}} + Q_R \Rightarrow Q_{\Theta} = \frac{5}{3} Q_{R_{KL}} \Rightarrow Q_{R_{KL}} = \frac{3Q_{\Theta}}{5}$$

$$\Rightarrow Q_{R_{KL}} = 7,92 J$$

5.118



α) Άνοδος:

Μια τυχαία χρονική στιγμή το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα:

$$I_{\varepsilon\pi} = \frac{E_{\varepsilon\pi}}{R + R_{KL}} \Rightarrow I_{\varepsilon\pi} = \frac{BvL}{R + R_{KL}}$$

Το μέτρο της δύναμης Laplace που θα ασκείται στον αγωγό θα είναι:

$$F_L = BI_{\varepsilon\pi}L \Rightarrow F_L = \frac{B^2 v L^2}{R + R_{KL}}$$

Εφαρμόζοντας τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για τον αγωγό ΑΓ (θεωρώντας ως θετική τη φορά προς τα κάτω) προκύπτει:

$$\Sigma F = ma \Rightarrow F_L + w = ma \Rightarrow$$

$$\alpha = \frac{\frac{B^2 v L^2}{R + R_{KL}} + mg}{m} \quad (1)$$

Από την τελευταία σχέση (1) προκύπτει ότι όσο μειώνεται η ταχύτητα του αγωγού ΑΓ, τόσο θα μειώνεται και το μέτρο της επιβράδυνσής του. Επομένως, ο αγωγός θα εκτελεί επιβραδυνόμενη κίνηση με επιβράδυνση που το μέτρο της συνεχώς μειώνεται μέχρι τη στιγμή που στιγμιαία ακινητοποιείται.

Κάθοδος:

Μετά τη στιγμιαία ακινητοποίησή του, ο αγωγός λόγω του βάρους του θα αρχίσει να κινεί-

ται προς τα κάτω. Η Η.Ε.Δ. από επαγωγή που θα εμφανίζεται στα άκρα του θα έχει διαφορετική πολικότητα από αυτήν της ανόδου, άρα, θα έχει αντίθετη φορά το επαγωγικό ρεύμα όπως και η δύναμη Laplace.

Μια τυχαία χρονική στιγμή το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα:

$$I_{\varepsilon\pi} = \frac{E_{\varepsilon\pi}}{R + R_{\kappa\lambda}} \Rightarrow I_{\varepsilon\pi} = \frac{BvL}{R + R_{\kappa\lambda}}$$

Το μέτρο της δύναμης Laplace που θα ασκείται στον αγωγό θα είναι:

$$F_L = BI_{\varepsilon\pi}L \Rightarrow F_L = \frac{B^2vL^2}{R + R_{\kappa\lambda}}$$

Εφαρμόζοντας τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για τον αγωγό ΚΛ (θεωρώντας ως θετική τη φορά προς τα κάτω) προκύπτει:

$$\Sigma F = ma \Rightarrow w - F_L = ma \Rightarrow$$

$$\alpha = \frac{mg - \frac{B^2vL^2}{R + R_{\kappa\lambda}}}{m} \quad (2)$$

Από την τελευταία σχέση (2) προκύπτει ότι όσο αυξάνεται η ταχύτητα του αγωγού ΚΛ, τόσο θα μειώνεται και το μέτρο της επιτάχυνσής του. Επομένως, **ο αγωγός θα εκτελεί επιταχυνόμενη κίνηση με επιτάχυνση που το μέτρο της συνεχώς μειώνεται μέχρι τη στιγμή που θα μηδενιστεί η επιτάχυνση και πλέον θα κινείται με σταθερή ταχύτητα, την οριακή του ταχύτητα.**

β) Θέτοντας στη σχέση (1) όπου $v = 2\text{ m/s}$ έχουμε:

$$\alpha = \frac{\frac{B^2vL^2}{R + R_{\kappa\lambda}} + mg}{m} \Rightarrow \alpha = 12,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Για το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής του αγωγού, προκύπτει:

$$\frac{dp}{dt} = \Sigma F \quad \text{ή} \quad \frac{dp}{dt} = ma \Rightarrow \frac{dp}{dt} = 1,25 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

γ) Ισχύει:

$$F_L = \frac{B^2vL^2}{R + R_{\kappa\lambda}} \Rightarrow F_L = 0,25 \text{ N}$$

Τελικά έχουμε:

$$P_{F_L} = F_L v \Rightarrow P_{F_L} = 0,5 \text{ W}$$

δ) Θέτοντας στη σχέση (2) όπου $\alpha = 0$ βρίσκουμε το μέτρο της οριακής ταχύτητας του αγωγού. Προκύπτει:

$$v_{op} = \frac{mg(R + R_{\kappa\lambda})}{B^2L^2} \Rightarrow v_{op} = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας για την κίνηση του αγωγού από την αρχική θέση εκτόξευσης μέχρι να επιστρέψει στη θέση αυτή. Ισχύει:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + Q \quad (3)$$

Από τη σχέση (3) προκύπτει ότι το μέτρο της ταχύτητας του αγωγού όταν περνάει ξανά από τη θέση εκτόξευσης είναι $v < v_0 \Rightarrow v < 4 \text{ m/s}$. Επομένως, ο αγωγός αποκτάει την οριακή του ταχύτητα (κατά την κάθοδό του) χαμηλότερα από την αρχική θέση εκτόξευσής του.

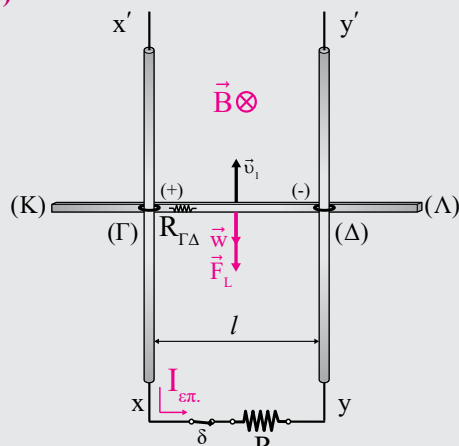
5.119 α) Ισχύει:

$$v_1 = v_0 - gt_1 \Rightarrow v_1 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Η ζητούμενη κινητική ενέργεια του αγωγού είναι:

$$K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 \Rightarrow K_1 = 0,8 \text{ J}$$

β)



Γενικά έχουμε:

$$E_{\text{επ}} = BvL$$

Προκύπτει:

$$E_{\text{επ},1} = Bv_1 l \Rightarrow E_{\text{επ},1} = 4V$$

Επίσης ισχύει:

$$\frac{R_{\text{ΚΛ}}}{R_{\Gamma\Delta}} = \frac{L}{l} \text{ ή } R_{\Gamma\Delta} = \frac{R_{\text{ΚΛ}}}{2} \Rightarrow R_{\Gamma\Delta} = 2\Omega$$

Η ένταση του επαγωγικού ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα, αμέσως μετά το κλείσιμο του διακόπτη, είναι:

$$I_{\text{επ},1} = \frac{E_{\text{επ},1}}{R + R_{\Gamma\Delta}} \Rightarrow I_{\text{επ},1} = 1A$$

γ) Ισχύει:

$$v_2 = \frac{v_1}{2} \Rightarrow v_2 = 2 \frac{m}{s}$$

Έχουμε:

$$I_{\text{επ},2} = \frac{E_{\text{επ},2}}{R + R_{\Gamma\Delta}} \Rightarrow I_{\text{επ},2} = \frac{Bv_2 l}{R + R_{\Gamma\Delta}} \Rightarrow I_{\text{επ},2} = 0,5A$$

Ισχύει:

$$F_{L,2} = BI_{\text{επ},2} l \Rightarrow F_{L,2} = 0,5N$$

Εφαρμόζοντας τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για τον αγωγό ΚΛ τη χρονική στιγμή t_2 , προκύπτει:

$$\Sigma F = m\alpha_2 \Rightarrow -F_{L,2} - w = m\alpha_2 \Rightarrow$$

$$\alpha_2 = \frac{-F_{L,2} - mg}{m} \Rightarrow \alpha_2 = -15 \frac{m}{s^2}$$

δ) Εφαρμόζοντας τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για τον αγωγό ΚΛ τη χρονική στιγμή t_3 , προκύπτει:

$$\Sigma F = m\alpha_3 \Rightarrow -F_{L,3} - w = m\alpha_3 \Rightarrow$$

$$-\frac{B^2 v_3 l^2}{R + R_{\Gamma\Delta}} - mg = m\alpha_3 \Rightarrow$$

$$v_3 = \frac{m(-\alpha_3 - g)(R + R_{\Gamma\Delta})}{B^2 l^2} \Rightarrow v_3 = 1 \frac{m}{s}$$

Έχουμε:

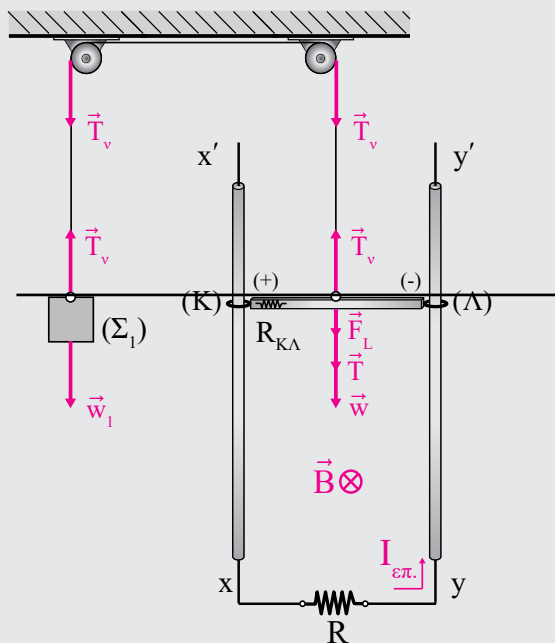
$$I_{\text{επ},3} = \frac{E_{\text{επ},3}}{R + R_{\Gamma\Delta}} \Rightarrow I_{\text{επ},3} = \frac{Bv_3 l}{R + R_{\Gamma\Delta}} \Rightarrow I_{\text{επ},3} = 0,25A$$

Τελικά προκύπτει:

$$V_{\text{ΚΛ}} = E_{\text{επ},\text{ΚΛ}} - I_{\text{επ},3} R_{\Gamma\Delta} \Rightarrow V_{\text{ΚΛ}} = Bv_3 l - I_{\text{επ},3} R_{\Gamma\Delta} \Rightarrow$$

$$V_{\text{ΚΛ}} = 1,5V$$

5.120 α)



Για το σώμα Σ_1 ισχύει:

$$\Sigma F_y = m_1 \alpha \Rightarrow w_1 - T_v = m_1 \alpha \Rightarrow$$

$$m_1 g - T_v = m_1 \alpha (1)$$

Μια τυχαία χρονική στιγμή $t > t_0$ το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα:

$$I_{\text{επ}} = \frac{E_{\text{επ}}}{R + R_{\text{ΚΛ}}} \Rightarrow I_{\text{επ}} = \frac{BvL}{R + R_{\text{ΚΛ}}}$$

Το μέτρο της δύναμης Laplace που θα ασκείται στη ράβδο ΚΛ θα είναι:

$$F_L = BI_{\text{επ}} L \Rightarrow F_L = \frac{B^2 v L^2}{R + R_{\text{ΚΛ}}}$$

Εφαρμόζοντας τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για τη ράβδο ΚΛ προκύπτει:

$$\Sigma F_y = m\alpha \Rightarrow T_v - F_L - T - w = m\alpha \Rightarrow$$

$$T_v - \frac{B^2 v L^2}{R + R_{\text{ΚΛ}}} - T - mg = m\alpha (2)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) έχουμε:

$$\alpha = \frac{(m_1 - m)g - \frac{B^2 v L^2}{R + R_{\text{ΚΛ}}} - T}{m + m_1} \quad (3)$$

Από την τελευταία σχέση (3) προκύπτει ότι όσο αυξάνεται η ταχύτητα της ράβδου ΚΛ, τόσο θα μειώνεται και το μέτρο της επιτάχυνσής της. Επομένως, **η ράβδος θα εκτελεί επιταχυνόμενη κίνηση με επιτάχυνση που το μέτρο της συνεχώς μειώνεται μέχρι τη στιγμή που θα μηδενιστεί η επιτάχυνση και πλέον θα κινείται με σταθερή ταχύτητα, την οριακή της ταχύτητα.**

β) Θέτοντας στη σχέση (3) όπου $\alpha = 0$ βρίσκουμε το μέτρο της οριακής ταχύτητας του αγωγού. Προκύπτει:

$$\begin{aligned} \frac{B^2 v_{\text{op}} L^2}{R + R_{\text{ΚΛ}}} &= (m_1 - m)g - T \Rightarrow \\ v_{\text{op}} &= \frac{(R + R_{\text{ΚΛ}})}{B^2 L^2} [(m_1 - m)g - T] \Rightarrow \\ v_{\text{op}} &= 16 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

γ) Ισχύει:

$$F_{L,1} = \frac{B^2 \frac{v_{\text{op}}}{2} L^2}{R + R_{\text{ΚΛ}}} \Rightarrow F_{L,1} = 2\text{N}$$

Τελικά προκύπτει:

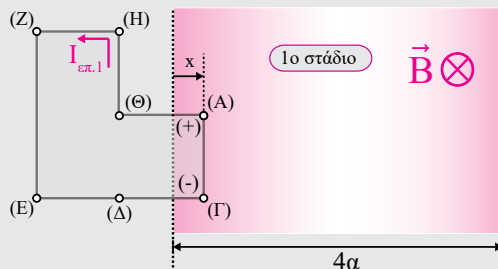
$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= m \left[\frac{(m_1 - m)g - \frac{B^2 v_{\text{op}} L^2}{R + R_{\text{ΚΛ}}} - T}{m + m_1} \right] \Rightarrow \\ \frac{dp}{dt} &= \frac{2}{3} \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{aligned}$$

δ) Ο ζητούμενος ρυθμός ανάπτυξης θερμικής ενέργειας, λόγω τριβών, είναι:

$$\frac{dQ}{dt} = \left| T \frac{v_{\text{op}}}{2} \right| \Rightarrow \frac{dQ}{dt} = 48 \frac{\text{J}}{\text{s}}$$

5.121 α)

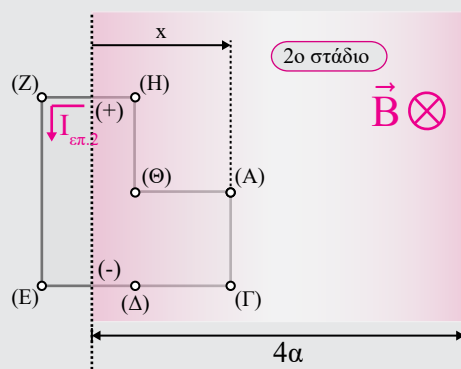
1^ο στάδιο: $0 \leq t < \frac{\alpha}{v}$ ή $0 \leq t < 2s$



Ισχύει:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= BA_1 \Rightarrow \Phi_1 = Bax \Rightarrow \\ \Phi_1 &= B\alpha v t \Rightarrow \Phi_1 = 0,25t \text{ (S.I.)} \end{aligned}$$

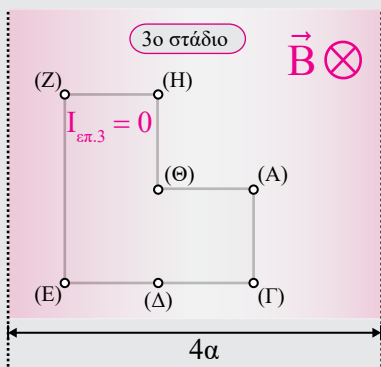
2^ο στάδιο: $\frac{\alpha}{v} \leq t < \frac{2\alpha}{v} \Rightarrow 2s \leq t < 4s$



Ισχύει:

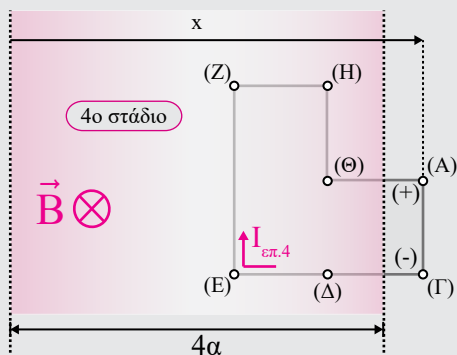
$$\begin{aligned} \Phi_2 &= BA_2 \Rightarrow \\ \Phi_2 &= B\alpha^2 + 2\alpha Bv \left(t - \frac{\alpha}{v} \right) \Rightarrow \\ \Phi_2 &= 0,5t - 0,5 \text{ (S.I.)} \end{aligned}$$

3^ο στάδιο: $\frac{2\alpha}{v} \leq t < \frac{4\alpha}{v} \Rightarrow 4s \leq t < 8s$



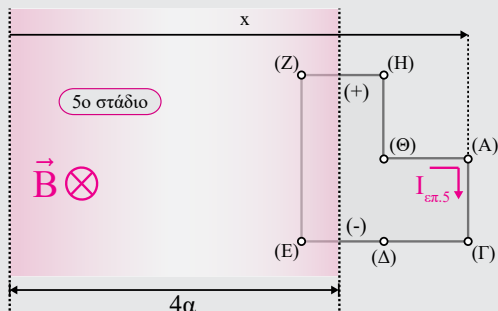
$$\Phi_3 = BA_3 \Rightarrow \Phi_3 = 3B\alpha^2 \Rightarrow \Phi_3 = 1,5\text{Wb (S.I.)}$$

$$4^\circ \text{ στάδιο: } \frac{4\alpha}{v} \leq t < \frac{5\alpha}{v} \Rightarrow 8\text{s} \leq t < 10\text{s}$$



$$\Phi_4 = BA_4 \Rightarrow \Phi_4 = 3B\alpha^2 - \alpha Bv \left(t - \frac{4\alpha}{v} \right) \Rightarrow \Phi_4 = 3,5 - 0,25t \text{ (S.I.)}$$

$$5^\circ \text{ στάδιο: } \frac{5\alpha}{v} \leq t < \frac{6\alpha}{v} \Rightarrow 10\text{s} \leq t < 12\text{s}$$

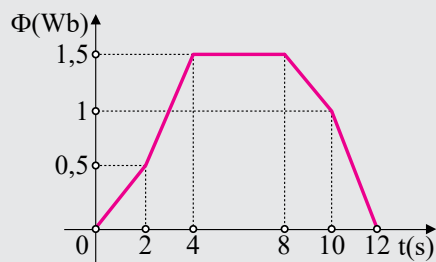


$$\Phi_5 = BA_5 \Rightarrow$$

$$\Phi_5 = 2B\alpha^2 - 2\alpha Bv \left(t - \frac{5\alpha}{v} \right) \Rightarrow$$

$$\Phi_5 = 6 - 0,5t \text{ (S.I.)}$$

Το ζητούμενο διάγραμμα είναι το εξής:



β) 1° στάδιο: $0 \leq t < \frac{\alpha}{v} \Rightarrow 0 \leq t < 2\text{s}$

Ισχύει:

$$E_{\epsilon\pi,1} = -\frac{d\Phi_1}{dt} \Rightarrow E_{\epsilon\pi,1} = -0,25\text{V}$$

2° στάδιο: $\frac{\alpha}{v} \leq t < \frac{2\alpha}{v} \Rightarrow 2\text{s} \leq t < 4\text{s}$

$$E_{\epsilon\pi,2} = -\frac{d\Phi_2}{dt} \Rightarrow E_{\epsilon\pi,2} = -0,5\text{V}$$

3° στάδιο: $\frac{2\alpha}{v} \leq t < \frac{4\alpha}{v} \Rightarrow 4\text{s} \leq t < 8\text{s}$

$$E_{\epsilon\pi,3} = -\frac{d\Phi_3}{dt} \Rightarrow E_{\epsilon\pi,3} = 0$$

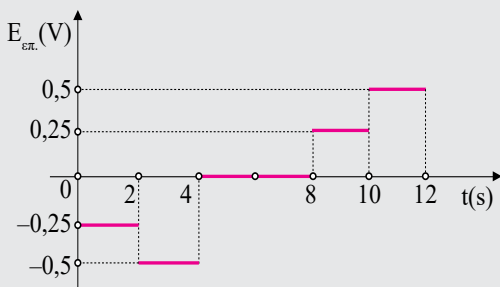
4° στάδιο: $\frac{4\alpha}{v} \leq t < \frac{5\alpha}{v} \Rightarrow 8\text{s} \leq t < 10\text{s}$

$$E_{\epsilon\pi,4} = -\frac{d\Phi_4}{dt} \Rightarrow E_{\epsilon\pi,4} = 0,25\text{V}$$

5° στάδιο: $\frac{5\alpha}{v} \leq t < \frac{6\alpha}{v} \Rightarrow 10\text{s} \leq t < 12\text{s}$

$$E_{\epsilon\pi,5} = -\frac{d\Phi_5}{dt} \Rightarrow E_{\epsilon\pi,5} = 0,5\text{V}$$

Το ζητούμενο διάγραμμα είναι το εξής:



γ) Προκύπτει:

$$R = R^* 8\alpha \Rightarrow R = 2\Omega$$

1° στάδιο: $0 \leq t < \frac{\alpha}{v} \Rightarrow 0 \leq t < 2$ s

Ισχύει:

$$I_{\text{επ.1}} = \frac{E_{\text{επ.1}}}{R} \Rightarrow I_{\text{επ.1}} = -0,125\text{A}$$

2° στάδιο: $\frac{\alpha}{v} \leq t < \frac{2\alpha}{v} \Rightarrow 2\text{s} \leq t < 4$ s

Ισχύει:

$$I_{\text{επ.2}} = \frac{E_{\text{επ.2}}}{R} \Rightarrow I_{\text{επ.2}} = -0,25\text{A}$$

3° στάδιο: $\frac{2\alpha}{v} \leq t < \frac{4\alpha}{v} \Rightarrow 4\text{s} \leq t < 8$ s

Ισχύει:

$$I_{\text{επ.3}} = \frac{E_{\text{επ.3}}}{R} \Rightarrow I_{\text{επ.3}} = 0$$

4° στάδιο: $\frac{4\alpha}{v} \leq t < \frac{5\alpha}{v} \Rightarrow 8\text{s} \leq t < 10$ s

Ισχύει:

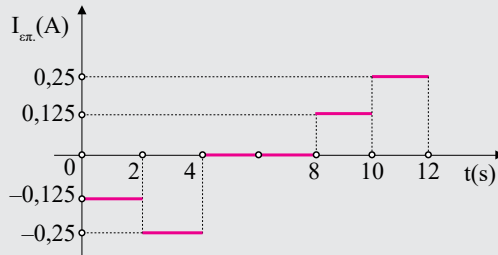
$$I_{\text{επ.4}} = \frac{E_{\text{επ.4}}}{R} \Rightarrow I_{\text{επ.4}} = 0,125\text{A}$$

5° στάδιο: $\frac{5\alpha}{v} \leq t < \frac{6\alpha}{v} \Rightarrow 10\text{s} \leq t < 12$ s

Ισχύει:

$$I_{\text{επ.5}} = \frac{E_{\text{επ.5}}}{R} \Rightarrow I_{\text{επ.5}} = 0,25\text{A}$$

Το ζητούμενο διάγραμμα είναι το εξής:



δ) 1° στάδιο: $0 \leq t < \frac{\alpha}{v} \Rightarrow 0 \leq t < 2$ s

Ισχύει:

$$q_{\text{επ.1}} = I_{\text{επ.1}} \cdot \Delta t \Rightarrow q_{\text{επ.1}} = -0,25\text{C}$$

2° στάδιο: $\frac{\alpha}{v} \leq t < \frac{2\alpha}{v} \Rightarrow 2\text{s} \leq t < 4$ s

$$q_{\text{επ.2}} = I_{\text{επ.2}} \cdot \Delta t \Rightarrow q_{\text{επ.2}} = -0,5\text{C}$$

3° στάδιο: $\frac{2\alpha}{v} \leq t < \frac{4\alpha}{v} \Rightarrow 4\text{s} \leq t < 8$ s

$$q_{\text{επ.3}} = I_{\text{επ.3}} \cdot \Delta t \Rightarrow q_{\text{επ.3}} = 0$$

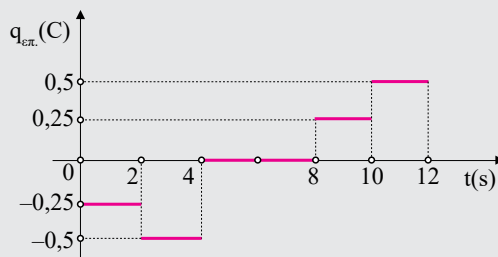
4° στάδιο: $\frac{4\alpha}{v} \leq t < \frac{5\alpha}{v} \Rightarrow 8\text{s} \leq t < 10$ s

$$q_{\text{επ.4}} = I_{\text{επ.4}} \cdot \Delta t \Rightarrow q_{\text{επ.4}} = 0,25\text{C}$$

5° στάδιο: $\frac{5\alpha}{v} \leq t < \frac{6\alpha}{v} \Rightarrow 10\text{s} \leq t < 12$ s

$$q_{\text{επ.5}} = I_{\text{επ.5}} \cdot \Delta t \Rightarrow q_{\text{επ.5}} = 0,5\text{C}$$

Το ζητούμενο διάγραμμα είναι το εξής:



5.122 α) Για την περίοδο του εναλλασσόμενου ρεύματος, έχουμε:

$$\Delta t = \frac{T}{4} \Rightarrow T = 4 \cdot \Delta t \Rightarrow T = 100 \text{ ms}$$

β) Για τη μέση ισχύ έχουμε:

$$\bar{P} = V_{\text{επ.}} I_{\text{επ.}} \Rightarrow \bar{P} = \frac{VI}{2} \quad (1)$$

Για τη στιγμιαία ισχύ προκύπτει:

$$p = vi \Rightarrow p = VI \cdot \eta \mu^2 \omega t \Rightarrow p = 2\bar{P} \cdot \eta \mu^2 \omega t \quad (2)$$

Από τη σχέση (2) προκύπτει:

$$p_{\text{max}} = 2\bar{P} \Rightarrow p_{\text{max}} = 400 \text{ W}$$

γ) Η συχνότητα του εναλλασσόμενου ρεύματος είναι:

$$f = \frac{1}{T} \Rightarrow f = 10 \text{ Hz}$$

Η συχνότητα που έχει η στιγμιαία ισχύς είναι:

$$f' = 2f \Rightarrow f' = 20 \text{ Hz}$$

δ) Η χρονική στιγμή που η στιγμιαία ισχύς γίνεται μέγιστη για 3^η φορά είναι:

$$t_1 = \frac{5T}{4} \Rightarrow t_1 = 125 \text{ ms}$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε και τη χρονική στιγμή t_2 που η στιγμιαία ισχύς γίνεται ίση με 200 W για 3^η φορά. Προκύπτει:

$$p = 2\bar{P} \cdot \eta \mu^2 \omega t \Rightarrow$$

$$200 = 400 \cdot \eta \mu^2 \omega t_2 \Rightarrow \eta \mu \omega t_2 = \frac{-\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$\omega t_2 = \frac{5\pi}{4} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} t_2 = \frac{5\pi}{4} \Rightarrow t_2 = \frac{5T}{8} \Rightarrow$$

$$t_2 = 62,5 \text{ ms}$$

5.123 α) Από τη χρονική στιγμή $t = 0$ και μετά, ο αγωγός αρχίζει να επιταχύνεται προς τα δεξιά λόγω της δύναμης $\vec{F}$. Έτσι, στα άκρα του αγωγού ΚΛ αναπτύσσεται τάση από επαγωγή με μέτρο:

$$E_{\text{επ.}} = BvI \quad (1)$$

και πολικότητας που φαίνεται στο σχήμα.

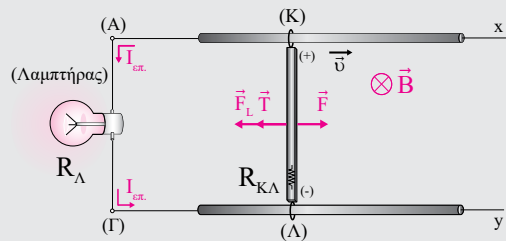
Το κλειστό κύκλωμα ΚΑΓΛΚ διαρρέεται από επαγωγικό ρεύμα έντασης:

$$I_{\text{επ.}} = \frac{E_{\text{επ.}}}{R_{\text{ολ.}}} \Rightarrow I_{\text{επ.}} = \frac{BvI}{R_{\Lambda} + R_{\text{ΚΛ}}} \quad (2)$$

και φοράς που φαίνεται στο σχήμα.

Ο αγωγός ΚΛ διαρρέεται από επαγωγικό ρεύμα και βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης $\vec{B}$, οπότε ασκείται σε αυτό δύναμη Laplace μέτρου:

$$F_L = BI_{\text{επ.}} l \Rightarrow F_L = \frac{B^2 l^2 v}{R_{\Lambda} + R_{\text{ΚΛ}}} \quad (3)$$



Τη χρονική στιγμή t_1 που ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας του αγωγού γίνεται μηδέν, ο αγωγός αποκτά οριακή (σταθερή) ταχύτητα αφού εκείνη τη στιγμή ισχύει $\Sigma F = 0$.

Για την ταχύτητα του αγωγού εκείνη τη χρονική t_1 έχουμε:

$$K = \frac{1}{2} m v_{\text{op.}}^2 \Rightarrow v_{\text{op.}} = \sqrt{\frac{2K}{m}} \Rightarrow v_{\text{op.}} = 12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Η τάση από επαγωγή που αναπτύσσεται στα άκρα του αγωγού ΚΛ τη χρονική t_1 είναι:

$$E_{\text{επ.}} = Bv_{\text{op.}} l \Rightarrow E_{\text{επ.}} = 12 \text{ V}$$

β) Τη χρονική στιγμή t_1 η δύναμη Laplace που δέχεται ο αγωγός έχει μέτρο:

$$(3) \Rightarrow F_L = \frac{B^2 l^2 v_{\text{op.}}}{R_{\Lambda} + R_{\text{ΚΛ}}} \Rightarrow F_L = 3 \text{ N}$$

Επειδή το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$ είναι $F = 5 \text{ N} > F_L$ θα πρέπει να του ασκείται δύναμη ομόρροπη της δύναμης Laplace αφού εκείνη τη στιγμή πρέπει $\Sigma F = 0$. Η δύναμη αυτή είναι η τριβή.

Για το μέτρο της ισχύει:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F - T - F_L = 0 \Rightarrow T = F - F_L \Rightarrow T = 2N$$

γ) Αφού ο λαμπτήρας λειτουργεί κανονικά από τη χρονική στιγμή t_1 και μετά, το ρεύμα που τον διαρρέει θα είναι το ρεύμα κανονικής λειτουργίας.

$$(2) \Rightarrow I_K = I_{\text{επ.}} = \frac{Bv_{\text{op.}} l}{R_A + R_{KL}} \Rightarrow I_K = 3A$$

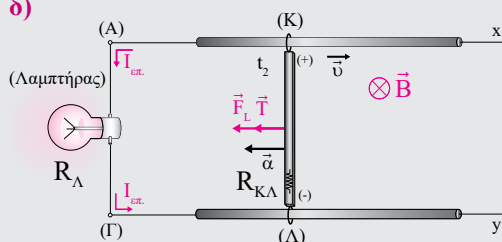
Για την τάση κανονικής λειτουργίας του λαμπτήρα έχουμε:

$$V_K = I_K R_A \Rightarrow V_K = 9V$$

Για την ισχύ κανονικής λειτουργίας του λαμπτήρα έχουμε:

$$P_K = V_K I_K \Rightarrow P_K = 27W$$

δ)



Τη χρονική στιγμή t_3 η ταχύτητα του αγωγού έχει μέτρο ίσο με το 50% του μέτρου που είχε τη χρονική στιγμή t_2 άρα:

$$v = 50\% \cdot v_{\text{op.}} \Rightarrow v = 6 \frac{m}{s}$$

Επειδή ο αγωγός συνεχίζει να κινείται αλλά επιβραδυνόμενος, στα άκρα του υπάρχει πάλι τάση από επαγωγή, το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα και του ασκείται και δύναμη Laplace. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του αγωγού τη χρονική στιγμή t_3 είναι:

$$\frac{\Delta K}{\Delta t} = \Sigma F \cdot v = (-F_L - T) \cdot v = \left(-\frac{B^2 l^2 v}{R_A + R_{KL}} - T \right) \cdot v \Rightarrow \frac{\Delta K}{\Delta t} = -21 J/s$$

ε) Ο ρυθμός με τον οποίο παράγεται θερμότητα, λόγω φαινομένου Joule, στις αντιστάσεις τη χρονική στιγμή t_3 είναι:

$$\frac{\Delta Q_{R_{\text{ολ.}}}}{\Delta t} = P_{R_{\text{ολ.}}} = I_{\text{επ.}}^2 \cdot R_{\text{ολ.}} = I_{\text{επ.}}^2 \cdot (R_A + R_{KL})$$

Όμως:

$$I_{\text{επ.}} = \frac{Bvl}{R_A + R_{KL}} = 1,5A$$

άρα:

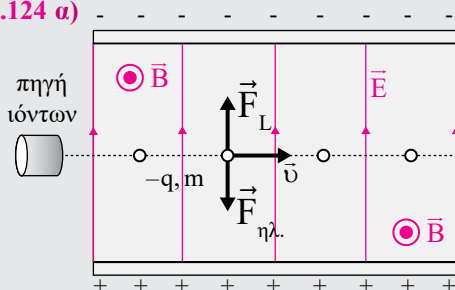
$$\frac{\Delta Q_{R_{\text{ολ.}}}}{\Delta t} = I_{\text{επ.}}^2 \cdot (R_A + R_{KL}) \Rightarrow \frac{\Delta Q_{R_{\text{ολ.}}}}{\Delta t} = 9 J/s$$

Ο ρυθμός με τον οποίο παράγεται θερμότητα λόγω της τριβής του αγωγού με τις δύο οριζόντιες παράλληλες μεταλλικές αγωγίμες ράβδους είναι:

$$\frac{\Delta Q_T}{\Delta t} = T \cdot v \Rightarrow \frac{\Delta Q_T}{\Delta t} = 12 J/s$$

$$\text{Προφανώς ισχύει } \left| \frac{\Delta K}{\Delta t} \right| = \frac{\Delta Q_{R_{\text{ολ.}}}}{\Delta t} + \frac{\Delta Q_T}{\Delta t}$$

5.124 α)



Το αρνητικά φορτισμένο σωματίδιο δέχεται δύο δυνάμεις, μια από κάθε πεδίο, καθώς διέρχεται από το φίλτρο ταχυτήτων. Αφού δεν αποκλίνει από την ευθύγραμμη τροχιά του, οι δύο δυνάμεις πρέπει να έχουν αντίθετη φορά και ίσα μέτρα. Από το ηλεκτρικό πεδίο δέχεται δύναμη $\vec{F}_{\eta\lambda.}$ αντίρροπη στις δυνάμεις του γραμμές (αφού είναι αρνητικό) και μέτρου:

$$E = \frac{F_{\eta\lambda.}}{|q|} \Rightarrow F_{\eta\lambda.} = E \cdot |q|$$

Από το μαγνητικό πεδίο δέχεται δύναμη $\vec{F}_L$ αντίρροπη της δύναμης $\vec{F}_{\eta\lambda.}$ και μέτρου:

$$F_L = Bv|q| \sin 90^\circ \Rightarrow F_L = Bv|q|$$

Με βάση τον κανόνα των τριών δακτύλων του δεξιού χεριού για τη δύναμη Lorentz, η φορά

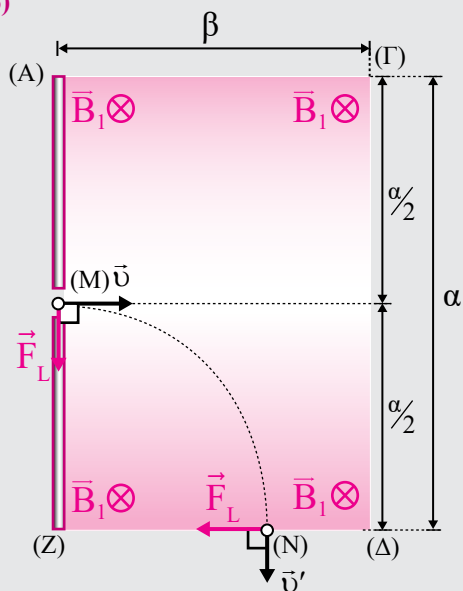
της έντασης του μαγνητικού πεδίου $\vec{B}$ του φίλτρου ταχυτήτων είναι **κάθετη στο επίπεδο της σελίδας και έχει φορά προς τα έξω** όπως φαίνεται στο σχήμα.

Για το μέτρο αυτής της έντασης του μαγνητικού πεδίου $\vec{B}$, εξισώνοντας τη μαγνητική με την ηλεκτρική δύναμη, έχουμε:

$$F_{\eta\lambda.} = F_L \Rightarrow E|q| = Bv|q| \Rightarrow B = \frac{E}{v} \Rightarrow$$

$$B = 0,2T$$

β)



Όταν το αρνητικά φορτισμένο σωματίδιο εξέρθει από το φίλτρο ταχυτήτων, εισέρχεται στο μαγνητικό πεδίο έντασης $\vec{B}_1$ και εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση διαγράφοντας τεταρτοκύκλιο ακτίνας $R = \frac{\alpha}{2}$ αφού οι φορείς των δυνάμεων Lorentz στα σημεία εισόδου και εξόδου (M), (N) είναι κάθετοι μεταξύ τους. Για την ακτίνα της κυκλικής τροχιάς μέσα στο μαγνητικό πεδίο έχουμε:

$$R = \frac{mv}{B_1|q|} \Rightarrow R = 0,05m = 5cm$$

Έτσι το μήκος της πλευράς α του ορθογωνίου (ΑΓΔΖ) είναι:

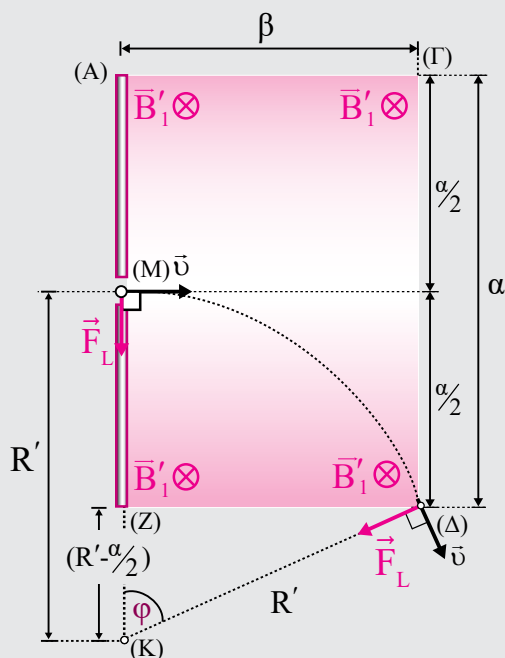
$$\alpha = 2R \Rightarrow \alpha = 10cm$$

γ) Για τον υπολογισμό του κέντρου (Κ) την νέας κυκλικής τροχιάς του αρνητικά φορτισμένου σωματιδίου μέσα στο μαγνητικό πεδίο που επικρατεί στην περιοχή (ΑΓΔΖ), σχεδιάζουμε τις δυνάμεις Lorentz στα σημεία εισόδου και εξόδου (M) και (Δ) αντίστοιχα. Το σημείο τομής τους είναι το κέντρο (Κ). Για τη νέα ακτίνα της κυκλικής τροχιάς εφαρμόζουμε το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο (ΖΔΚ). Έχουμε:

$$(K\Delta)^2 = (KZ)^2 + (Z\Delta)^2 \Rightarrow$$

$$R'^2 = \left(R' - \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \beta^2 \Rightarrow$$

$$R'^2 = \left(R' - \frac{10}{2}\right)^2 + (5\sqrt{3})^2 \Rightarrow R' = 10cm$$



Για το μέτρο της νέας έντασης B'_1 του μαγνητικού πεδίου έχουμε:

$$R' = \frac{mv}{B'_1|q|} \Rightarrow B'_1 = \frac{mv}{R'|q|} \Rightarrow B'_1 = 0,2T$$

Το ποσοστό μεταβολής του μέτρου της έντασης του μαγνητικού πεδίου B_1 είναι:

$$\Pi\% = \frac{B'_1 - B_1}{B_1} \cdot 100\% \Rightarrow \Pi\% = -50\%$$

δ) Το φορτισμένο σωματίδιο, κατά την κίνησή του στο φίλτρο ταχυτήτων και μέχρι να εισέρθει από το σημείο (Μ) στην περιοχή που επικρατεί το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}_1$, εκτελεί ευθύγραμμή ομαλή κίνηση με ταχύτητα μέτρου $v = 4 \cdot 10^4 \text{ m/s}$. Για το χρονικό διάστημα Δt_1 ισχύει:

$$L = v \cdot \Delta t_1 \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{L}{v} \Rightarrow \Delta t_1 = 1,5 \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

Το φορτισμένο σωματίδιο, κατά την κίνησή του στην περιοχή που επικρατεί το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}'_1$, εκτελεί τμήμα κυκλικής κίνησης τόξου ($\widehat{ΜΔ}$) που βαίνει σε επίκεντρη γωνία φ όπως φαίνεται στο σχήμα. Για τη γωνία φ στο ορθογώνιο τρίγωνο ($ΖΔΚ$), έχουμε:

$$\eta\mu\varphi = \frac{\beta}{R'} = \frac{5\sqrt{3}}{10} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = 60^\circ$$

Για το χρονικό διάστημα Δt_2 μέσα στην περιοχή που επικρατεί το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}'_1$, ισχύει:

$$\Delta t_2 = T \cdot \frac{60^\circ}{360^\circ} = \frac{T}{6}$$

όπου T η περίοδος της κυκλικής του τροχιάς. Όμως:

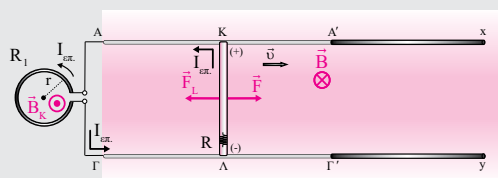
$$T = \frac{2\pi m}{B'_1 |q|} \Rightarrow T = 5\pi \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

$$\text{Άρα: } \Delta t_2 = \frac{T}{6} \Rightarrow \Delta t_2 = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

Τελικά για το χρονικό διάστημα από τη στιγμή που μπήκε το φορτισμένο σωματίδιο στο φίλτρο ταχυτήτων και μέχρι να εξέρθει από το σημείο (Δ) του μαγνητικού πεδίου $\vec{B}'_1$, ισχύει:

$$\Delta t_{\text{ολ.}} = \Delta t_1 + \Delta t_2 \Rightarrow \Delta t_{\text{ολ.}} = 4 \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

5.125 α) Λόγω της κίνησης του αγωγού ΚΛ και αφού αυτός βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο κάθετα στις δυναμικές του γραμμές, στα άκρα του αναπτύσσεται ηλεκτρεγερτική δύναμη από επαγωγή.



$$E_{\text{επ.}} = Bv \Rightarrow E_{\text{επ.}} = 10 \text{ V}$$

β) Η τάση αυτή θα έχει ως αποτέλεσμα ο αγωγός ΚΛ αλλά και ο κυκλικός αγωγός να διαρρέονται από ρεύμα (επαγωγικό):

$$I_{\text{επ.}} = \frac{E_{\text{επ.}}}{R_{\text{ολ.}}} = \frac{E_{\text{επ.}}}{R + R_1} \Rightarrow I_{\text{επ.}} = 2 \text{ A}$$

Το μέτρο της έντασης $\vec{B}_K$ του μαγνητικού πεδίου στο κέντρο του κυκλικού αγωγού είναι:

$$B_K = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2\pi I_{\text{επ.}}}{r} \Rightarrow B_K = 2\pi \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

γ) Επειδή ο αγωγός ΚΛ διαρρέεται από ρεύμα και βρίσκεται μέσα σε Ο.Μ.Π. θα του ασκηθεί δύναμη Laplace:

$$F_L = BI_{\text{επ.}}L \Rightarrow F_L = 2 \text{ N}$$

Η φορά του ρεύματος σύμφωνα με τον κανόνα του Lenz θα πρέπει να αντιτίθεται στο αίτιο που το προκάλεσε. Το ρεύμα το προκάλεσε η κίνηση του αγωγού προς τα δεξιά, άρα, η δύναμη Laplace (που οφείλεται με τη σειρά της στο ρεύμα που διαρρέει τον αγωγό) πρέπει να είναι προς τα αριστερά οπότε με τον κανόνα των τριών δακτύλων του δεξιού χεριού βρίσκουμε τη φορά του ρεύματος, άρα και την πολικότητα στα άκρα του αγωγού ΚΛ όπως φαίνεται στο σχήμα.

Για να κινείται ο αγωγός ΚΛ με σταθερή ταχύτητα πρέπει σύμφωνα με τον 1^ο νόμο του Νεύτωνα:

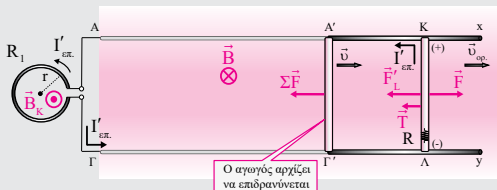
$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F = F_L \Rightarrow F = 2 \text{ N}$$

δ) Τη χρονική στιγμή που ο αγωγός έρχεται σε επαφή με τα κομμάτια Α'x και Γ'y των δύο οριζόντιων οδηγών αρχίζει να επιβραδύνεται αφού $\Sigma F = F - T - F_L < 0$.

Άρα:

$$v \downarrow \Rightarrow E_{\text{επ.}} \downarrow \Rightarrow I_{\text{επ.}} \downarrow \Rightarrow F_L \downarrow \Rightarrow \Sigma F \downarrow \Rightarrow a \downarrow$$

Η κίνηση που θα εκτελέσει ο αγωγός είναι ευθύγραμμη επιβραδυνόμενη με συνεχώς μειούμενη επιτάχυνση. Κάποια στιγμή η επιτάχυνση θα γίνει μηδέν (όταν $\Sigma F = 0$) οπότε από εκεί και μετά ο αγωγός θα εκτελέσει Ευθύγραμμη Ομαλή Κίνηση με σταθερή (οριακή) ταχύτητα η οποία θα είναι και η ελάχιστη ταχύτητα που θα έχει ο αγωγός ΚΛ σε όλη τη διάρκεια της κίνησής του. Τότε, το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου στο κέντρο του κυκλικού αγωγού θα έχει πάρει την ελάχιστη τιμή του.



Στην περίπτωση που το μέτρο της έντασης $\vec{B}'_K$ του μαγνητικού πεδίου στο κέντρο του κυκλικού αγωγού είναι $B'_K = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ T}$ έχουμε:

$$B'_K = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2\pi I'_{\text{επ.}}}{r} \Rightarrow I'_{\text{επ.}} = \frac{B'_K \cdot r}{2\pi \frac{\mu_0}{4\pi}} \Rightarrow I'_{\text{επ.}} = 1,5 \text{ A}$$

$$F'_L = BI'_{\text{επ.}} L \Rightarrow F'_L = 1,5 \text{ N}$$

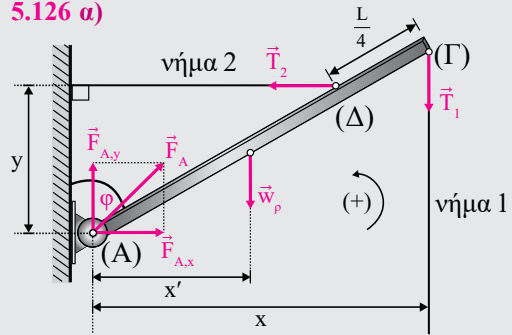
1ος νόμος του Νεύτωνα:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F = F'_L + T \Rightarrow T = F - F'_L \Rightarrow T = 0,5 \text{ N}$$

Όμως ισχύει:

$$I'_{\text{επ.}} = \frac{E'_{\text{επ.}}}{R_{\text{ολ.}}} = \frac{B v_{\text{οπ.}} L}{R + R_1} \Rightarrow v_{\text{οπ.}} = \frac{I'_{\text{επ.}} (R + R_1)}{BL} \Rightarrow v_{\text{οπ.}} = 7,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

5.126 α)



Αφού η ράβδος ισορροπεί πρέπει η συνισταμένη των ροπών ως προς οποιοδήποτε σημείο της να είναι μηδέν καθώς και η συνισταμένη των δυνάμεων σε κάθε άξονα. Έχουμε:

$$\Sigma \tau_{(A)} = 0 \Rightarrow -T_1 x - w_p x' + T_2 y = 0 \Rightarrow$$

$$-T_1 L \eta \mu \phi - Mg \frac{L}{2} \eta \mu \phi + T_2 \frac{3L}{4} \sigma \upsilon \nu \phi = 0 \Rightarrow$$

$$-T_1 \eta \mu \phi - Mg \frac{1}{2} \eta \mu \phi + T_2 \frac{3}{4} \sigma \upsilon \nu \phi = 0 \Rightarrow$$

$$T_1 = 3 \text{ N}$$

Άξονας x:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_{A,x} = T_2 \Rightarrow F_{A,x} = 8 \text{ N}$$

Άξονας y:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{A,y} = Mg + T_1 \Rightarrow F_{A,y} = 6 \text{ N}$$

$$F_A = \sqrt{F_{A,x}^2 + F_{A,y}^2} \Rightarrow F_A = 10 \text{ N}$$

β) Υπολογίζουμε την ολική αντίσταση του κυκλώματος. Οι αντιστάσεις R_1 και R_2 είναι συνδεδεμένες παράλληλα και ο συνδυασμός τους σε σειρά με την αντίσταση r. Έχουμε:

$$R_{\text{ολ.}} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} + r \Rightarrow R_{\text{ολ.}} = 0,25 \Omega$$

Το ολικό ρεύμα που δίνει η πηγή στο κύκλωμα είναι:

$$I = \frac{E}{R_{\text{ολ.}}} \Rightarrow I = 16 \text{ A}$$

Για τον υπολογισμό του ρεύματος που διαρρέει τον αγωγό έχουμε:

$$V_1 = V_2 \Rightarrow I_1 R_1 = I_2 R_2 \Rightarrow I_1 = 3 I_2$$

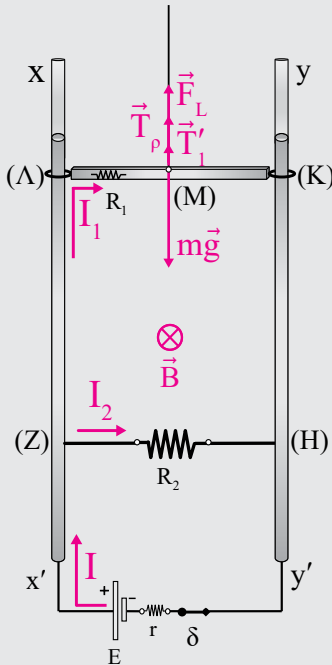
$$\text{Όμως } I = I_1 + I_2 \Rightarrow I_2 = \frac{I}{4} = 4 \text{ A}$$

άρα: $I_1 = 12\text{A}$

Αφού ο αγωγός ΚΛ διαρρέεται από ρεύμα και βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο δέχεται δύναμη Laplace με μέτρο:

$$F_L = BI_1l \Rightarrow F_L = 12\text{N}$$

και φοράς προς τα πάνω όπως προσδιορίζεται με τον κανόνα των τριών δακτύλων του δεξιού χεριού.



Παρατηρούμε ότι:

$$mg > F_L + T'_1$$

οπότε πρέπει ο αγωγός να δέχεται δύναμη τριβής η οποία είναι ίση με την οριακή επειδή ο αγωγός ΚΛ οριακά δεν ολισθαίνει στην κατάσταση ισορροπίας του.

Από την ισορροπία των δυνάμεων για τον αγωγό ΚΛ έχουμε:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow mg = F_L + T'_1 + T_p \Rightarrow T_p = 5\text{N}$$

γ) Τη χρονική στιγμή $t = 0$ που ανοίγουμε τον διακόπτη, η δύναμη Laplace μηδενίζεται αφού ο αγωγός ΚΛ δεν διαρρέεται από ρεύμα.

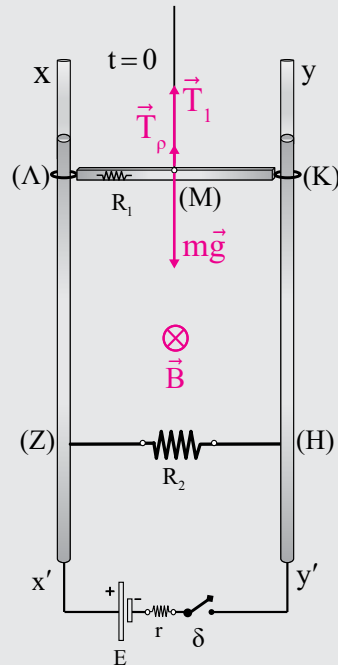
Ο αγωγός λοιπόν δέχεται το βάρος του, την οριακή τριβή και τη νέα δύναμη από το νήμα 1. Αν ισορροπούσε θα έπρεπε:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow mg = T'_1 + T_p \Rightarrow$$

$$T'_1 = 15\text{N} > T_{\theta p.(1)} = 10\text{N}$$

οπότε το νήμα 1 θα σπάσει.

Στη συνέχεια ο αγωγός αρχίζει να κινείται προς τα κάτω επιταχυνόμενος αφού $mg > T_p$.



Λόγω της κίνησης του αγωγού ΚΛ αφού αυτός βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο κάθετα στις δυναμικές του γραμμές, στα άκρα του αναπτύσσεται ηλεκτρεγερτική δύναμη από επαγωγή:

$$E_{\text{επ.}} = Bv(1)$$

Η τάση αυτή θα έχει ως αποτέλεσμα το κύκλωμα να διαρρέεται από ρεύμα (επαγωγικό):

$$I_{\text{επ.}} = \frac{E_{\text{επ.}}}{R_{\text{ολ.}}} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} I_{\text{επ.}} = \frac{Bv}{R_1 + R_2} (2)$$

Επειδή ο αγωγός διαρρέεται από ρεύμα και βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο θα του ασκηθεί δύναμη Laplace μέτρου:

$$F_L = BI_{\text{επ.}} l \Rightarrow F_L = \frac{B^2 l^2}{R_1 + R_2} v \quad (3)$$

Η φορά του ρεύματος σύμφωνα με τον κανόνα του Lenz θα πρέπει να αντιτίθεται στο αίτιο που το προκάλεσε. Το ρεύμα το προκάλεσε η κίνηση του αγωγού προς τα κάτω, άρα η δύναμη Laplace (που οφείλεται με τη σειρά της στο ρεύμα που διαρρέει τον αγωγό) πρέπει να είναι προς τα πάνω οπότε με τον κανόνα των τριών δακτύλων του δεξιού χεριού βρίσκουμε ότι η φορά του ρεύματος είναι αυτή που φαίνεται στο σχήμα.

Ο αγωγός επιταχύνεται άρα:

$$v \uparrow \Rightarrow E_{\text{επ.}} \uparrow \Rightarrow I_{\text{επ.}} \uparrow \Rightarrow F_L \uparrow \Rightarrow \Sigma F \downarrow \Rightarrow a \downarrow$$

Η κίνηση που θα εκτελέσει ο αγωγός είναι ευθύγραμμη μη ομαλά επιταχυνόμενη με συνεχώς μειούμενη επιτάχυνση. Κάποια στιγμή η επιτάχυνση θα γίνει μηδέν όταν και η συνισταμένη δύναμη γίνει μηδέν, οπότε από εκεί και μετά ο αγωγός θα εκτελέσει Ευθύγραμμη Ομαλή Κίνηση με σταθερή (οριακή) ταχύτητα. Υπολογισμός οριακής ταχύτητας:

$$\begin{aligned} \Sigma F = 0 &\Rightarrow F_L = mg - T_p \Rightarrow \\ \frac{B^2 l^2}{R_1 + R_2} v_{\text{οπ.}} &= mg - T_p \Rightarrow \\ v_{\text{οπ.}} &= \frac{(mg - T_p) \cdot (R_1 + R_2)}{B^2 l^2} \Rightarrow \\ v_{\text{οπ.}} &= 12 \text{ m/s} \end{aligned}$$

δ) Τη χρονική στιγμή t_1 που το μέτρο της ταχύτητας του αγωγού ΚΛ είναι ίσο με το $\frac{1}{3}$ της οριακής του ταχύτητας έχουμε:

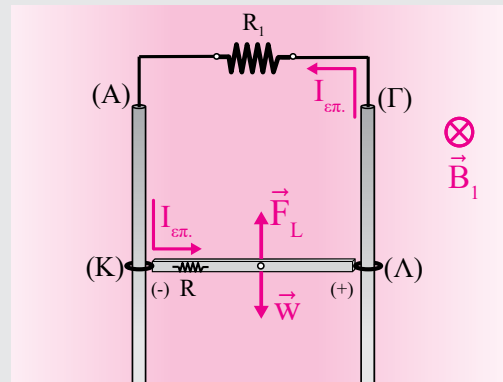
$$v_1 = \frac{v_{\text{οπ.}}}{3} = 4 \text{ m/s}$$

Εκείνη τη χρονική στιγμή το ρεύμα που διαρρέει τον αγωγό ΚΛ είναι $I_{\text{επ.}(1)} = \frac{Bv_1 l}{R_1 + R_2} = 5 \text{ A}$

Ο ρυθμός με τον οποίο παράγεται θερμότητα σε όλη τη διάταξη τη χρονική στιγμή t_1 είναι:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta Q_{\text{ολ.}}}{\Delta t} &= \frac{\Delta Q_{R_{\text{ολ.}}}}{\Delta t} + \frac{\Delta Q_{\text{τριβής}}}{\Delta t} = I_{\text{επ.}(1)}^2 R_{\text{ολ.}} + T_p v_1 \Rightarrow \\ \frac{\Delta Q_{\text{ολ.}}}{\Delta t} &= 40 \frac{\text{J}}{\text{s}} \end{aligned}$$

5.127 α) Ο αγωγός ΚΛ αρχίζει να κινείται προς τα κάτω επιταχυνόμενος λόγω του βάρους του.



Λόγω της κίνησης του αγωγού ΚΛ, αφού αυτός βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο κάθετα στις δυναμικές του γραμμές, στα άκρα του αναπτύσσεται τάση από επαγωγή.

$$E_{\text{επ.}} = B_1 v l \quad (1)$$

Η τάση αυτή θα έχει ως αποτέλεσμα το κύκλωμα ΛΓΑΚΛ (αφού ο διακόπτης είναι ανοιχτός η αντίσταση R_2 δε παίζει ρόλο) να διαρρέεται από ρεύμα (επαγωγικό):

$$I_{\text{επ.}} = \frac{E_{\text{επ.}}}{R_{\text{ολ.}}} \Rightarrow I_{\text{επ.}} = \frac{B_1 v l}{R_1 + R} \quad (2)$$

Επειδή ο αγωγός ΚΛ διαρρέεται από ρεύμα και βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο θα του ασκηθεί δύναμη Laplace μέτρου:

$$F_L = B_1 I_{\text{επ.}} l \Rightarrow F_L = \frac{B_1^2 l^2}{R_1 + R} v \quad (3)$$

Η φορά του ρεύματος σύμφωνα με τον κανόνα του Lenz θα πρέπει να αντιτίθεται στο αίτιο που το προκάλεσε. Το ρεύμα το προκάλεσε η κίνηση του αγωγού προς τα κάτω, άρα, η δύναμη Laplace (που οφείλεται με τη σειρά της στο ρεύμα που διαρρέει τον αγωγό) πρέπει να είναι προς τα πάνω οπότε με τον κανόνα των τριών δακτύλων του δεξιού χεριού βρίσκουμε ότι η φορά του ρεύματος είναι αυτή που φαίνεται στο σχήμα.

Ο αγωγός επιταχύνεται άρα:

$$v \uparrow \Rightarrow E_{\text{επ.}} \uparrow \Rightarrow I_{\text{επ.}} \uparrow \Rightarrow F_L \uparrow \Rightarrow \Sigma F \downarrow \Rightarrow a \downarrow$$

Η κίνηση που θα εκτελέσει ο αγωγός είναι ευθύγραμμη μη ομαλά επιταχυνόμενη με συνεχώς μειούμενη επιτάχυνση. Κάποια στιγμή η επιτάχυνση θα γίνει μηδέν όταν και η συνισταμένη δύναμη γίνει μηδέν, οπότε από εκεί και μετά ο αγωγός θα εκτελέσει Ευθύγραμμη Ομαλή Κίνηση με σταθερή (οριακή) ταχύτητα. Υπολογισμός οριακής ταχύτητας:

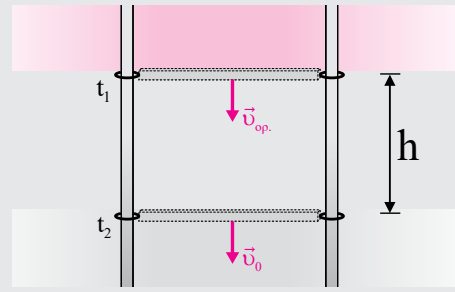
$$\begin{aligned} \Sigma F = 0 &\Rightarrow F_L = mg \Rightarrow \frac{B_1^2 l^2}{R_1 + R} v_{\text{op.}} = mg \Rightarrow \\ v_{\text{op.}} &= \frac{mg \cdot (R_1 + R)}{B_1^2 l^2} \Rightarrow \\ v_{\text{op.}} &= 10 \text{ m/s} \end{aligned}$$

β) Τη χρονική στιγμή t_1 που ο αγωγός ΚΛ εξέρχεται από την περιοχή όπου η ένταση του μαγνητικού πεδίου είναι B_1 έχει ταχύτητα ίση με την οριακή ταχύτητα που είχε αποκτήσει. Έπειτα, και μέχρι τη χρονική στιγμή t_2 , ο αγωγός κινείται μόνο υπό την επίδραση του βάρους καθώς δε δέχεται δύναμη Laplace αφού δε διαρρέεται από ρεύμα. Τη χρονική στιγμή t_2 έχει αποκτήσει ταχύτητα, έστω, μέτρου v_0 .

$$\text{Θ.Μ.Κ.Ε.}_{t_1 \rightarrow t_2} : \Delta K = \Sigma W_F \Rightarrow$$

$$K_2 - K_1 = W_w \Rightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = mgh \Rightarrow$$

$$v_0 = \sqrt{v_{\text{op.}}^2 + 2gh} \Rightarrow v_0 = 12 \text{ m/s}$$



Αφού από τη χρονική στιγμή t_2 και μετά ο ρυθμός με τον οποίο προσφέρεται ενέργεια μέσω του βάρους στον αγωγό ΚΛ είναι ίσος με τον ρυθμό με τον οποίο παράγεται θερμότητα λόγω φαινομένου Joule σε όλο το κύκλωμα, το μέτρο της ταχύτητάς του θα παραμένει σταθερό. Πράγματι από διατήρηση ενέργειας έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta W_w}{\Delta t} &= \frac{\Delta Q_{R_{\text{ολ.}}}}{\Delta t} + \frac{\Delta K}{\Delta t} \Rightarrow \frac{\Delta W_w}{\Delta t} = \frac{\Delta Q_{R_{\text{ολ.}}}}{\Delta t} + \frac{\Delta K}{\Delta t} = 0 \Rightarrow \\ K &= \text{σταθερή} \Rightarrow v = \text{σταθερή} \end{aligned}$$

Έτσι κάποια χρονική στιγμή $t_3 > t_2$ που βρίσκεται μέσα στο ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης B_2 , το μέτρο της ταχύτητας του θα είναι ίσο με την ταχύτητα που απέκτησε τη χρονική στιγμή t_2 . Άρα: $v = v_0 \Rightarrow v = 12 \text{ m/s}$.

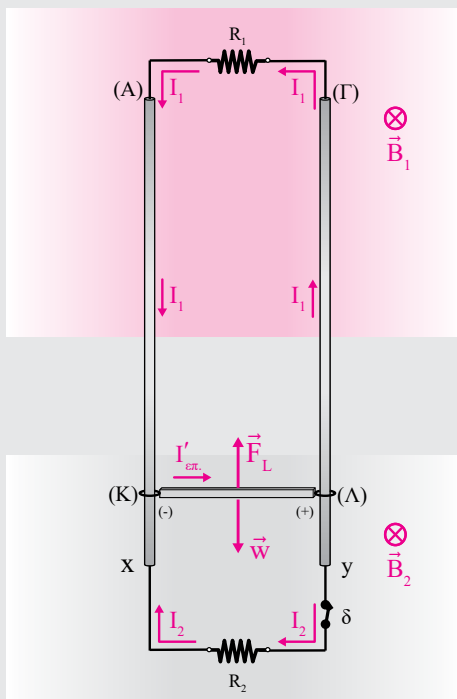
γ) Από τη χρονική στιγμή t_2 και μετά που ο αγωγός ΚΛ κινείται με σταθερή ταχύτητα μέτρου $v = 12 \text{ m/s}$, θα πρέπει να ισχύει $\Sigma F = 0$. Εκτός από το βάρος του ο αγωγός δέχεται και δύναμη Laplace αντίθετη του βάρους η οποία οφείλεται στο ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης B_2 (η διαδοχή των φαινομένων είναι η ίδια με αυτή του α ερωτήματος).

Για την ολική αντίσταση του κυκλώματος αφού ο διακόπτης δ είναι κλειστός ισχύει:

$$R_{1,2} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = 0, 2 \Omega$$

και

$$R_{\text{ολ.}} = R_{1,2} + R = 0, 3 \Omega$$



Η δύναμη Laplace έχει μέτρο (αποδεικνύεται με όμοιο τρόπο όπως και στο α ερώτημα).

$$F_L = \frac{B_2^2 l^2}{R_{ολ.}} v$$

Όμως:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_L = mg \Rightarrow \frac{B_2^2 l^2}{R_{ολ.}} v = mg \Rightarrow$$

$$B_2 = \sqrt{\frac{mg \cdot R_{ολ.}}{v \cdot l^2}} \Rightarrow$$

$$B_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} T$$

δ) Για την τάση στα άκρα του αγωγού ΚΛ έχουμε:

$$V_{ΚΛ} = E'_{επ.} - I'_{επ.} R$$

Όμως: $E'_{επ.} = B_2 v l = 6\sqrt{2} V$

και: $I'_{επ.} = \frac{E'_{επ.}}{R_{ολ.}} = 20\sqrt{2} A$

Τελικά για την τάση του αγωγού παίρνουμε:

$$V_{ΚΛ} = 4\sqrt{2} V$$

Όμως: $V_2 = V_{ΚΛ} = 4\sqrt{2} V$

οπότε: $I_2 = \frac{V_2}{R_2} = 10\sqrt{2} A$

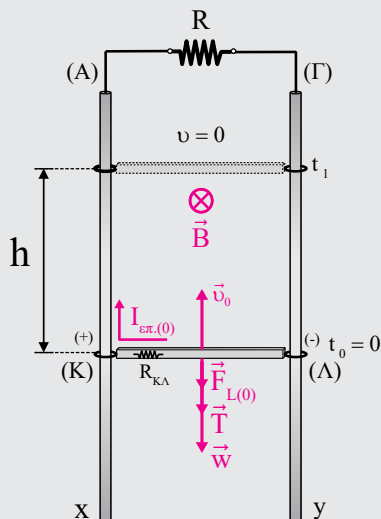
Τελικά ο ρυθμός με τον οποίο παράγεται θερμότητα, λόγω φαινομένου Joule, στην αντίσταση R_2 τη χρονική στιγμή t_3 είναι:

$$\frac{\Delta Q_{R_2}}{\Delta t} = P_{R_2} = I_2^2 R_2 \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta Q_{R_2}}{\Delta t} = 80 \frac{J}{s}$$

5.128 α) Ο αγωγός ΚΛ αρχίζει να κινείται προς τα πάνω επιβραδυνόμενος λόγω του βάρους του, της τριβής ολίσθησης και της δύναμης Laplace. Ο αγωγός δέχεται δύναμη Laplace καθώς λόγω της κίνησής του αφού βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο κάθετα στις δυναμικές του γραμμές, στα άκρα του αναπτύσσεται τάση από επαγωγή:

$$E_{επ.} = B v l (1)$$



Η τάση αυτή θα έχει ως αποτέλεσμα το κύκλωμα ΛΓΑΚΛ να διαρρέεται από ρεύμα (επαγωγικό):

$$I_{\text{επ.}} = \frac{E_{\text{επ.}}}{R_{\text{ολ.}}} \Rightarrow I_{\text{επ.}} = \frac{Bvl}{R_{\text{ΚΛ}} + R} \quad (2)$$

Επειδή ο αγωγός ΚΛ διαρρέεται από ρεύμα και βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο θα του ασκηθεί δύναμη Laplace μέτρου:

$$F_L = BI_{\text{επ.}}l \Rightarrow F_L = \frac{B^2 l^2}{R_{\text{ΚΛ}} + R} v \quad (3)$$

Η φορά του ρεύματος σύμφωνα με τον κανόνα του Lenz θα πρέπει να αντιτίθεται στο αίτιο που το προκάλεσε. Το ρεύμα το προκάλεσε η κίνηση του αγωγού προς τα πάνω, άρα, η δύναμη Laplace (που οφείλεται με τη σειρά της στο ρεύμα που διαρρέει τον αγωγό) πρέπει να ναι προς τα κάτω οπότε με τον κανόνα των τριών δακτύλων του δεξιού χεριού βρίσκουμε ότι η φορά του ρεύματος είναι αυτή που φαίνεται στο σχήμα.

Για την επιβραδυνόμενη κίνηση του αγωγού εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε.:

$$\Delta K = \Sigma W_F \Rightarrow K_{\text{τελ.}} - K_{\text{αρχ.}} = W_w + W_T + W_{F_L} \Rightarrow$$

$$0 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -mgh + W_T + W_{F_L} \Rightarrow$$

$$W_T + W_{F_L} = -4J$$

Όμως $Q_T = |W_T|$ και $Q_{R_{\text{ολ.}}} = |W_{F_L}|$ οπότε η τελευταία σχέση γίνεται:

$$Q_T + Q_{R_{\text{ολ.}}} = 4 \Rightarrow Q_T + \frac{7}{3}Q_T = 4 \Rightarrow$$

$$Q_T = 1,2J \Rightarrow T \cdot h = 1,2 \Rightarrow$$

$$T = 1N$$

β) Για τον ρυθμό μεταβολής της ταχύτητας έχουμε:

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \alpha = \frac{\Sigma F}{m} = \frac{-mg - T - F_{L(0)}}{m} \quad (4)$$

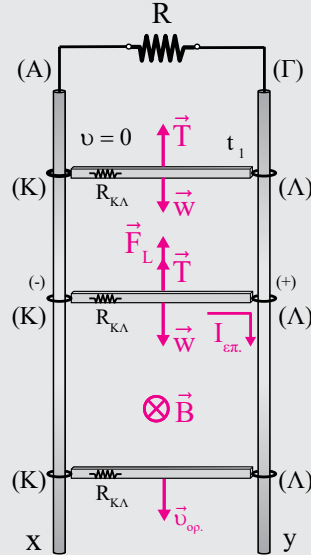
Από τη σχέση (3) έχουμε:

$$F_{L(0)} = \frac{B^2 l^2}{R_{\text{ΚΛ}} + R} v_0 = 2N$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (4) προκύπτει:

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = -25 \frac{m}{s^2}.$$

γ) Ο αγωγός ΚΛ αρχίζει να κινείται προς τα κάτω επιταχυνόμενος λόγω του βάρους του, καθώς είναι μεγαλύτερο από την τριβή η οποία έχει αλλάξει φορά (η δύναμη Laplace μηδενίζεται στιγμιαία όταν σταματήσει ο αγωγός να κινείται).



Λόγω της κίνησης του αγωγού ΚΛ αφού αυτός βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο κάθετα στις δυναμικές του γραμμές, στα άκρα του αναπτύσσεται τάση από επαγωγή το οποίο θα δώσει ρεύμα και ταυτόχρονα στον αγωγό θα ασκηθεί δύναμη Laplace. Οι τύποι που ισχύουν για την τάση το ρεύμα και τη δύναμη Laplace είναι οι (1), (2) και (3).

Ο αγωγός επιταχύνεται άρα:

$$v \uparrow \Rightarrow E_{\text{επ.}} \uparrow \Rightarrow I_{\text{επ.}} \uparrow \Rightarrow F_L \uparrow \Rightarrow \Sigma F \downarrow \Rightarrow \alpha \downarrow$$

Η κίνηση που θα εκτελέσει ο αγωγός είναι ευθύγραμμη μη ομαλά επιταχυνόμενη με συνεχώς μειούμενη επιτάχυνση. Κάποια στιγμή η επιτάχυνση θα γίνει μηδέν όταν και η συνισταμένη δύναμη γίνει μηδέν, οπότε από εκεί και μετά ο αγωγός θα εκτελέσει Ευθύγραμμη Ομαλή Κίνηση με σταθερή (οριακή) ταχύτητα.

Υπολογισμός οριακής ταχύτητας:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_L + T = mg \Rightarrow \frac{B^2 l^2}{R_{KL} + R} v_{op.} = mg - T \Rightarrow$$

$$v_{op.} = \frac{(mg - T) \cdot (R_{KL} + R)}{B^2 l^2} \Rightarrow$$

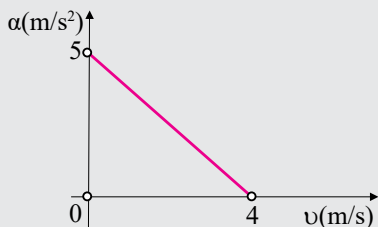
$$v_{op.} = 4 \text{ m/s}$$

δ) Από τον 2ο Νόμο του Νεύτωνα έχουμε:

$$\Sigma F = ma \Rightarrow mg - T - F_L = ma \Rightarrow$$

$$mg - T - \frac{B^2 l^2}{R_{KL} + R} v = ma \Rightarrow$$

$$a = 5 - 1,2v \text{ (S.I.)}$$



ε) Ο ρυθμός με τον οποίο παράγεται θερμότητα στις αντιστάσεις είναι:

$$\frac{\Delta Q_{R_{ολ.}}}{\Delta t} = P_{R_{ολ.}} = I_{επ.}^2 (R_{KL} + R)$$

$$\text{Όμως (2)} \Rightarrow I_{επ.} = \frac{B v_0 l}{R_{KL} + R} = 2 \text{ A} \text{ άρα:}$$

$$\frac{\Delta Q_{R_{ολ.}}}{\Delta t} = 4 \text{ J/s}.$$

Ο ρυθμός με τον οποίο παράγεται θερμότητα λόγω της τριβής ολίσθησης είναι:

$$\frac{\Delta Q_T}{\Delta t} = T \cdot v_0 = 4 \text{ J/s}$$

$$\text{Τελικά } \frac{\Delta Q_{R_{ολ.}}}{\Delta t} = \frac{\Delta Q_T}{\Delta t} \Rightarrow \frac{\Delta Q_{R_{ολ.}}}{\Delta t} = 4 \text{ J/s}$$

Κεφάλαιο 6: Στοιχεία Κβαντομηχανικής

ΘΕΜΑ Α

- 6.1 δ) 6.2 β) 6.3 δ) 6.4 α)
 6.5 γ) 6.6 α) 6.7 β) 6.8 γ)
 6.9 δ) 6.10 β) 6.11 δ) 6.12 β)
 6.13 γ) 6.14 β) 6.15 β) 6.16 γ)
 6.17 α) 6.18 δ) 6.19 α) 6.20 γ)
 6.21 β)

ΘΕΜΑ Β

6.22 Σωστή απάντηση είναι η β).

Ισχύει:

$$T' = T - 0,2T \Rightarrow T' = 0,8T$$

Προκύπτει:

$$\lambda T = \lambda T' \Rightarrow \lambda T = \lambda' \cdot 0,8T \Rightarrow \lambda' = 1,25\lambda$$

Το ζητούμενο επί τοις εκατό ποσοστό είναι:

$$\Pi(\%) = \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda} \cdot 100\% \Rightarrow$$

$$\Pi(\%) = \frac{1,25\lambda - \lambda}{\lambda} \cdot 100\% \Rightarrow \Pi(\%) = 25\%$$

6.23 Σωστή απάντηση είναι η β).

Για το σώμα (1) ισχύει:

$$I_1 = \frac{P_1}{A_1} \Rightarrow P_1 = I_1 A_1 \Rightarrow P_1 = I_1 \cdot 4\pi R_1^2 (1)$$

Για το σώμα (2) ισχύει:

$$I_2 = \frac{P_2}{A_2} \Rightarrow P_2 = I_2 A_2 \Rightarrow P_2 = I_2 \cdot 4\pi R_2^2 (2)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{I_1 \cdot 4\pi R_1^2}{I_2 \cdot 4\pi R_2^2} \Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = \frac{R_1^2}{4R_2^2} \Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = \frac{1}{4}$$

6.24 Σωστή απάντηση είναι η β).

Ισχύει:

$$\lambda_1 T_1 = \lambda_2 T_2 \Rightarrow 2\lambda_2 T_1 = \lambda_2 T_2 \Rightarrow \dots T_2$$

6.25 Σωστή απάντηση είναι η β).

Ισχύει:

$$\Pi(\%) = \frac{E_{\text{τελ}} - E_{\text{αρχ}}}{E_{\text{αρχ}}} \cdot 100\% \Rightarrow$$

$$\Pi(\%) = \frac{hf - 2hf}{2hf} \cdot 100\% \Rightarrow \Pi(\%) = -50\%$$

6.26 Σωστή απάντηση είναι η β).

Το μέτρο της μεταβολής της ορμής, κατά την κρούση ενός φωτονίου, είναι:

$$\Delta p = 2p$$

Η δύναμη που ασκεί το 1 φωτόνιο στην επιφάνεια είναι:

$$F_1 = \frac{\Delta p}{\Delta t} \Rightarrow F_1 = \frac{2p}{\Delta t}$$

Η συνολική δύναμη που ασκούν τα N φωτόνια είναι:

$$F_{\text{ολ}} = N \cdot \Delta t \cdot F_1 \Rightarrow F_{\text{ολ}} = N \cdot \Delta t \cdot \frac{2p}{\Delta t} \Rightarrow$$

$$F_{\text{ολ}} = N \cdot 2p \Rightarrow F_{\text{ολ}} = 2N \frac{h}{\lambda} \Rightarrow F_{\text{ολ}} = \frac{2Nh f}{c}$$

6.27 Σωστή απάντηση είναι η α).

Ισχύει:

$$P_2 = 2P_1 \Rightarrow \frac{E_2}{t} = 2 \frac{E_1}{t} \Rightarrow \frac{N_2 hc}{t\lambda_2} = 2 \frac{N_1 hc}{t\lambda_1} \Rightarrow$$

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{\lambda_1}{2\lambda_2} \Rightarrow \frac{N_1}{N_2} = \frac{\lambda_1}{\frac{8}{3}\lambda_1} \Rightarrow \frac{N_1}{N_2} = \frac{3}{8}$$

6.28 Σωστή απάντηση είναι η α).

Εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Κ.Ε. έχουμε:

$$K_1 - K = q_e (V_{\text{καθ}} - V_{\text{αν}}) \Rightarrow$$

$$4eV_0 - eV_0 = -e(-\Delta V) \Rightarrow \Delta V = 3V_0$$

6.29 Σωστή απάντηση είναι η α).

Ισχύει:

$$hf - \phi \geq 0 \Rightarrow hf \geq \phi \Rightarrow E \geq \phi \Rightarrow$$

$$pc \geq \phi \Rightarrow \phi \leq pc$$

6.30 Σωστή απάντηση είναι η γ).

Ισχύει:

$$K_1 = \frac{hc}{\lambda_1} - \varphi \Rightarrow \frac{p^2}{2m} = \frac{hc}{\lambda_1} - \varphi(1)$$

Επίσης, έχουμε:

$$K_2 = \frac{hc}{\lambda_2} - \varphi \Rightarrow \frac{4p^2}{2m} = \frac{hc}{\lambda_2} - \varphi \Rightarrow$$

$$4\left(\frac{hc}{\lambda_1} - \varphi\right) = \frac{hc}{\lambda_2} - \varphi \Rightarrow 4\frac{hc}{\lambda_1} = \frac{hc}{\lambda_2} + 3\varphi \Rightarrow$$

$$4\frac{hc}{\lambda_1} = \frac{hc}{\lambda_2} + 3\left(\frac{2hc}{3\lambda_1}\right) \Rightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 2$$

6.31 Σωστή απάντηση είναι η β).

Ισχύει:

$$K = hf - \varphi \Rightarrow eV_0 = \frac{hc}{\lambda} - \varphi \Rightarrow$$

$$eV_0 = pc - \varphi \Rightarrow V_0 = \frac{pc - \varphi}{e}$$

6.32 Σωστή απάντηση είναι η γ).

Από την εφαρμογή της αρχής διατήρησης της ενέργειας έχουμε:

$$E = K + E' \Rightarrow E' = E - \frac{E}{5} \Rightarrow E' = \frac{4E}{5} \Rightarrow$$

$$\frac{hc}{\lambda'} = \frac{4}{5} \frac{hc}{\lambda} \Rightarrow \lambda' = \frac{5\lambda}{4}$$

Προκύπτει:

$$\Delta\lambda = \lambda_c (1 - \cos\theta) \Rightarrow \lambda' - \lambda = \lambda_c (1 - \cos\theta) \Rightarrow$$

$$\frac{5\lambda}{4} - \lambda = \lambda_c (1 - \cos\theta) \Rightarrow \frac{\lambda}{4} = \lambda_c (1 - \cos\theta) \Rightarrow$$

$$\frac{2h}{4m_e c} = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos\theta) \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\theta = 60^\circ$$

6.33 Σωστή απάντηση είναι η γ).

Ισχύει:

$$\frac{p'}{p} = \frac{\frac{h}{\lambda'}}{\frac{h}{\lambda}} \Rightarrow \frac{p'}{p} = \frac{\lambda}{\lambda'} \Rightarrow \frac{\frac{2}{3}p}{p} = \frac{\lambda}{\lambda'} \Rightarrow \lambda' = \frac{3\lambda}{2}$$

Έχουμε:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda \Rightarrow \Delta\lambda = \frac{3\lambda}{2} - \lambda \Rightarrow \Delta\lambda = \frac{\lambda}{2}$$

6.34 Σωστή απάντηση είναι η α).

Ισχύει:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos\theta) \Rightarrow \lambda' - \frac{2h}{m_e c} = \frac{2h}{m_e c} \Rightarrow$$

$$\lambda' = \frac{4h}{m_e c}$$

Προκύπτει:

$$K = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'} \Rightarrow K = \frac{hc}{2h} - \frac{hc}{4h} \Rightarrow$$

$$K = \frac{1}{4} m_e c^2$$

6.35 Σωστή απάντηση είναι η α).

Ισχύει:

$$K = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow p = \sqrt{2Km}$$

Επίσης έχουμε:

$$\lambda = \frac{h}{p} \Rightarrow \lambda = \frac{h}{\sqrt{2Km}}$$

Τελικά, προκύπτει:

$$\Pi(\%) = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1} \cdot 100\% \Rightarrow$$

$$\Pi(\%) = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1\right) \cdot 100\% \Rightarrow$$

$$\Pi(\%) = \left(\frac{\sqrt{2K_1 m}}{\sqrt{2K_2 m}} - 1\right) \cdot 100\% \Rightarrow$$

$$\Pi(\%) = \left(\frac{\sqrt{\frac{K_1}{4}}}{\sqrt{\frac{K_1}{4}}} - 1\right) \cdot 100\% \Rightarrow \Pi(\%) = 100\%$$

6.36 Σωστή απάντηση είναι η α).

Ισχύει:

$$\lambda = \frac{h}{p} \Rightarrow \lambda = \frac{h}{mv}$$

Προκύπτει:

$$\Pi(\%) = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1} \cdot 100\% \Rightarrow$$

$$\Pi(\%) = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1\right) \cdot 100\% \Rightarrow$$

$$\Pi(\%) = \left(\frac{\frac{h}{mv_2}}{\frac{h}{mv_1}} - 1 \right) \cdot 100\% \Rightarrow$$

$$\Pi(\%) = \left(\frac{v_1}{v_2} - 1 \right) \cdot 100\% \Rightarrow$$

$$\Pi(\%) = \left(\frac{v_1}{\frac{v_1}{3}} - 1 \right) \cdot 100\% \Rightarrow \Pi(\%) = 200\%$$

6.37 Σωστή απάντηση είναι η α).

Ισχύει:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\frac{mv_1}{Bq}}{\frac{mv_2}{Bq}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{1}{2}$$

Τελικά, προκύπτει:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{p_1}{p_2} \Rightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{mv_1}{mv_2} \Rightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{v_2}{v_1} \Rightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 2$$

6.38 Σωστή απάντηση είναι η α).

Ισχύει:

$$\lambda' = 2\lambda \Rightarrow \frac{c}{f} = 2 \frac{h}{p} \Rightarrow \frac{c}{f} = 2 \frac{h}{m_p v} \Rightarrow f = \frac{m_p v c}{2h}$$

6.39 Σωστή απάντηση είναι η α).

Από την εφαρμογή του Θ.Μ.Κ.Ε. για το ηλεκτρόνιο (1) έχουμε:

$$\frac{1}{2} m_e v_1^2 = eV_1 \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2eV_1}{m_e}}$$

Για το, κατά de Broglie, μήκος κύματος του ηλεκτρονίου (1), έχουμε:

$$\lambda_1 = \frac{h}{p_1} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{h}{m_e v_1} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{h}{m_e \sqrt{\frac{2eV_1}{m_e}}} \Rightarrow$$

$$\lambda_1 = \frac{h}{\sqrt{2m_e eV_1}} (1)$$

Όμοια για το ηλεκτρόνιο (2) θα έχουμε:

$$\lambda_2 = \frac{h}{\sqrt{2m_e eV_2}} (2)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\frac{h}{\sqrt{2m_e eV_1}}}{\frac{h}{\sqrt{2m_e eV_2}}} \Rightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \sqrt{\frac{V_2}{V_1}} \Rightarrow$$

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \sqrt{\frac{4V_1}{V_1}} \Rightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 2$$

6.40 Σωστή απάντηση είναι β).

Αρχικά έχουμε:

$$K = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow K = \frac{\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2}{2m} \Rightarrow K = \frac{h^2}{2m\lambda^2}$$

Τελικά, έχουμε:

$$K' = \frac{p'^2}{2m} \Rightarrow K' = \frac{\left(\frac{h}{\lambda'}\right)^2}{2m} \Rightarrow K' = \frac{h^2}{2m\lambda'^2} \Rightarrow$$

$$K' = \frac{h^2}{2m \cdot 4\lambda^2} \Rightarrow K' = \frac{K}{4}$$

Το ζητούμενο επί τοις εκατό ποσοστό είναι:

$$\Pi(\%) = \frac{K - K'}{K} \cdot 100\% \Rightarrow$$

$$\Pi(\%) = \frac{K - \frac{K}{4}}{K} \cdot 100\% \Rightarrow \Pi(\%) = 75\%$$

6.41 Σωστή απάντηση είναι α).

Από τις σχέσεις:

$$E = hf = h \frac{c}{\lambda} \quad \text{και} \quad \lambda = \frac{h}{p}$$

προκύπτει ότι $E = pc$.

Έχουμε:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{p_1 c}{p_2 c} \Rightarrow \frac{2E_2}{E_2} = \frac{p_1}{p_2} \Rightarrow \frac{p_1}{p_2} = 2 \Rightarrow p_2 = \frac{p_1}{2}$$

6.42 Σωστή απάντηση είναι η β).

Για το σωματίδιο (1) έχουμε:

$$\Delta x_1 \cdot \Delta p_1 = \frac{h}{2\pi} \Rightarrow \Delta x_1 = \frac{h}{2\pi m_1 \cdot \Delta v_1} \Rightarrow$$

$$\Delta x_1 = \frac{h}{2\pi m \cdot \frac{\kappa}{100} v} \Rightarrow \Delta x_1 = \frac{100h}{2\pi m \cdot \kappa v}$$

Για το σωματίδιο (2) έχουμε:

$$\Delta x_2 \cdot \Delta p_2 = \frac{h}{2\pi} \Rightarrow \Delta x_2 = \frac{h}{2\pi m_2 \cdot \Delta v_2} \Rightarrow$$

$$\Delta x_2 = \frac{h}{2\pi \cdot 4m \cdot \frac{2\kappa}{100} v} \Rightarrow \Delta x_2 = \frac{100h}{16\pi m \cdot \kappa v} \Rightarrow$$

$$\Delta x_2 = \frac{\Delta x_1}{8}$$

6.43 Σωστή απάντηση είναι η β).

Ισχύει ότι:

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{h}{2\pi} \Rightarrow h \cdot \Delta f \geq \frac{h}{2\pi \cdot \Delta t} \Rightarrow$$

$$\Delta f_{\min} = \frac{1}{2\pi \cdot \Delta t} \Rightarrow \Delta f_{\min} = \frac{1}{2\pi \cdot 10^{-8}} \text{ Hz} \Rightarrow$$

$$\Delta f_{\min} = \frac{100}{2\pi} \text{ MHz}$$

ΘΕΜΑ Γ

6.44 α) Για τη συχνότητα ταλάντωσης του συστήματος ισχύει:

$$E = hf \Rightarrow f = \frac{E}{h} \Rightarrow f = 15 \text{ Hz}$$

β) Έχουμε:

$$\text{Για } n = 1, E_1 = 10^{-32} \text{ J}$$

$$\text{Για } n = 2, E_2 = 2 \cdot 10^{-32} \text{ J}$$

$$\text{Για } n = 3, E_3 = 3 \cdot 10^{-32} \text{ J}$$

$$\text{Για } n = 4, E_4 = 4 \cdot 10^{-32} \text{ J}$$

γ) Προκύπτει:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow m = \frac{k}{4\pi^2 f^2} \Rightarrow m = 0,1 \text{ kg}$$

δ) Έχουμε:

$$nhf = \frac{1}{2} kA^2 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2nhf}{k}} \Rightarrow A = \frac{2}{30} \text{ m}$$

6.45 α) Ισχύουν:

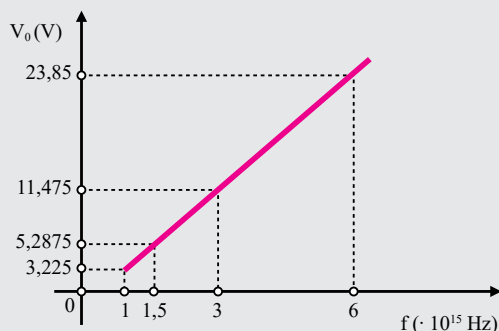
$$1) f_1 = \frac{c}{\lambda_1} \Rightarrow f_1 = 6 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$$

$$2) f_2 = \frac{c}{\lambda_2} \Rightarrow f_2 = 3 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$$

$$3) f_3 = \frac{c}{\lambda_3} \Rightarrow f_3 = 1,5 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$$

$$4) f_4 = \frac{c}{\lambda_4} \Rightarrow f_4 = 1 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$$

β) Το ζητούμενο διάγραμμα είναι το εξής:



γ) Ισχύει:

$$K_{\max} = hf - \varphi \Rightarrow eV_0 = hf - \varphi \Rightarrow$$

$$V_0 = \frac{h}{e} f - \frac{\varphi}{e} (1)$$

Η σχέση (1) είναι της μορφής $V_0 = \alpha f + \beta$ (2). Η κλίση της ευθείας μπορεί να υπολογιστεί με τη βοήθεια του διαγράμματος V_0 - f . Έχουμε:

$$\alpha = \frac{\Delta V_0}{\Delta f} \Rightarrow \alpha = 4,125 \cdot 10^{-15} \frac{\text{V}}{\text{Hz}}$$

Όμως, ισχύει:

$$\frac{h}{e} = \alpha \Rightarrow h = \alpha e \Rightarrow h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$$

δ) Η σχέση (2) έχει τη μορφή:

$$V_0 = 4,125 \cdot 10^{-15} f - \beta (3)$$

Θέτοντας στη σχέση (3) όπου:

$$f = 6 \cdot 10^{15} \text{ Hz}, V_0 = 23,85 \text{ V}$$

έχουμε:

$$\beta = -0,9 \text{ V}$$

Η σχέση (3) θα έχει πλέον τη μορφή:

$$V_0 = 4,125 \cdot 10^{-15} f - 0,9 (4)$$

Ισχύει:

$$\frac{\varphi}{e} = \beta \Rightarrow \varphi = e\beta \Rightarrow \varphi = 0,9 \text{ eV}$$

Από τη σχέση (4) έχουμε:

$$V_0 \geq 0 \Rightarrow 4,125 \cdot 10^{-15} f - 0,9 \geq 0 \Rightarrow$$

$$f \geq \frac{0,9}{4,125 \cdot 10^{-15}} \Rightarrow f_0 = \frac{72}{33} \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

6.46 α) Ισχύει:

$$K_{\max} = hf - \varphi(1)$$

Επομένως η σταθερά του Planck είναι ίση με την κλίση του διαγράμματος $K_{\max}$ - f .

Προκύπτει:

$$h = \frac{\Delta K_{\max}}{\Delta f} \Rightarrow h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$$

β) Για το έργο εξαγωγής του μετάλλου έχουμε:

$$K_{\max} = hf - \varphi \Rightarrow \varphi = hf - K_{\max} \Rightarrow$$

$$\varphi = 20,625 \text{ eV}$$

γ) Για τη συχνότητα κατωφλίου ισχύει:

$$f_0 = \frac{\varphi}{h} \Rightarrow f_0 = 5 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$$

δ) Για το ζητούμενο δυναμικό αποκοπής προκύπτει:

$$eV_0 = hf - \varphi \Rightarrow V_0 = \frac{hf - \varphi}{e} \Rightarrow$$

$$V_0 = 41,25 \text{ V}$$

6.47 α) Ισχύει:

$$E = \frac{hc}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{hc}{E} \Rightarrow \lambda = 4,8 \cdot 10^{-12} \text{ m}$$

β) Η κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου μετά τη σκέδαση είναι:

$$K = E - E' \Rightarrow K = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'}(1)$$

Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι για να είναι η κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου μέγιστη θα πρέπει το μήκος κύματος λ' του σκεδαζόμενου φωτονίου να παίρνει και αυτό τη μέγιστη τιμή του. Επομένως η γωνία σκέδασης πρέπει να είναι $\varphi = 180^\circ$.

γ) Ισχύει:

$$\Delta\lambda = \lambda_c (1 - \cos\varphi) \Rightarrow \Delta\lambda = 2\lambda_c \Rightarrow$$

$$\lambda' - \lambda = 2\lambda_c \Rightarrow \lambda' = 9,6 \cdot 10^{-12}$$

Προκύπτει:

$$\frac{E}{E'} = \frac{\frac{hc}{\lambda}}{\frac{hc}{\lambda'}} \Rightarrow \frac{E}{E'} = \frac{\lambda'}{\lambda} \Rightarrow \frac{E}{E'} = \frac{2\lambda}{\lambda} \Rightarrow$$

$$E' = \frac{E}{2} \Rightarrow E' = \frac{3100}{24} \text{ KeV}$$

δ) Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας έχουμε:

$$K = E - E' \Rightarrow K = E - \frac{E}{2} \Rightarrow K = \frac{E}{2}$$

Το ζητούμενο επί τοις εκατό ποσοστό είναι:

$$\Pi(\%) = \frac{E}{E} \cdot 100\% \Rightarrow \Pi(\%) = 50\%$$

6.48 α) Από την εφαρμογή του Θ.Μ.Κ.Ε. έχουμε:

$$K - 0 = eV \Rightarrow V = \frac{K}{e} \Rightarrow V = 180 \text{ V}$$

β) Ισχύει:

$$\frac{1}{2} m_e v^2 = K \Rightarrow \text{ή } v = \sqrt{\frac{2K}{m_e}} \Rightarrow v = 8 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Προκύπτει:

$$p = m_e v \Rightarrow p = 72 \cdot 10^{-25} \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

γ) Ισχύει:

$$\lambda = \frac{h}{p} \Rightarrow \lambda = \frac{11}{12} \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

δ) Έχουμε:

$$E = hf \Rightarrow E = h \frac{c}{\lambda} \Rightarrow E = 21,6 \cdot 10^{-16} \text{ J}$$

ΘΕΜΑ Δ

6.49 α) Για την ένταση της ακτινοβολίας ισχύει:

$$I = \frac{P}{A} \Rightarrow I = \frac{P}{4\pi d_1^2} \Rightarrow I = \frac{1}{10\pi} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

β) Σε απόσταση d_2 από την πηγή, η ένταση της ακτινοβολίας είναι:

$$I' = \frac{P}{4\pi d_2^2} \Rightarrow I' = \frac{1}{40\pi} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

Ισχύει:

$$\Delta E_{\alpha\pi} = \frac{50}{100} \Delta E_{\pi\lambda} \Rightarrow \Delta E_{\pi\lambda} = 2\Delta E_{\alpha\pi} \Rightarrow$$

$$\Delta E_{\pi\lambda} = \frac{1}{100\pi} \text{ J}$$

Προκύπτει:

$$I' = \frac{P_{\pi\lambda}}{A_{\pi\lambda}} \Rightarrow I' = \frac{\frac{\Delta E_{\pi\lambda}}{\Delta t}}{A_{\pi\lambda}} \Rightarrow A_{\pi\lambda} = \frac{\Delta E_{\pi\lambda}}{I' \cdot \Delta t} \Rightarrow$$

$$\alpha^2 = \frac{\Delta E_{\pi\lambda}}{I' \cdot \Delta t} \Rightarrow \alpha = \sqrt{\frac{\Delta E_{\pi\lambda}}{I' \cdot \Delta t}} \Rightarrow \alpha = 0,2 \text{ m}$$

γ) Ισχύει:

$$I' = \frac{P'_{\pi\lambda}}{A_{\pi\lambda}} \Rightarrow I' = \frac{\frac{\Delta E'_{\pi\lambda}}{\Delta t'}}{A_{\pi\lambda}} \Rightarrow \Delta E'_{\pi\lambda} = I' \cdot \Delta t' \cdot A_{\pi\lambda} \Rightarrow$$

$$\Delta E'_{\pi\lambda} = \frac{1}{10\pi} \text{ J}$$

δ) Έχουμε:

$$I'' = \frac{P}{4\pi(2d_2)^2} \Rightarrow I'' = \frac{I'}{4} \Rightarrow I'' = \frac{1}{160\pi} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

Προκύπτει:

$$I'' = \frac{P''_{\pi\lambda}}{A_{\pi\lambda}} \Rightarrow I'' = \frac{\frac{\Delta E''_{\pi\lambda}}{\Delta t'}}{A_{\pi\lambda}} \Rightarrow$$

$$\Delta E''_{\pi\lambda} = I'' \cdot \Delta t' \cdot A_{\pi\lambda} \Rightarrow \Delta E''_{\pi\lambda} = \frac{1}{40\pi} \text{ J}$$

6.50 α) Ισχύει:

$$\frac{K_e}{E} = \frac{1}{2} \Rightarrow K_e = \frac{E}{2}$$

Από την εφαρμογή της Α.Δ.Ε. προκύπτει:

$$E = E' + K_e \Rightarrow E' = \frac{E}{2} \Rightarrow \frac{hc}{\lambda'} = \frac{hc}{2\lambda} \Rightarrow$$

$$\lambda' = 2\lambda \Rightarrow \lambda' = 2\lambda_c \Rightarrow \lambda' = 4,8 \cdot 10^{-12} \text{ m}$$

β) Για τη γωνία σκέδασης προκύπτει:

$$\Delta\lambda = \lambda_c (1 - \cos\theta) \Rightarrow$$

$$\lambda' - \lambda = \lambda_c (1 - \cos\theta) \Rightarrow$$

$$2\lambda_c - \lambda_c = \lambda_c (1 - \cos\theta) \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

γ) Ισχύει:

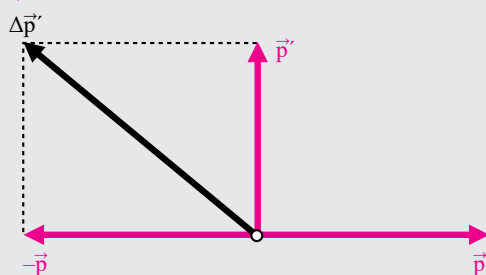
$$\frac{p'}{p} = \frac{\frac{h}{\lambda'}}{\frac{h}{\lambda}} \Rightarrow \frac{p'}{p} = \frac{\lambda}{\lambda'} \Rightarrow \frac{p'}{p} = \frac{1}{2} \Rightarrow p' = \frac{p}{2}$$

Για το ζητούμενο επί τοις εκατό ποσοστό προκύπτει:

$$\Pi(\%) = \frac{p' - p}{p} \cdot 100\% \Rightarrow$$

$$\Pi(\%) = \frac{\frac{p}{2} - p}{p} \cdot 100\% \Rightarrow \Pi(\%) = -50\%$$

δ)



Έχουμε:

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}' - \vec{p} \Rightarrow \Delta \vec{p} = \vec{p}' + (-\vec{p})$$

Για το μέτρο της μεταβολής της ορμής προκύπτει:

$$\Delta p = \sqrt{p'^2 + p^2} \Rightarrow \Delta p = \sqrt{\frac{p^2}{4} + p^2} \Rightarrow$$

$$\Delta p = \frac{\sqrt{5}}{2} p \Rightarrow \Delta p = \frac{\sqrt{5}}{2} \frac{h}{\lambda_c} \Rightarrow$$

$$\Delta p = 1375 \cdot \sqrt{5} \cdot 10^{-25} \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

6.51 α) Η γωνία σκέδασης είναι $\varphi = \pi \text{ rad}$.

Έχουμε:

$$\Delta\lambda = \lambda_c (1 - \cos\pi) \Rightarrow \Delta\lambda = 2\lambda_c \Rightarrow$$

$$\Delta\lambda = 4,8 \cdot 10^{-12} \text{ m}$$

β) Ισχύει:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda \Rightarrow \lambda' = \Delta\lambda + \lambda \Rightarrow$$

$$\lambda' = 4,8 \cdot 10^{-12} \text{ m} + 4,8 \cdot 10^{-12} \text{ m} \Rightarrow$$

$$\lambda' = 9,6 \cdot 10^{-12} \text{ m}$$

Προκύπτει:

$$\frac{p}{p'} = \frac{\frac{h}{\lambda}}{\frac{h}{\lambda'}} \Rightarrow \frac{p}{p'} = \frac{\lambda'}{\lambda} \Rightarrow \frac{p}{p'} = 2$$

γ) Για τη μεταβολή του μέτρου της ορμής έχουμε:

$$\Delta p = p' - p \Rightarrow \Delta p = \frac{h}{2\lambda} - \frac{h}{\lambda} \Rightarrow$$

$$\Delta p = -\frac{h}{2\lambda} \Rightarrow \Delta p = -\frac{11}{16} \cdot 10^{-22} \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

δ) Από την Α.Δ.Ο. για τη σκέδαση έχουμε:

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}' + \vec{p}_e \Rightarrow p = -p' + p_e \Rightarrow p_e = p + p' \Rightarrow$$

$$p_e = \frac{3p}{2} \Rightarrow p_e = \frac{3}{2} \cdot \frac{h}{\lambda} \Rightarrow$$

$$p_e = \frac{33}{16} \cdot 10^{-22} \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

6.52 α) Ισχύει:

$$\lambda = \frac{h}{p} \Rightarrow p = \frac{h}{\lambda} \Rightarrow p = 3,6 \cdot 10^{-25} \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

β) Το μέτρο της ταχύτητας των εξερχόμενων φωτοηλεκτρονίων είναι:

$$v = \frac{p}{m_e} \Rightarrow v = 4 \cdot 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Για το δυναμικό αποκοπής έχουμε:

$$eV_0 = K \Rightarrow V_0 = \frac{K}{e} \Rightarrow V_0 = \frac{\frac{1}{2} m_e v^2}{e} \Rightarrow$$

$$V_0 = 0,45 \text{ V}$$

γ) Για το έργο εξαγωγής προκύπτει:

$$K = hf - \phi \Rightarrow \phi = hf - K \Rightarrow \phi = h \frac{c}{\lambda} - K \Rightarrow$$

$$\phi = 0,15 \text{ eV}$$

δ) Για τη συχνότητα κατωφλίου έχουμε:

$$f_0 = \frac{\phi}{h} \Rightarrow f_0 = \frac{4}{11} \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

6.53 α) Η μεταβολή του μήκους κύματος κατά τη σκέδαση είναι:

$$\Delta \lambda = \lambda_c (1 - \cos \pi) \Rightarrow \Delta \lambda = 2\lambda_c \Rightarrow$$

$$\Delta \lambda = 4,8 \cdot 10^{-12} \text{ m}$$

β) Για το μήκος κύματος του φωτονίου μετά τη σκέδαση έχουμε:

$$\lambda' - \lambda = \Delta \lambda \Rightarrow \lambda' = \Delta \lambda + \lambda \Rightarrow$$

$$\lambda' = 5 \cdot 10^{-12} \text{ m}$$

γ) Από την Αρχή Διατήρησης της Ορμής προκύπτει:

$$p = -p' + p_e \Rightarrow p_e = p + p' \Rightarrow p_e = \frac{h}{\lambda} + \frac{h}{\lambda'} \Rightarrow$$

$$p_e = 34,32 \cdot 10^{-22} \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

δ) Ισχύει:

$$\lambda_e = \frac{h}{p_e} \Rightarrow \lambda_e = \frac{11}{572} \cdot 10^{-11} \text{ m}$$

6.54 α) Από την εφαρμογή του Θ.Μ.Κ.Ε. έχουμε:

$$K - 0 = eV \Rightarrow \frac{1}{2} m_e v^2 = eV \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2eV}{m_e}} \Rightarrow$$

$$v = 6 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

β) Για το μήκος κύματος de Broglie του ηλεκτρονίου ισχύει:

$$\lambda = \frac{h}{p} \Rightarrow \lambda = \frac{h}{m_e v} \Rightarrow \lambda = \frac{11}{90} \cdot 10^{-9} \text{ m}$$

γ) Έχουμε:

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{0,1}{100} \Rightarrow \Delta v = v \cdot 0,001 \Rightarrow \Delta v = 6 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Προκύπτει:

$$\Delta p = m_e \cdot \Delta v \Rightarrow \Delta p = 54 \cdot 10^{-28} \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

δ) Ισχύει:

$$\Delta p \cdot \Delta x \geq \frac{h}{2\pi} \Rightarrow \Delta x \geq \frac{h}{2\pi \cdot \Delta p} \Rightarrow$$

$$\Delta x_{\min} = \frac{50}{27} \cdot 10^{-8} \text{ m}$$

ΠΑΡΟΡΑΜΑΤΑ

- ❑ σελ 496 **2.7 α), 2.34 β)**
- ❑ σελ 504 **5.12 α)**
- ❑ σελ 504 **5.24 δ)**
- ❑ σελ 271 **5.98** για $0 - 0,5\text{s}$ και $0,5\text{s} - 1\text{s}$, $I = \text{σταθ.}$
- ❑ σελ 305 **6.2** «...Εξαιτίας αυτής της εκπομπής ακτινοβολίας...»
- ❑ σελ 505 **5.83 γ)** $B'_2 = \frac{32}{3} \cdot 10^{-5} \text{ T}$
- ❑ σελ 506 **5.99 β)** $\Phi = 5\pi \cdot 10^{-3} + t \text{ (S.I)}$
- ❑ σελ 507 **5.113 δ)** $B_\alpha = 42\pi \cdot 10^{-5} \text{ T}$
- ❑ σελ 507 **5.114 δ)** $B_{\max} = 12,8 \text{ T}$
- ❑ σελ 199 **4.97 δ)** «...την ταχύτητα του σημείου (K) τη χρονική στιγμή που η ταχύτητα του σημείου (Λ) μηδενίζεται...»
- ❑ σελ 246 **5.57 α)** 25
- ❑ σελ 262 **5.83** «...ακτίνας α' που αποτελείται από $N' = 2$ σπείρες».
- ❑ σελ 501 **4.47 γ)**
- ❑ σελ 183 **4.62** «...ένα σημείο Γ, το οποίο απέχει από την πηγή Π_1 απόσταση...».
- ❑ σελ 503 **4.85 β)** $\alpha_z = 20 \text{ ημ}2\pi(t - 1,25) \text{ (S.I.)}$
4.91 γ) Υπάρχουν 2 σημεία...
- ❑ σελ 245 **5.54 β)** $V_{\text{ΑΓ}} = \frac{1}{2} B (l_2^2 - l_1^2)\omega$.
- ❑ σελ 515 **A2 γ)**
- ❑ σελ 343 **Θέμα Γ - Γ4** «...ίση με 1 m από το κεκλιμένο...».
- ❑ σελ 509 **6.30 γ)**
- ❑ σελ 312 **6.30** «...της καθόδου είναι $\varphi = \frac{2hc}{3\lambda_1} \dots$ ».

The background is a light gray with a large, solid pink rectangle in the upper center. To the left of this rectangle are several vertical white lines of varying thickness. Scattered across the entire background are numerous thin, rounded rectangular outlines in various shades of pink, gray, and white, some of which are tilted at different angles.

Απαντήσεις Διαγωνισμάτων

1ο Διαγώνισμα (Δ1)

ΘΕΜΑ Α

A1. α), A2. δ), A3. δ), A4. δ)

A5. α) Σ, β) Σ, γ) Λ, δ) Λ, ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

B1. Σωστή απάντηση είναι η β).

Μετά την κρούση οι δύο σφαίρες εκτελούν οριζόντιες βολές από το ίδιο ύψος, άρα για τους χρόνους καθόδου ισχύει:

$$t_1 = t_2 = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

Έχουμε:

$$x_2 = 3x_1 \Rightarrow v_2' t_2 = 3v_1' t_1 \Rightarrow v_2' = 3v_1' \Rightarrow$$

$$\frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 = 3 \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{3}{1}$$

B2. Σωστή απάντηση είναι η β).

$$\text{Α.Δ.Ο.: } \vec{P}_{\text{ολ. (πριν)}} = \vec{P}_{\text{ολ. (μετά)}} \Rightarrow$$

$$mv_0 = (m + M)V \Rightarrow V = \frac{mv_0}{m + M} \quad (1)$$

$$\frac{Q_{\text{κρούσης}}}{Q_{\text{τριβής}}} = \frac{3}{1} \Rightarrow Q_{\text{κρούσης}} = 3Q_{\text{τριβής}} \Rightarrow$$

$$K_{\text{ολ. (πριν)}} - K_{\text{ολ. (μετά)}} = 3K_{\text{ολ. (μετά)}} \Rightarrow$$

$$K_{\text{ολ. (πριν)}} = 4K_{\text{ολ. (μετά)}} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} mv_0^2 = 4 \cdot \frac{1}{2} (m + M)V^2 \Rightarrow$$

$$mv_0^2 = 4 \cdot (m + M) \left(\frac{mv_0}{m + M} \right)^2 \Rightarrow M = 3m$$

B3. Σωστή απάντηση είναι η γ).

Ισχύει:

$$K_2 = \frac{1}{3} K_1 \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} mv_2^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} mv_1^2 \quad \text{ή} \quad v_1 = \sqrt{3} v_2$$

Εφαρμόζοντας την Α.Δ.Ο. στον οριζόντιο άξονα x'x έχουμε:

$$mv_1 \eta \mu \theta = mv_2 \eta \mu \varphi \Rightarrow \sqrt{3} v_2 \frac{1}{2} = v_2 \eta \mu \varphi \Rightarrow$$

$$\varphi = 60^\circ$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για την κίνηση του σώματος Σ₁ όταν το νήμα είναι οριζόντιο και μέχρι να γίνει κατακόρυφο, εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας, οπότε έχουμε:

$$\text{Θ.Μ.Κ.Ε.: } \Delta K = \Sigma W_F \Rightarrow$$

$$K_{(\text{τελ.})} - K_{(\text{αρχ.})} = W_{W_1} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 v_0^2 = m_1 g l \Rightarrow$$

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2gl} \Rightarrow v_1 = 4 \text{ m/s}$$

Για την κίνηση του σώματος Σ₁ αμέσως μετά την κρούση και μέχρι να ακινητοποιηθεί στιγμιαία, εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας, οπότε έχουμε:

$$\text{Θ.Μ.Κ.Ε.: } \Delta K = \Sigma W_F \Rightarrow$$

$$K_{(\text{τελ.})} - K_{(\text{αρχ.})} = W_{W_1} \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2} m_1 v_1'^2 = -m_1 g l \Rightarrow$$

$$v_1' = 6 \text{ m/s}$$

Γ2. Θεωρούμε για την κρούση θετική φορά προς τα δεξιά.

$$\text{Α.Δ.Ο.: } \vec{P}_{\text{ολ. (πριν)}} = \vec{P}_{\text{ολ. (μετά)}} \Rightarrow$$

$$m_2 v_2 - m_1 v_1 = m_1 v_1' - m_2 v_2' \Rightarrow$$

$$v_2' = 0,5 \text{ m/s}$$

$$\Delta \vec{p}_2 = \vec{p}_{2(\text{μετά})} - \vec{p}_{2(\text{πριν})} \Rightarrow$$

$$\Delta p_2 = -m_2 v_2' - m_2 v_2 \Rightarrow \Delta p_2 = -6 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

$$\text{Γ3. } K_{\text{ολ. (πριν)}} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = 11,375 \text{ J}$$

$$K_{\text{ολ. (μετά)}} = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = 2,375 \text{ J}$$

Αφού $K_{ολ.(πριν)} \neq K_{ολ.(μετά)}$ η κρούση είναι ανελαστική.

Γ4. Για την κίνηση του σώματος Σ_2 αμέσως μετά την κρούση και μέχρι να σταματήσει, εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας, οπότε έχουμε:

$$\Theta.M.K.E.: \Delta K = \Sigma W_F \Rightarrow \Delta K = \Sigma W_F \Rightarrow$$

$$K_{(τελ.)} - K_{(αρχ.)} = W_T \Rightarrow -\frac{1}{2}m_2 v_2'^2 = -Td \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2}m_2 v_2'^2 = -\mu m_2 g d \Rightarrow \mu = \frac{v_2'^2}{2gd} \Rightarrow \mu = 0,05$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Εφαρμόζουμε το $\Theta.M.K.E.$ για την κίνηση της σφαίρας Σ_1 από τη χρονική στιγμή που αφέθηκε ελεύθερη μέχρι να φτάσει στο δάπεδο. Προκύπτει:

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 - 0 = m_1 g h \Rightarrow |v_1| = \sqrt{2gh} \Rightarrow$$

$$|v_1| = 4 \frac{m}{s}$$

Ισχύει:

$$\frac{1}{2}m_1 v_1'^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}m_1 v_1^2 \Rightarrow |v_1'| = \frac{|v_1|}{2} \Rightarrow$$

$$|v_1'| = 2 \frac{m}{s}$$

Δ2. Εφαρμόζουμε το $\Theta.M.K.E.$ για την ανοδική κίνηση της σφαίρας Σ_1 μετά την κρούση της με το δάπεδο. Ισχύει:

$$0 - \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 = -m_1 g h_{\max} \Rightarrow h_{\max} = \frac{v_1'^2}{2g} \Rightarrow$$

$$h_{\max} = 0,2 \text{ m}$$

Δ3. Εφαρμόζουμε το $\Theta.M.K.E.$ για την κίνηση του συσσωματώματος. Έχουμε:

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_{\tau}^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_{\kappa}^2 = (m_1 + m_2)gh_{\max} \Rightarrow$$

$$|v_{\kappa}| = \sqrt{v_{\tau}^2 - 2gh_{\max}} \Rightarrow |v_{\kappa}| = 3 \frac{m}{s}$$

Από την Α.Δ.Ο. για την πλαστική κρούση μεταξύ των δύο σφαιρών προκύπτει:

$$m_2 |v_2| = (m_1 + m_2) |v_{\kappa}| \Rightarrow$$

$$3m |v_2| = 4m |v_{\kappa}| \Rightarrow |v_2| = 4 \frac{m}{s}$$

Δ4. Το ζητούμενο ποσοστό % υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\Pi(\%) = \frac{\frac{1}{2}m_2 v_2^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_{\kappa}^2}{\frac{1}{2}m_2 v_2^2} 100\% \Rightarrow$$

$$\Pi(\%) = \frac{3m \cdot 16 - 4m \cdot 9}{3m \cdot 16} 100\% \Rightarrow$$

$$\Pi(\%) = 25\%$$

2ο Διαγώνισμα (Δ2)

ΘΕΜΑ Α

Α1. β), Α2. γ), Α3. δ), Α4. β)
Α5. α) Λ, β) Σ, γ) Λ, δ) Λ, ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Σωστή απάντηση είναι η **β**).

1η κρούση: B – Γ:

$$v_B = \frac{m - 4m}{m + 4m} v \Rightarrow v_B = -0,6v$$

(κινείται προς τα αριστερά)

$$v_{\Gamma} = \frac{2m}{m + 4m} v \Rightarrow v_{\Gamma} = 0,4v$$

2η κρούση: B – A:

$$v'_B = \frac{m - 5m}{m + 5m} v_B \Rightarrow v'_B = 0,4v$$

(κινείται προς τα δεξιά)

Επειδή $v'_B = v_{\Gamma}$ δε θα γίνει άλλη κρούση.

B2. Σωστή απάντηση είναι η α).

Αναλύουμε την ταχύτητα $\vec{v}_2$ σε δύο κάθετες συνιστώσες $\vec{v}_{2,x}$ και $\vec{v}_{2,y}$. Επειδή το σύστημα των δύο σφαιρών είναι μονωμένο (δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις), η ορμή του θα παραμένει σταθερή και στον άξονα $x'x$ και στον άξονα $y'y$. Οπότε:

Α.Δ.Ο. άξονας $y'y$:

$$\vec{P}_{ολ.(πριν)y} = \vec{P}_{ολ.(μετά)y} \Rightarrow 0 = m_1 v_1 - m_2 v_{2,y} \Rightarrow$$

$$m_1 v_1 = m_2 v_{2,y} \quad \xrightarrow{m_1=m_2, m_2=5m} \quad v_1 = 3v_2 \quad (1)$$

Α.Δ.Ο. άξονας $x'x$:

$$\vec{P}_{ολ.(πριν)x} = \vec{P}_{ολ.(μετά)x} \Rightarrow m_1 v_0 = m_2 v_{2,x} \Rightarrow$$

$$m_1 v_0 = m_2 v_2 \cos \varphi \quad \xrightarrow{m_1=m_2, m_2=5m} \quad v_0 = 4v_2 \quad (2)$$

$$\frac{Q}{K_{I(αρχ.)}} = \frac{K_{ολ.(πριν)} - K_{ολ.(μετά)}}{K_{ολ.(πριν)}} =$$

$$= 1 - \frac{K_{ολ.(μετά)}}{K_{ολ.(πριν)}} = 1 - \frac{\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2}{\frac{1}{2} m_1 v_0^2} \quad \xrightarrow{m_1=m_2, m_2=5m} =$$

$$= 1 - \frac{v_1^2 + 5v_2^2}{v_0^2} \stackrel{(1)}{=} 1 - \frac{14v_2^2}{v_0^2} \stackrel{(2)}{=} 1 - \frac{14v_2^2}{16v_2^2} = \frac{1}{8}$$

B3. Σωστή απάντηση είναι η β).

Επειδή η σφαίρα m_2 χτυπά στον τοίχο ελαστικά ανακλάται με ίδιο μέτρο ταχύτητας δηλαδή $|v_2''| = |v_2'|$. Αλγεβρικά ισχύει $v_2'' = -v_2'$

Για να κρατούν σταθερή απόσταση οι σφαίρες θα πρέπει η σφαίρα m_1 να κινηθεί προς τα αριστερά και η m_2 μετά την κρούση της με τον τοίχο να έχει ίδια ταχύτητα με αυτή της σφαίρας m_1 .

Αλγεβρικά θα ισχύει:

$$v_1' = v_2'' \Rightarrow v_1' = -v_2' \Rightarrow |v_1'| = |v_2'| \quad (\text{ίσα μέτρα})$$

Όταν γίνει η κρούση λοιπόν των 2 σφαιρών αποκτούν ταχύτητες ίσων μέτρων. Όταν η

σφαίρα m_2 χτυπά στον τοίχο θα έχει διανύσει απόσταση $d = 5 \text{ m}$ και στον ίδιο χρόνο η σφαίρα m_1 που κινείται αντίθετα έχει διανύσει και αυτή απόσταση $d = 5 \text{ m}$. Έτσι, μετά την ελαστική κρούση της σφαίρας m_2 με τον τοίχο, η απόσταση που θα απέχουν τελικά οι 2 σφαίρες θα είναι $S = 2d = 10 \text{ m}$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για την κίνηση της σφαίρας m_1 μέχρι το σημείο της κρούσης, εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας, οπότε έχουμε:

$$\Theta.Μ.Κ.Ε. : \Delta K = \Sigma W_F \Rightarrow$$

$$K_{(τελ.)} - K_{(αρχ.)} = W_{w_1} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = m_1 g l \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gl} \Rightarrow v_1' = 6 \text{ m/s}$$

Γ2. Αφού η κρούση είναι κεντρική και ελαστική ισχύουν οι τύποι:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \Rightarrow v_1' = 2 \text{ m/s}$$

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \Rightarrow v_2' = 8 \text{ m/s}$$

Το % ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας της σφαίρας που μεταφέρεται στον κύβο, υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\Pi = \frac{K_2'}{K_1} \cdot 100\% = \frac{\frac{1}{2} m_2 v_2'^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2} \cdot 100\% \Rightarrow$$

$$\Pi = \frac{800}{9} \%$$

Γ3. Για την κίνηση της σφαίρας m_1 μετά την κρούση και μέχρι να ακινητοποιηθεί στιγμιαία, εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας, οπότε έχουμε:

$$\Theta.Μ.Κ.Ε. : \Delta K = \Sigma W_F \Rightarrow$$

$$K_{(τελ.)} - K_{(αρχ.)} = W_{w_1} \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2} m_1 v_1'^2 = -m_1 g h \Rightarrow h = \frac{v_1'^2}{2g} \Rightarrow h = 0,2 \text{ m}$$

Για τη γωνία εκτροπής έχουμε:

$$\sigma\eta\theta = \frac{l-h}{l} = \frac{8}{9}$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T = w_{1,y} = m_1 g \sigma\eta\theta \Rightarrow$$

$$T = \frac{80}{9} \text{ N}$$

Γ4. Για την κίνηση του κύβου αμέσως μετά την κρούση και μέχρι να σταματήσει, εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας, οπότε έχουμε:

$$\Theta.M.K.E.: \Delta K = \Sigma W_F \Rightarrow \Delta K = \Sigma W_F \Rightarrow$$

$$K_{(\text{τελ.})} - K_{(\text{αρχ.})} = W_T \Rightarrow -\frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = -T d \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = -\mu m_2 g d \Rightarrow d = \frac{v_2'^2}{2\mu g} \Rightarrow \mathbf{d = 4 \text{ m}}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Αφού κατά την κρούση το βλήμα χάνει το 75% της αρχικής του κινητικής ενέργειας, τότε μετά την κρούση θα του έχει απομείνει το 25% της αρχικής του κινητικής ενέργειας, άρα:

$$K_{\beta\lambda.(\text{μετά})} = 25\% K_{\beta\lambda.(\text{πριν})} \Rightarrow$$

$$K_{\beta\lambda.(\text{μετά})} = \frac{K_{\beta\lambda.(\text{πριν})}}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} m v_0'^2 = \frac{1}{4} m v_0^2 \Rightarrow$$

$$v_0' = \frac{v_0}{2} \Rightarrow \mathbf{v_0' = 100 \text{ m/s}}$$

$$\mathbf{A.A.O.:} \quad \vec{P}_{\text{ολ}(\text{πριν})} = \vec{P}_{\text{ολ}(\text{μετά})} \Rightarrow$$

$$m v_0 = m v_0' + M V \Rightarrow \mathbf{V = 2 \text{ m/s}}$$

$$\mathbf{\Delta 2.} \quad F = \frac{\Delta p_\Sigma}{\Delta t} = \frac{P_{\Sigma(\text{μετά})} - P_{\Sigma(\text{μετά})}}{\Delta t} = \frac{M V - 0}{\Delta t} \Rightarrow$$

$$\mathbf{F = 500 \text{ N}}$$

$$\mathbf{\Delta 3.} \quad Q_{\text{κρούσης}} = K_{\text{ολ.}(\text{πριν})} - K_{\text{ολ.}(\text{μετά})} =$$

$$= \frac{1}{2} m v_0^2 - \left(\frac{1}{2} m v_0'^2 + \frac{1}{2} M V^2 \right) \Rightarrow$$

$$\mathbf{Q_{\text{κρούσης}} = 745 \text{ J}}$$

Δ4. Πριν την κρούση το σώμα Σ ισορροπεί, άρα:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T = W_{(x)} \Rightarrow$$

$$\mu_{\text{op.}} M g \cdot \sigma\eta\theta = M g \cdot \eta\mu\theta \Rightarrow$$

$$\mu_{\text{op.}} = \epsilon\phi\theta = \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\eta\theta} \Rightarrow \mu_{\text{op.}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\mu_{\text{ολ.}} = 90\% \mu_{\text{op.}} \Rightarrow \mu_{\text{ολ.}} = 0,9 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \mu_{\text{ολ.}} = 0,3\sqrt{3}$$

Μετά την κρούση το σώμα Σ εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση προς τα κάτω αφού $w_{(x)} > T_{\text{ολ.}}$.

Άξονας x: 2ος Νόμος του Νεύτωνα

$$\Sigma F_x = M a \Rightarrow$$

$$w_{(x)} - T_{\text{ολ.}} = M a \Rightarrow$$

$$M g \cdot \eta\mu\theta - \mu_{\text{ολ.}} M g \cdot \sigma\eta\theta = M a \Rightarrow \mathbf{a = 0,5 \text{ m/s}^2}$$

$$d = V t_1 + \frac{1}{2} a t_1^2 \Rightarrow t_1^2 + 8 t_1 - 20 = 0 \Rightarrow \mathbf{t_1 = 2 \text{ s}}$$

3ο Διαγώνισμα (Δ3)

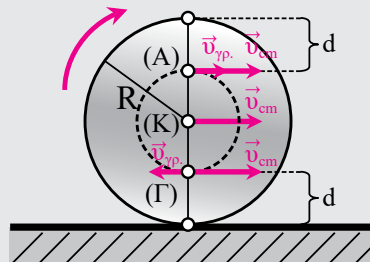
ΘΕΜΑ Α

Α1. α), Α2. γ), Α3. δ), Α4. α)
Α5. α) Λ, β) Σ, γ) Σ, δ) Λ, ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Σωστή απάντηση είναι η **β)**.

Δικαιολόγηση



Σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας, για κάθε σημείο του δίσκου ισχύει $\vec{v} = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_{\gamma p}$.
Για το σημείο (Α) ισχύει:

$$v_{(A)} = v_{cm} + v_{\gamma p} \Rightarrow v_{(A)} = v_{cm} + \omega \cdot (R - d) \quad (1)$$

Για το σημείο (Γ) ισχύει:

$$v_{(Γ)} = v_{cm} - v_{\gamma p} \Rightarrow v_{(Γ)} = v_{cm} - \omega \cdot (R - d) \quad (2)$$

Για τον λόγο των μέτρων των ταχυτήτων των σημείων (Α) και (Γ) ισχύει:

$$\begin{aligned} \frac{v_A}{v_{\Gamma}} = 5 &\Rightarrow \frac{v_{cm} + \omega \cdot (R - d)}{v_{cm} - \omega \cdot (R - d)} = 5 \Rightarrow \\ v_{cm} + \omega \cdot (R - d) &= 5v_{cm} - 5\omega \cdot (R - d) \Rightarrow \\ \omega R - \omega d &= 4v_{cm} - 5\omega R + 5\omega d \Rightarrow \\ 6\omega R &= 4v_{cm} + 6\omega d \stackrel{v_{cm} = \omega R}{\Rightarrow} 2\omega R = 6\omega d \Rightarrow \\ d &= \frac{R}{3} \end{aligned}$$

B2. Σωστή απάντηση είναι η β).

Δικαιολόγηση

Καθώς το νήμα ξετυλίγεται, ο δίσκος εκτελεί μεταφορική και στροφική κίνηση. Η ταχύτητα κάθε σημείου του δίσκου είναι:

$$\vec{v} = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_{\gamma p},$$

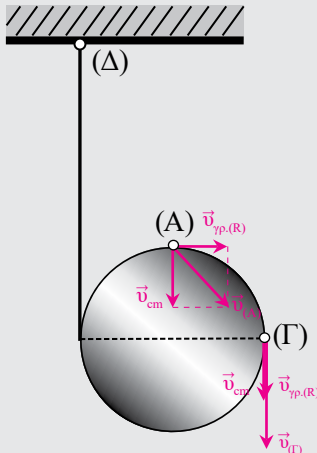
όπου για το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας ισχύει $v_{\gamma p} = \omega R$.
Για το σημείο Α έχουμε:

$$v_A = \sqrt{v_{cm}^2 + v_{\gamma p}^2} = \sqrt{2v_{cm}^2} = v_{cm} \sqrt{2}$$

Για το σημείο Γ έχουμε: $v_{\Gamma} = v_{cm} + v_{\gamma p} = 2v_{cm}$

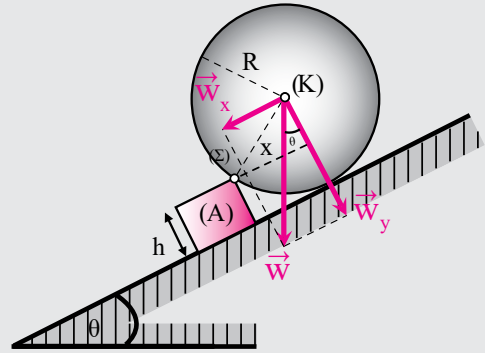
Ο λόγος των μέτρων των ταχυτήτων των σημείων Α και Γ του δίσκου είναι:

$$\frac{v_A}{v_{\Gamma}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



B3. Σωστή απάντηση είναι η α).

Δικαιολόγηση



Για να υπερπηδήσει η σφαίρα το εμπόδιο θα πρέπει:

$$|\tau_{w_x(\Sigma)}| \geq |\tau_{w_y(\Sigma)}| \Rightarrow w_x \cdot (R - h) \geq w_y \cdot x \Rightarrow$$

$$w \cdot \eta \mu \theta \cdot (R - h) \geq w \cdot \sigma \nu \theta \cdot x \Rightarrow$$

$$\eta \mu \theta \cdot (R - h) \geq \sigma \nu \theta \cdot x \Rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (R - h) \geq \frac{1}{2} \cdot x \Rightarrow \sqrt{3} \cdot (R - h) \geq x \quad (1)$$

Για τον μοχλοβραχίονα x της συνιστώσας w_y του βάρους ως προς το σημείο Σ, εφαρμόζουμε το πυθαγόρειο θεώρημα και έχουμε:

$$R^2 = x^2 + (R - h)^2 \Rightarrow x = \sqrt{h \cdot (2R - h)} \quad (2)$$

$$(1) \Rightarrow \sqrt{3} \cdot (R - h) \geq \sqrt{h \cdot (2R - h)} \Rightarrow$$

$$3 \cdot (R - h)^2 \geq h \cdot (2R - h) \Rightarrow$$

$$3R^2 + 3h^2 - 6Rh \geq 2Rh - h^2 \Rightarrow$$

$$4h^2 - 8Rh + 3R^2 \geq 0 \Rightarrow$$

$$4h_{\min}^2 - 8Rh_{\min} + 3R^2 = 0$$

$$\Delta = 64R^2 - 4 \cdot 4 \cdot 3R^2 = 16R^2$$

$$h_{\min} = \frac{8R \pm 4R}{8} \Rightarrow h_{\min(1)} = \frac{3R}{2}, h_{\min(2)} = \frac{R}{2}$$

Επειδή $h < R$ δεκτή λύση είναι η: $h_{\min} = \frac{R}{2}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας του δίσκου τη χρονική στιγμή t_2 είναι:

$$v_{cm,2} = \alpha_{cm} t_2 \Rightarrow v_{cm,2} = \alpha_{cm} 2t_1 \Rightarrow$$

$$v_{cm,2} = 2v_{cm,1} \Rightarrow v_{cm,2} = 16 \frac{m}{s}$$

Γ2. Ο δίσκος κυλίζει χωρίς να ολισθαίνει, επομένως προκύπτει:

$$\alpha_{cm} = \alpha_{γων} R \Rightarrow R = \frac{\alpha_{cm}}{\alpha_{γων}} \Rightarrow R = 0,4m$$

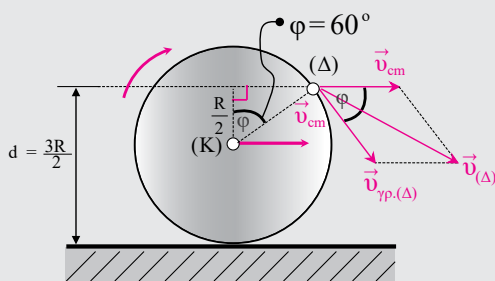
Γ3. Υπολογίζουμε τη χρονική στιγμή t_1 . Έχουμε:

$$v_{cm,1} = \alpha_{cm} t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{v_{cm,1}}{\alpha_{cm}} \Rightarrow t_1 = 2s$$

Για τον αριθμό των περιστροφών του δίσκου ισχύει:

$$N = \frac{\Delta\theta}{2\pi} \Rightarrow N = \frac{\frac{1}{2} \alpha_{γων} t_1^2}{2\pi} \Rightarrow N = \frac{10}{\pi} \text{ περ.}$$

Γ4.



Ισχύει:

$$v_{\gamma p,(\Delta)} = v_{cm} = \omega R$$

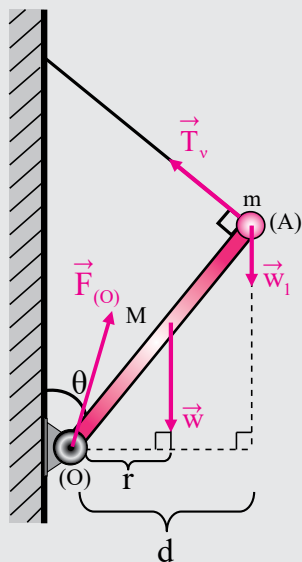
Για το μέτρο της ταχύτητας του σημείου Δ, προκύπτει:

$$v_{(\Delta),1} = \sqrt{v_{\gamma p,(\Delta)}^2 + v_{cm,1}^2 + 2v_{\gamma p,(\Delta)} v_{cm,1} \cdot \cos 60^\circ} \Rightarrow$$

$$v_{(\Delta),1} = \sqrt{3} v_{cm,1} \Rightarrow v_{(\Delta),1} = 8\sqrt{3} \frac{m}{s}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.



Το σύστημα ισορροπεί επομένως:

$$\Sigma \tau_{(O)} = 0 \Rightarrow T_v l - Mgr - mgd = 0 \Rightarrow$$

$$T_v l - Mg \frac{l}{2} \cdot \eta \mu \theta - mgl \cdot \eta \mu \theta = 0 \Rightarrow$$

$$T_v = \frac{Mg}{2} \cdot \eta \mu \theta + mg \cdot \eta \mu \theta (1) \Rightarrow T_v = 15N$$

Δ2. Από τη σχέση (1) θέτοντας όπου

$$T_v = T_{\theta p.} = 21N \text{ έχουμε:}$$

$$(1) \Rightarrow T_{\theta p.} = \frac{Mg}{2} \cdot \eta \mu \theta + m_{\min} g \cdot \eta \mu \theta \Rightarrow$$

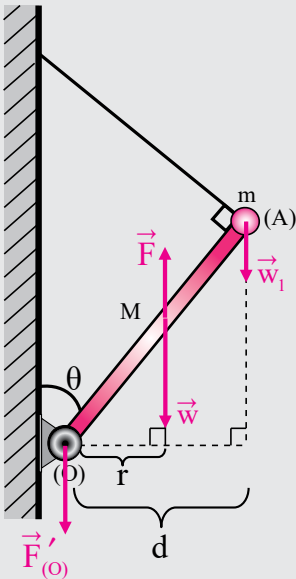
$$m_{\min} = 2kg$$

Δ3. Αφού η δύναμη που δέχεται το σύστημα ράβδος - σημειακή μάζα από την άρθρωση έχει μόνο κατακόρυφη συνιστώσα, θα πρέπει η δύναμη που ασκείται στο σύστημα από το νήμα να είναι μηδέν. Αφού το σύστημα ισορροπεί, έχουμε:

$$\begin{aligned}\Sigma \tau_{(O)} = 0 &\Rightarrow -Mgr - mgd + Fr = 0 \Rightarrow \\ -Mg \frac{1}{2} \cdot \eta \mu \theta - mgl \cdot \eta \mu \theta + F \frac{1}{2} \cdot \eta \mu \theta &= 0 \Rightarrow \\ F = Mg + 2mg &\Rightarrow \mathbf{F = 50N}\end{aligned}$$

Δ4. Για το μέτρο της δύναμης που δέχεται το σύστημα ράβδος - σημειακή μάζα από την άρθρωση έχουμε:

$$\begin{aligned}\Sigma F_y = 0 &\Rightarrow -F'_{(O)} + F - Mg - mg = 0 \Rightarrow \\ \mathbf{F'_{(O)} = 10N}\end{aligned}$$



4ο Διαγώνισμα (Δ4)

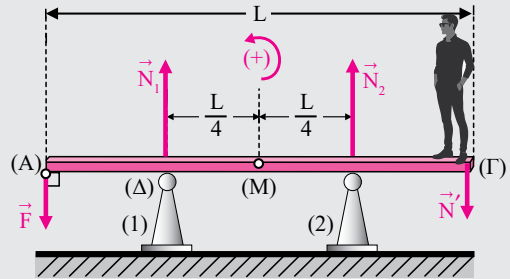
ΘΕΜΑ Α

A1. α), A2. δ), A3. δ), A4. β)
A5. α) Λ, β) Σ, γ) Λ, δ) Σ, ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

B1. Σωστή απάντηση είναι η **β**).

Δικαιολόγηση



Στον άνθρωπο ασκείται η κάθετη δύναμη στήριξης $\vec{N}$ από τη ράβδο.

Από την ισορροπία του ανθρώπου προκύπτει:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = w$$

Ο άνθρωπος ασκεί στη ράβδο την κάθετη δύναμη $\vec{N}'$ που είναι η αντίδραση της $\vec{N}$. Ισχύει επομένως:

$$N' = w$$

Από τη συνθήκη ισορροπίας στον κατακόρυφο άξονα $y'y'$ προκύπτει:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_1 + N_2 = N' + F \Rightarrow$$

$$N_1 + N_2 = 3w \quad (1)$$

Προκύπτει:

$$\Sigma \tau_{\Delta} = 0 \Rightarrow F \frac{L}{4} + N_2 \frac{L}{2} - N' \frac{3L}{4} = 0 \Rightarrow$$

$$2w \frac{L}{4} + N_2 \frac{L}{2} - w \frac{3L}{4} = 0 \Rightarrow N_2 = \frac{w}{2}$$

Από τη σχέση (1) επίσης έχουμε:

$$N_1 = \frac{5w}{2}$$

B2. Α. Σωστή απάντηση είναι η **α**).

Δικαιολόγηση

$$v_1 = v_{v,1} = v_{(I)} = v_{\pi p.(T)} = \omega_{(T)} r \Rightarrow$$

$$v_1 = \omega_{(T)} r \quad (1)$$

$$v_{(H)} = v_{v,2} = v_{(\Theta)} = v_{\pi p.(\Delta)} + v_{cm.(\Delta)} \Rightarrow$$

$$v_{\pi p.(T)} = v_{\pi p.(\Delta)} + v_{cm.(\Delta)} \Rightarrow$$

$$\omega_{(T)} r = v_{\pi p.(\Delta)} + v_{cm.(\Delta)} \Rightarrow$$

$$v_1 = v_{\gamma p(\Delta)} + v_{cm(\Delta)} \quad (2)$$

$$v_{(Z)} = v_{v.3} = v_{(E)} = v_{cm(\Delta)} - v_{\gamma p(\Delta)} \Rightarrow$$

$$0 = v_{cm(\Delta)} - v_{\gamma p(\Delta)} \Rightarrow v_{cm(\Delta)} = v_{\gamma p(\Delta)} \quad (3)$$

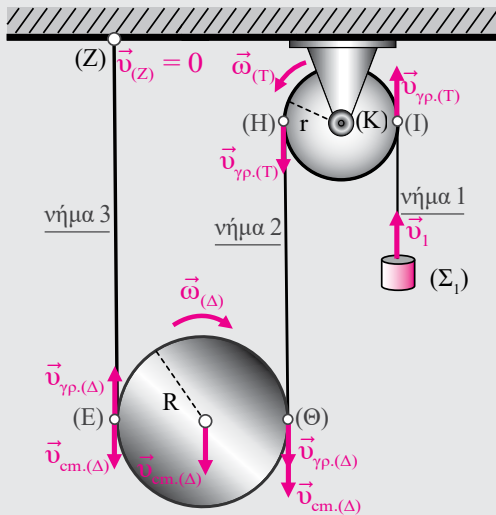
$$(2) \Rightarrow v_1 = 2v_{cm(\Delta)} \Rightarrow \frac{\Delta v_1}{\Delta t} = \frac{\Delta(2v_{cm(\Delta)})}{\Delta t} \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta v_1}{\Delta t} = 2 \frac{\Delta v_{cm(\Delta)}}{\Delta t} \Rightarrow \alpha_1 = 2\alpha_{cm(\Delta)} \Rightarrow$$

$$\alpha_{cm(\Delta)} = \frac{\alpha_1}{2}$$

Β. Σωστή απάντηση είναι η γ).

Δικαιολόγηση



$$(3) \Rightarrow v_{cm(\Delta)} = v_{\gamma p(\Delta)} \Rightarrow \frac{v_1}{2} = v_{\gamma p(\Delta)} \Rightarrow$$

$$\frac{\omega_{(T)} r}{2} = \omega_{(\Delta)} R \Rightarrow \frac{\omega_{(T)} r}{2} = \omega_{(\Delta)} 2r \Rightarrow$$

$$\omega_{(\Delta)} = \frac{\omega_{(T)}}{4} \Rightarrow \frac{\Delta \omega_{(\Delta)}}{\Delta t} = \frac{\Delta \left(\frac{\omega_{(T)}}{4} \right)}{\Delta t} \Rightarrow$$

$$\alpha_{\gamma \omega v(\Delta)} = \frac{\alpha_{\gamma \omega v(T)}}{4} \Rightarrow$$

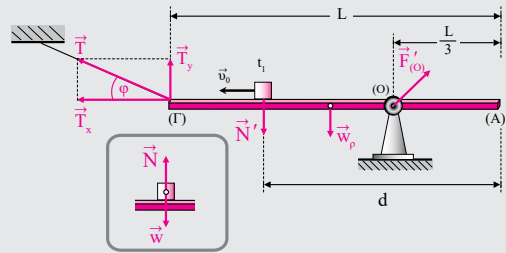
$$\frac{1}{2} \alpha_{\gamma \omega v(\Delta)} \Delta t^2 = \frac{1}{2} \alpha_{\gamma \omega v(T)} \Delta t^2 \Rightarrow$$

$$\Delta \theta_{(\Delta)} = \frac{\Delta \theta_{(T)}}{4} \Rightarrow \frac{\Delta \theta_{(\Delta)}}{2\pi} = \frac{\Delta \theta_{(T)}}{4 \cdot 2\pi} \Rightarrow$$

$$N_{(\Delta)} = \frac{N_{(T)}}{4}$$

Β3. Σωστή απάντηση είναι η β).

Δικαιολόγηση



Έστω ότι τη χρονική στιγμή t_1 που σπάει το νήμα, το σώμα (Σ) έχει διανύσει απόσταση d πάνω στη ράβδο. Στο παραπάνω σχήμα φαίνονται οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο και στο σώμα (Σ) (πλαίσιο).

Από την ισορροπία του σώματος (Σ) στον άξονα y , έχουμε:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = w \Rightarrow N = mg$$

Η ράβδος από το σώμα (Σ) δέχεται δύναμη N' για την οποία ισχύει $N' = N = mg$ (δράση – αντίδραση). Οριακά, τη στιγμή που κόβεται το νήμα η ράβδος ισορροπεί.

Ισορροπία ράβδου (θετική φορά ροπών η αντιωρολογιακή):

$$\Sigma \tau_{(O)} = 0 \Rightarrow \tau_{T_x} + \tau_{T_y} + \tau_{N'} + \tau_{w_p} + \tau_{F_{(O)}} = 0 \Rightarrow$$

$$0 - T_y \cdot \left(L - \frac{L}{3} \right) + N' \cdot \left(d - \frac{L}{3} \right) + Mg \cdot \left(\frac{L}{2} - \frac{L}{3} \right) + 0 = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
 -T \cdot \eta \mu 30^\circ \cdot \frac{2L}{3} + mg \cdot \left(d - \frac{L}{3}\right) + Mg \cdot \frac{L}{6} &= 0 \Rightarrow \\
 -T \frac{1}{2} \cdot \frac{2L}{3} + mg \cdot \left(d - \frac{L}{3}\right) + 6mg \cdot \frac{L}{6} &= 0 \Rightarrow \\
 -T \cdot \frac{L}{3} + mg \cdot \left(d - \frac{L}{3}\right) + mgL &= 0(1)
 \end{aligned}$$

Τη στιγμή που το νήμα σπάει, η τάση του νήματος είναι ίση με το όριο θραύσεως, άρα $T = T_{\theta p.} = 4mg$ οπότε η σχέση (1) γίνεται:

$$\begin{aligned}
 -4mg \cdot \frac{L}{3} + mg \cdot \left(d - \frac{L}{3}\right) + mgL &= 0 \Rightarrow \\
 -\frac{4L}{3} + d - \frac{L}{3} + L &= 0 \Rightarrow d = \frac{2L}{3}
 \end{aligned}$$

Το σώμα (Σ) εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση οπότε για τη χρονική στιγμή t_1 έχουμε:

$$t_1 = \frac{d}{v_0} \Rightarrow t_1 = \frac{2L}{3v_0}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Ισχύει:

$$\eta \mu \phi = \frac{h}{s_{cm}} \Rightarrow s_{cm} = \frac{h}{\eta \mu \phi} \Rightarrow s_{cm} = 2m$$

Για το μέτρο της επιβράδυνσης του κέντρου μάζας της σφαίρας, προκύπτει:

$$s_{cm} = \frac{v_{cm,0}^2}{2\alpha_{cm}} \Rightarrow \alpha_{cm} = \frac{v_{cm,0}^2}{2s_{cm}} \Rightarrow \alpha_{cm} = 1 \frac{m}{s^2}$$

Γ2. Η σφαίρα κυλίνεται χωρίς να ολισθαίνει, επομένως ισχύει:

$$s_{cm} = R \cdot \Delta \theta \Rightarrow \Delta \theta = \frac{s_{cm}}{R} \Rightarrow \Delta \theta = 4 \text{ rad}$$

Για το συνολικό αριθμό των περιστροφών έχουμε:

$$N = \frac{\Delta \theta}{2\pi} \Rightarrow N = \frac{2}{\pi} \pi \epsilon\rho.$$

Γ3. Ισχύει:

$$\eta \mu \phi = \frac{h'}{s'_{cm}} \Rightarrow s'_{cm} = \frac{h'}{\eta \mu \phi} \Rightarrow s'_{cm} = 1,5m$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned}
 s'_{cm} &= v_{cm,0} t_1 - \frac{1}{2} \alpha_{cm} t_1^2 \Rightarrow \\
 1,5 &= 2t_1 - 0,5t_1^2 \Rightarrow t_1 = 1s
 \end{aligned}$$

Επίσης, ισχύει:

$$v_{cm,1} = v_{cm,0} - \alpha_{cm} t_1 \Rightarrow v_{cm,1} = 1 \frac{m}{s}$$

Για το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας της σφαίρας τη χρονική στιγμή t_1 , τελικά, προκύπτει:

$$\omega_1 = \frac{v_{cm,1}}{R} \Rightarrow \omega_1 = 2 \frac{\text{rad}}{s}$$

Γ4. Βρίσκουμε τη χρονική στιγμή που ακινητοποιείται η σφαίρα. Προκύπτει:

$$0 = v_{cm,0} - \alpha_{cm} t_{ολ} \Rightarrow t_{ολ} = \frac{v_{cm,0}}{\alpha_{cm}} \Rightarrow t_{ολ} = 2s$$

Υπολογίζουμε το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας της σφαίρας 1,5 s πριν ακινητοποιηθεί. Έχουμε:

$$v_{cm} = v_{cm,0} - \alpha_{cm} (t_{ολ} - 1,5) \Rightarrow v_{cm} = 1,5 \frac{m}{s}$$

Για το σημείο (Ζ) έχουμε:

$$\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_{cm} + \vec{\alpha}_\epsilon + \vec{\alpha}_\kappa \Rightarrow \vec{\alpha} = 2\vec{\alpha}_{cm} + \vec{\alpha}_\kappa \Rightarrow$$

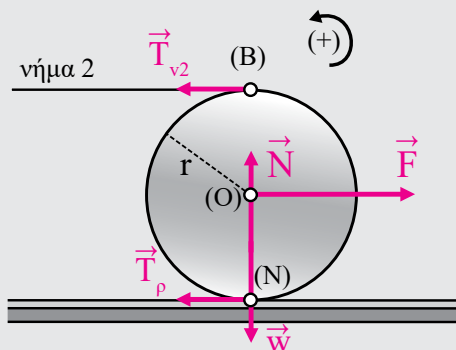
$$\alpha = \sqrt{(2\alpha_{cm})^2 + \left(\frac{v_{cm}^2}{R}\right)^2} \Rightarrow \alpha = \sqrt{24,25} \frac{m}{s^2}$$

ΘΕΜΑ Δ

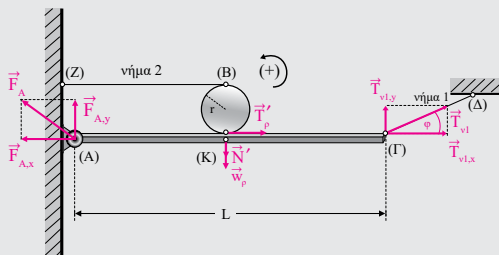
Δ1. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι δυνάμεις που δέχεται ο τροχός.

Αφού αυτός ισορροπεί, θα πρέπει η συνισταμένη των ροπών, ως προς οποιοδήποτε σημείο του, να είναι μηδέν, άρα και ως προς το σημείο (Ν) επαφής του τροχού με τη ράβδο. Έχουμε:

$$\begin{aligned}\Sigma \tau_{(N)} = 0 &\Rightarrow \tau_N + \tau_w + \tau_{T_{v2}} + \tau_{T_p} + \tau_F = 0 \Rightarrow \\ &+ T_{v2} \cdot 2R - F \cdot R = 0 \Rightarrow \\ T_{v2} &= \frac{F}{2} \Rightarrow T_{v2} = 5N\end{aligned}$$



Δ2. Στο ακόλουθο σχήμα φαίνονται οι δυνάμεις που δέχεται η ράβδος.



Οι δυνάμεις $\vec{N}'$ και $\vec{T}_p$ είναι οι αντιδράσεις των δυνάμεων που δέχεται ο τροχός από τη ράβδο. Γι' αυτές ισχύουν: $N' = N$ και $T_p' = T_p$

Από την ισορροπία του τροχού στον $y'y$ άξονα έχουμε $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = w = mg = 40N$

Οπότε $N' = N = 40N$

Ομοίως, από την ισορροπία του τροχού στον $x'x$ άξονα έχουμε:

$$\begin{aligned}\Sigma F_x = 0 &\Rightarrow F = T_{v2} + T_p \Rightarrow \\ T_p &= F - T_{v2} \Rightarrow T_p = 5N \\ \text{Οπότε } T_p' &= T_p = 5N\end{aligned}$$

Αφού η ράβδος ισορροπεί, θα πρέπει η συνισταμένη των ροπών ως προς οποιοδήποτε σημείο της να είναι μηδέν, άρα και ως προς το σημείο (Α) που είναι αρθρωμένη με τον κατακόρυφο τοίχο.

Επομένως, έχουμε:

$$\begin{aligned}\Sigma \tau_{(A)} = 0 &\Rightarrow \\ \tau_{N'} + \tau_{w_p} + \tau_{T_{v1,x}} + \tau_{T_{v1,y}} + \tau_{T_p'} + \tau_{F_A} &= 0 \Rightarrow \\ -N' \cdot \frac{L}{2} - Mg \cdot \frac{L}{2} + T_{v1,y} \cdot L &= 0 \Rightarrow T_{v1,y} = 30N\end{aligned}$$

Όμως

$$\begin{aligned}T_{v1,y} &= T_{v1} \cdot \eta\mu\phi \Rightarrow T_{v1} = \frac{T_{v1,y}}{\eta\mu\phi} \Rightarrow T_{v1} = 50N \\ T_{v1,x} &= T_{v1} \cdot \sigma\upsilon\nu\phi \Rightarrow T_{v1,x} = 40N\end{aligned}$$

Από την ισορροπία της ράβδου στον $y'y$ άξονα, έχουμε:

$$\begin{aligned}\Sigma F_y = 0 &\Rightarrow F_{A,y} + T_{v1,y} = N' + w_p \Rightarrow \\ F_{A,y} &= 30N\end{aligned}$$

Από την ισορροπία της ράβδου στον $x'x$ άξονα, έχουμε:

$$\begin{aligned}\Sigma F_x = 0 &\Rightarrow F_{A,x} = T_{v1,x} + T_p' \Rightarrow \\ F_{A,x} &= 45N\end{aligned}$$

Για το μέτρο της δύναμης που δέχεται η ράβδος από την άρθρωση ισχύει:

$$\begin{aligned}F_A &= \sqrt{F_{A,x}^2 + F_{A,y}^2} = \sqrt{45^2 + 30^2} \Rightarrow \\ F_A &= 15\sqrt{13}N \Rightarrow F_A = 54N\end{aligned}$$

Δ3. Τη χρονική στιγμή t_1 που ο τροχός φτάνει στο άκρο (Γ) της ράβδου έχει διαγράψει $\frac{4}{\pi}$ περιστροφές και επειδή κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει πάνω στη ράβδο ισχύει:

$$\begin{aligned}N &= \frac{\Delta\theta}{2\pi} \Rightarrow N = \frac{\Delta\theta \cdot r}{2\pi r} \Rightarrow N = \frac{\Delta x}{2\pi r} \Rightarrow \\ \Delta x &= N \cdot 2\pi r \Rightarrow \Delta x = 0,8m\end{aligned}$$

Η απόσταση που διανύει ο τροχός από το μέσο της ράβδου (Κ) και μέχρι να φτάσει στο άκρο της (Γ), υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\Delta x = \frac{L}{2} \Rightarrow L = 2 \cdot \Delta x \Rightarrow L = 1,6\text{m}$$

Δ4. Η κίνηση του τροχού είναι ομαλά επιταχυνόμενη. Για τη μεταφορική του κίνηση, από το μέσο της ράβδου (Κ) και μέχρι να φτάσει στο άκρο της (Γ), ισχύει:

$$\Delta x = \frac{1}{2} \alpha_{\text{cm}} t_1^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2\Delta x}{\alpha_{\text{cm}}}} \Rightarrow t_1 = 0,8\text{s}$$

Η ταχύτητα του κέντρου μάζας του τροχού τη χρονική στιγμή t_1 είναι:

$$v_{\text{cm}} = \alpha_{\text{cm}} t_1 \Rightarrow v_{\text{cm}} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

5ο Διαγώνισμα (Δ5)

ΘΕΜΑ Α

A1. δ), A2. δ), A3. γ), A4. δ)
A5. α) Σ, β) Σ, γ) Σ, δ) Σ, ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

B1. Α. Σωστή απάντηση είναι η γ).

Δικαιολόγηση

Έχουμε:

$$\omega = \omega_{\delta} = 2\pi f_{\delta} \Rightarrow$$

$$\omega = 8 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Προκύπτει:

$$\frac{K_{\text{max}}}{U_{\text{max}}} = \frac{\frac{1}{2} m v_{\text{max}}^2}{\frac{1}{2} k A^2} \Rightarrow \frac{K_{\text{max}}}{U_{\text{max}}} = \frac{\frac{1}{2} m \omega^2 A^2}{\frac{1}{2} k A^2} \Rightarrow$$

$$\frac{K_{\text{max}}}{U_{\text{max}}} = \frac{m \omega^2}{k} \Rightarrow$$

$$\frac{K_{\text{max}}}{U_{\text{max}}} = 0,64$$

B. Σωστή απάντηση είναι η β).

Δικαιολόγηση

$$\text{Ισχύει: } f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow f_0 = \frac{5}{\pi} \text{Hz}$$

Το ζητούμενο ποσοστό επί τοις εκατό είναι:

$$\Pi\% = \frac{f_0 - f_{\delta}}{f_{\delta}} 100\% \Rightarrow \Pi(\%) = 25\%$$

B2. Α. Σωστή απάντηση είναι η β).

Δικαιολόγηση

Ισχύει:

$$K = \frac{3}{4} E_T$$

Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας ταλάντωσης, έχουμε:

$$K + U = E_T \Rightarrow U = E_T - \frac{3}{4} E_T \Rightarrow U = \frac{1}{4} E_T$$

Τελικά προκύπτει:

$$\frac{U}{K} = \frac{\frac{1}{4} E_T}{\frac{3}{4} E_T} \Rightarrow \frac{U}{K} = \frac{1}{3}$$

B. Σωστή απάντηση είναι η α).

Δικαιολόγηση

Προκύπτει:

$$\frac{U}{K} = \frac{U}{E_T - U} \Rightarrow \frac{U}{K} = \frac{\frac{1}{2} D x^2}{\frac{1}{2} D A^2 - \frac{1}{2} D x^2} \Rightarrow$$

$$\frac{U}{K} = \frac{\frac{3A^2}{4}}{\frac{A^2}{4}} \Rightarrow \frac{U}{K} = 3$$

B3. Α. Σωστή απάντηση είναι η β).

Δικαιολόγηση

Ισχύει:

$$\frac{E_1}{E_0} = \frac{\frac{1}{2} D A_1^2}{\frac{1}{2} D A_0^2} \Rightarrow \frac{E_1}{E_0} = \frac{\frac{A_0^2}{16}}{A_0^2} \Rightarrow \frac{E_1}{E_0} = \frac{1}{16}$$

Β. Σωστή απάντηση είναι η β).

Για το έργο της δύναμης αντίστασης έχουμε:

$$W_{F_{\text{αντ}}} = E_1 - E_0 \Rightarrow W_{F_{\text{αντ}}} = \frac{E_0}{16} - E_0 \Rightarrow$$

$$W_{F_{\text{αντ}}} = -\frac{15}{16} \cdot \frac{1}{2} DA_0^2 \Rightarrow$$

$$W_{F_{\text{αντ}}} = -\frac{15}{32} \cdot DA_0^2$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Ισχύει:

$$\Delta t = \frac{T}{2} \Rightarrow T = \frac{\pi}{5} \text{ s}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$|F_{\text{max}}| = DA = m\omega^2 A \Rightarrow$$

$$A = \frac{|F_{\text{max}}|}{m\omega^2} \Rightarrow A = 0,2 \text{ m}$$

Η απόσταση των δύο ακραίων θέσεων της ταλάντωσης του σώματος είναι $d = 2A \Rightarrow$
 $d = 0,4 \text{ m}$

Γ2. $F = -Dx \Rightarrow$ αν $F < 0 \Rightarrow x > 0$ οπότε τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα βρίσκεται στην ακραία θέση της ταλάντωσης $x = +A$.

$$x = A\eta\mu(\omega t + \phi_0) \xrightarrow{t=0, x=A} A = A\eta\mu\phi_0 \Rightarrow$$

$$\eta\mu\phi_0 = 1 \xrightarrow{0 \leq \phi_0 < 2\pi} \phi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

$$v = v_{\text{max}} \sigma\upsilon\nu(\omega t + \phi_0) \Rightarrow$$

$$v = \omega A \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega t + \phi_0) \Rightarrow$$

$$v = 2\sigma\upsilon\nu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) (\text{S.I.})$$

Γ3. Προκύπτει:

$$x = 0,2\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \xrightarrow{t=t_1=\frac{7\pi}{30}} \Rightarrow$$

$$x_1 = 0,2\eta\mu\left(10 \cdot \frac{7\pi}{30} + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow x_1 = 0,1 \text{ m}$$

$$\Delta x = x_{\text{τελ.}} - x_{\text{αρχ.}} \Rightarrow \Delta x = -0,1 \text{ m}$$

$$t_1 = \frac{7\pi}{30} \text{ s} \quad \text{και} \quad T = \frac{\pi}{5} \text{ s} = \frac{6\pi}{30} \text{ s} \quad \text{οπότε}$$

$$t_1 = T + \frac{T}{6} \quad \text{άρα} \quad S = 4A + A - x_1 \Rightarrow S = 0,9 \text{ m}$$

Γ4. $\frac{dK}{dt} = \Sigma F \cdot v = -D \cdot x \cdot v$

$$v = \pm \omega \sqrt{A^2 - x^2} =$$

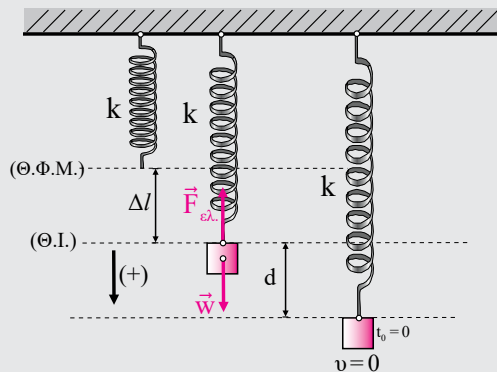
$$= \pm \omega \sqrt{A^2 - \left(-\frac{A}{2}\right)^2} = \pm \frac{\omega A \sqrt{3}}{2} = \pm \sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Όταν το σώμα διέρχεται από τη θέση $x = -\frac{A}{2}$ της ταλάντωσης και επιταχύνεται, κινείται προς τη Θ.Ι. άρα $v > 0$, οπότε $v = \sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Τελικά: $\frac{dK}{dt} = -m\omega^2 \cdot x \cdot v \Rightarrow \frac{dK}{dt} = 10\sqrt{3} \frac{\text{J}}{\text{s}}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.



Στη Θ.Ι. ισχύει:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{\text{ελ}} = w \Rightarrow k \cdot \Delta l = mg \Rightarrow$$

$$\Delta l = \frac{mg}{k} \Rightarrow \Delta l = 0,1 \text{ m}$$

Έχουμε:

$$A = d \Rightarrow A = 0,1 \text{ m}$$

Όταν το ελατήριο είναι επιμηκυμένο κατά 5cm, η απομάκρυνσή του είναι:

$$x_1 = -\frac{A}{2} \Rightarrow x_1 = -0,05\text{m}$$

Από την εφαρμογή της Αρχής Διατήρησης της Ενέργειας Ταλάντωσης έχουμε:

$$K + U = E_T \Rightarrow \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow$$

$$|v_1| = \sqrt{\frac{kA^2 - kx_1^2}{m}} \Rightarrow$$

$$|v_1| = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{m}{s}$$

Δ2. Ισχύει:

$$\Delta l_{\alpha\rho\chi} = A + \Delta l \Rightarrow \Delta l_{\alpha\rho\chi} = 0,2\text{m} \text{ και } \Delta l_{\tau\epsilon\lambda} = 0$$

Για το έργο της δύναμης του ελατηρίου, προκύπτει:

$$W_{F_{\epsilon\lambda}} = U_{\epsilon\lambda, \alpha\rho\chi} - U_{\epsilon\lambda, \tau\epsilon\lambda} \Rightarrow$$

$$W_{F_{\epsilon\lambda}} = \frac{1}{2}k \cdot \Delta l_{\alpha\rho\chi}^2 - \frac{1}{2}k \cdot \Delta l_{\tau\epsilon\lambda}^2 \Rightarrow$$

$$W_{F_{\epsilon\lambda}} = 4\text{J}$$

Δ3. Ισχύει:

$$\frac{dU_{\epsilon\lambda}}{dt} = -F_{\epsilon\lambda} |v_1| \Rightarrow \frac{dU_{\epsilon\lambda}}{dt} = -k \cdot \Delta l' \cdot |v_1| \Rightarrow$$

$$\frac{dU_{\epsilon\lambda}}{dt} = -5\sqrt{3} \frac{\text{J}}{\text{s}}$$

Δ4. i)

Ισχύει:

$$\vec{\Sigma}\vec{F} = -k\vec{x} \Rightarrow \vec{F}_{\epsilon\lambda} + \vec{w} = -k\vec{x} \Rightarrow$$

$$F_{\epsilon\lambda} + w = -kx \Rightarrow F_{\epsilon\lambda} = -mg - kx \Rightarrow$$

$$F_{\epsilon\lambda} = -20 - 200x \text{ (S.I.) για}$$

$$-0,1\text{m} \leq x \leq 0,1\text{m}$$

ii) Ισχύει:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \omega = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, $x = +A$ επομένως:

$$A = A \eta\mu\phi_0 \text{ ή } \eta\mu\phi_0 = 1(1)$$

Επειδή $0 \leq \phi_0 < 2\pi \text{ rad}$ από τη σχέση (1) προ-

$$\text{κύπτει: } \phi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

Επομένως, η εξίσωση της απομάκρυνσης είναι:

$$x = 0,1 \cdot \eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.)}$$

Τελικά έχουμε:

$$F_{\epsilon\lambda} = -20 - 200x \Rightarrow$$

$$F_{\epsilon\lambda} = -20 - 200 \cdot 0,1 \cdot \eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$$

$$F_{\epsilon\lambda} = -20 - 20 \cdot \sigma\upsilon\nu 10t \text{ (S.I.)}.$$

6ο Διαγώνισμα (Δ6)

ΘΕΜΑ Α

A1. α), A2. α), A3. δ), A4. δ)
A5. α) Σ, **β)** Λ, **γ)** Λ, **δ)** Λ, **ε)** Σ

ΘΕΜΑ Β

B1. Σωστή απάντηση είναι η **γ**).

Δικαιολόγηση

Από το διάγραμμα της ταχύτητας με τον χρόνο που δίνεται, προκύπτουν τα εξής για τα δύο σώματα Σ_1 και Σ_2 :

$$v_{\max(1)} = 4v_{\max(2)} \text{ (1) και } T_2 = 2T_1 \text{ (2)}$$

Αφού οι ολικές ενέργειες είναι ίσες, έχουμε:

$$E_{\text{ολ.}(1)} = E_{\text{ολ.}(2)} \Rightarrow \frac{1}{2}m_1 v_{\max(1)}^2 = \frac{1}{2}m_2 v_{\max(2)}^2 \stackrel{(1)}{\Rightarrow}$$

$$m_1 \left(4v_{\max(2)}\right)^2 = m_2 v_{\max(2)}^2 \Rightarrow$$

$$m_2 = 16m_1 \text{ (3)}$$

Για τις σταθερές k_1 και k_2 των δύο ελατηρίων που είναι δεμένα τα σώματα Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα, ισχύει:

$$k_1 = m_1 \omega_1^2 \text{ και } k_2 = m_2 \omega_2^2$$

$$\begin{aligned} \frac{k_1}{k_2} &= \frac{m_1 \omega_1^2}{m_2 \omega_2^2} = \frac{m_1 \left(\frac{2\pi}{T_1} \right)^2}{16m_1 \left(\frac{2\pi}{T_2} \right)^2} = \\ &= \frac{T_2^2}{16T_1^2} = \frac{4T_1^2}{16T_1^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$k_1 = \frac{k_2}{4}$$

B2. Σωστή απάντηση είναι η γ).

Δικαιολόγηση

Συγκρίνοντας τη δοθείσα χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος με τον γενικό τύπο $x = A\eta\mu\omega t$, προκύπτουν ότι το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος είναι $A = 0,2\text{m}$ και η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης είναι $\omega = 12\text{rad/s}$.

Για τη συχνότητα της ταλάντωσης έχουμε:

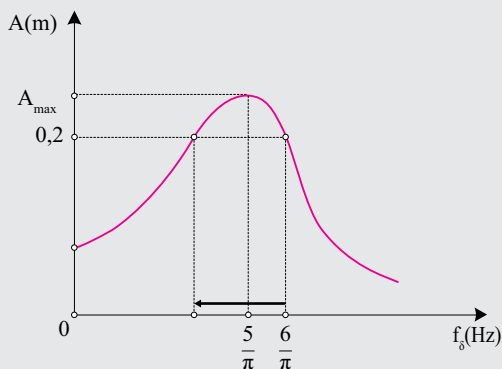
$$f = \frac{\omega}{2\pi} \Rightarrow f = \frac{6}{\pi} \text{ Hz}$$

Επειδή το σώμα εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση η συχνότητα της ταλάντωσης είναι ίση με τη συχνότητα του διεγέρτη, δηλαδή της εξωτερικής περιοδικής δύναμης, άρα:

$$f_\delta = \frac{6}{\pi} \text{ Hz}.$$

Για την ιδιοσυχνότητα της ταλάντωσης έχουμε:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow f_0 = \frac{5}{\pi} \text{ Hz}$$



Μειώνοντας συνεχώς τη συχνότητα της εξωτερικής περιοδικής δύναμης (ξεκινώντας από την αρχική της τιμή), το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης από εκείνη τη στιγμή αρχικά αυξάνεται και στη συνέχεια μειώνεται, όπως προκύπτει και από το διάγραμμα πλάτους συχνότητας.

B3. Α. Σωστή απάντηση είναι η α).

Δικαιολόγηση

Προκύπτει:

$$\frac{U}{K} = \frac{E_T - U}{K} \Rightarrow \frac{U}{K} = \frac{\frac{1}{2}mv_{\max}^2 - \frac{1}{2}mv^2}{\frac{1}{2}mv^2} \Rightarrow$$

$$\frac{U}{K} = \frac{\frac{v_{\max}^2}{4} - \frac{v_{\max}^2}{4}}{\frac{v_{\max}^2}{4}} \Rightarrow \frac{U}{K} = 3$$

Β. Σωστή απάντηση είναι η β).

Δικαιολόγηση

Προκύπτει:

$$\frac{U}{K} = \frac{E_T \eta \mu^2 \omega t}{E_T \sigma \nu^2 \omega t} \Rightarrow \frac{U}{K} = \frac{E_T \eta \mu^2 \frac{2\pi}{T} \frac{T}{12}}{E_T \sigma \nu^2 \frac{2\pi}{T} \frac{T}{12}} \Rightarrow$$

$$\frac{U}{K} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} \Rightarrow \frac{U}{K} = \frac{1}{3}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Λόγω του συντονισμού έχουμε:

$$\omega_0 = \omega \Rightarrow \omega_0 = 5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Ισχύει:

$$k = m\omega_0^2 \Rightarrow k = 100 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Γ2. Στην κατάσταση συντονισμού έχουμε:

$$F_{\text{αντ}} = -F_\delta \Rightarrow F_{\text{αντ}} = -8\sigma\upsilon\nu 5t \text{ (S.I.)}$$

Προκύπτει ότι:

$$F_{\text{αντ,max}} = 8\text{N}$$

Ισχύει όμως:

$$F_{\text{αντ,max}} = b v_{\text{max}} \Rightarrow F_{\text{αντ,max}} = b\omega A \Rightarrow$$

$$b = \frac{F_{\text{αντ,max}}}{\omega A} \Rightarrow b = 2 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

Γ3. Έχουμε:

$$F_{\text{αντ}} = -8\sigma\upsilon\nu 5t \Rightarrow -bv = -8\sigma\upsilon\nu 5t \Rightarrow \\ -2v = -8\sigma\upsilon\nu 5t \Rightarrow v = 4\sigma\upsilon\nu 5t \text{ (S.I.)}$$

Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ βρίσκουμε την ταχύτητα του σώματος. Ισχύει:

$$v_0 = 4\sigma\upsilon\nu 5t_0 \Rightarrow v_0 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Τη χρονική στιγμή t_1 έχουμε:

$$v_1 = 4\sigma\upsilon\nu 5t_1 \Rightarrow v_1 = 2\sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Για τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας έχουμε:

$$\Delta K = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 \Rightarrow \Delta K = -8 \text{ J}$$

Γ4. Ο ρυθμός με τον οποίο προσφέρεται ενέργεια στο σύστημα είναι:

$$\frac{dW_{F_\delta}}{dt} = F_\delta v_1 \Rightarrow \frac{dW_{F_\delta}}{dt} = -F_{\text{αντ}} v_1 \Rightarrow$$

$$\frac{dW_{F_\delta}}{dt} = b v_1^2 \Rightarrow \frac{dW_{F_\delta}}{dt} = +24 \frac{\text{J}}{\text{s}}$$

Ο ρυθμός με τον οποίο αφαιρείται ενέργεια από το σύστημα είναι:

$$\frac{dW_{F_{\text{αντ}}}}{dt} = F_{\text{αντ}} v_1 \Rightarrow \frac{dW_{F_{\text{αντ}}}}{dt} = -b v_1^2 \Rightarrow$$

$$\frac{dW_{F_{\text{αντ}}}}{dt} = -24 \frac{\text{J}}{\text{s}}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Μετά το κόψιμο του νήματος, το (Σ_1) εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, ενώ το (Σ_2) εκτελεί ελεύθερη πτώση. Για τον χρόνο πτώσης t_1 του (Σ_2) , μέχρι να φτάσει στο έδαφος, έχουμε:

$$h = \frac{1}{2} g t_1^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0,2\sqrt{10}\text{s}$$

Στον ίδιο χρόνο το (Σ_1) ακινητοποιείται στιγμιαία για 2η φορά μετά το κόψιμο του νήματος, άρα:

$$t_1 = T \Rightarrow T = 0,2\sqrt{10}\text{s} = 0,2\pi\text{s}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

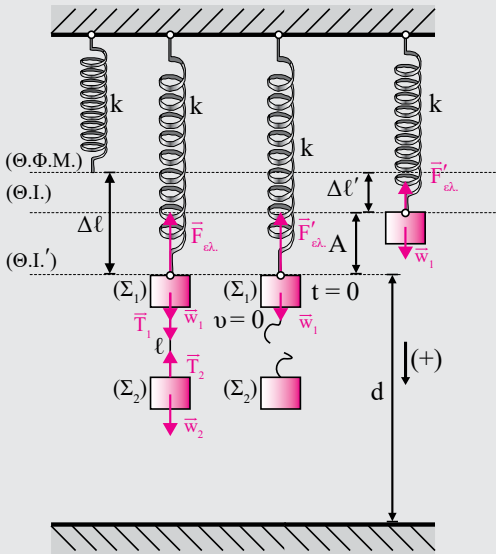
Για τη σταθερά του ελατηρίου έχουμε:

$$k = m_1 \omega^2 \Rightarrow k = 200 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Δ2. Όταν κόψουμε το νήμα, το σώμα (Σ_1) ξεκινάει να κινείται προς τα πάνω ($F_{\text{ελ}} > w_1$) και επειδή εκείνη τη στιγμή η ταχύτητά του είναι $v = 0$, η θέση αυτή γίνεται η κάτω ακραία θέση της ταλάντωσής του. Τη χρονική στιγμή t_1 που το σώμα (Σ_1) ακινητοποιείται στιγμιαία για 2η φορά μετά το κόψιμο του νήματος, αυτό θα βρίσκεται στην αρχική του θέση αφού θα έχει κάνει μια πλήρη ταλάντωση, οπότε για την απόσταση d που απέχουν τότε τα δύο σώματα ισχύει:

$$d = l + h \Rightarrow l = d - h \Rightarrow l = 0,4 \text{ m}$$

Δ3.



Στην αρχική κατάσταση ισορροπίας των 2 σωμάτων ισχύει:

$$(\Theta.I.): \Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{ελ} = w_{1,2} \Rightarrow$$

$$k \cdot \Delta l = (m_1 + m_2)g \Rightarrow \Delta l = \frac{(m_1 + m_2)g}{k} \Rightarrow$$

$$\Delta l = 0,3\text{m}$$

Στην κατάσταση ισορροπίας της ταλάντωσης του σώματος (Σ_1) ισχύει:

$$(\Theta.I.): \Sigma F_y = 0 \Rightarrow F'_{ελ} = w_1 \Rightarrow$$

$$k \cdot \Delta l' = m_1 g \Rightarrow \Delta l' = \frac{m_1 g}{k} \Rightarrow \Delta l' = 0,1\text{m}$$

Το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος (Σ_1) είναι: $A = \Delta l - \Delta l' = 0,2\text{m}$

Τη χρονική στιγμή $t = 0$, $x = +A$ επομένως:

$$A = A\eta\mu\phi_0 \Rightarrow \eta\mu\phi_0 = 1(1)$$

Επειδή $0 \leq \phi_0 < 2\pi \text{ rad}$ από τη σχέση (1) προ-

κύπτει: $\phi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$

Επομένως, η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης της ταλάντωσης του σώματος (Σ_1) είναι:

$$x = 0,2 \cdot \eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) (\text{S.I.})$$

Δ4. Η επιτάχυνση του σώματος (Σ_2) είναι ίση με την επιτάχυνση της βαρύτητας. Άρα θέλουμε: $\alpha = g$

$$\alpha = -\omega^2 x \Rightarrow \alpha = -20 \cdot \eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)^{\alpha=10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \Rightarrow$$

$$10 = -20 \cdot \eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2} = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow$$

$$10t + \frac{\pi}{2} = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6} (1) \Rightarrow$$

$$10t + \frac{\pi}{2} = 2\kappa\pi + \frac{7\pi}{6} (2)$$

Θέλουμε για πρώτη φορά μετά το κόψιμο του νήματος $\alpha = g$, άρα για $\kappa = 0$ στη σχέση (2) έχουμε:

$$t_2 = \frac{\pi}{15} \text{s}$$

Δ5. Για το σώμα (Σ_1) έχουμε:

$$\left(\frac{\Delta K}{\Delta t}\right)_{\Sigma_1} = \Sigma F \cdot v = -kx \cdot v =$$

$$= -200 \cdot 0,2 \cdot \eta\mu\left(10t_2 + \frac{\pi}{2}\right) \cdot 2\sigma\upsilon\nu\left(10t_2 + \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= -200 \cdot 0,2 \cdot \eta\mu\left(10 \cdot \frac{\pi}{15} + \frac{\pi}{2}\right) \cdot 2\sigma\upsilon\nu\left(10 \cdot \frac{\pi}{15} + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\Delta K}{\Delta t}\right)_{\Sigma_1} = -20\sqrt{3} \frac{\text{J}}{\text{s}}$$

Για το σώμα (Σ_2) έχουμε:

$$\left(\frac{\Delta K}{\Delta t}\right)_{\Sigma_2} = \Sigma F \cdot v = m_2 g \cdot gt_2 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\Delta K}{\Delta t}\right)_{\Sigma_2} = \frac{80\pi}{3} \frac{\text{J}}{\text{s}}$$

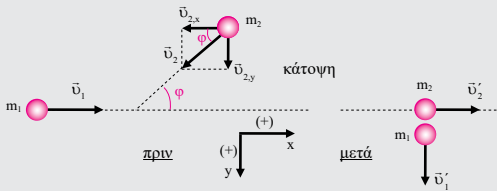
7ο Διαγώνισμα (Δ7)

ΘΕΜΑ Α

A1. γ), A2. γ), A3. δ), A4. β)
A5. α) Λ, β) Λ, γ) Λ, δ) Σ, ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

B1. Σωστή απάντηση είναι η β).
Δικαιολόγηση



A.Δ.Ο. άξονας x:

$$\begin{aligned}\vec{p}_{ολ.(πριν),x} &= \vec{p}_{ολ.(μετά),x} \Rightarrow \\ m_1 u_1 - m_2 u_{2,x} &= m_2 u'_2 \Rightarrow \\ m_1 u_1 - m_2 u_2 \cdot \sin 53^\circ &= m_2 u'_2 \Rightarrow \\ 2m_2 u_1 - m_2 u_2 \cdot 0,6 &= m_2 u'_2 \Rightarrow \\ 2u_1 - 0,6u_2 &= u'_2 \Rightarrow \\ 2u_1 - 1,2u_1 &= u'_2 \Rightarrow \\ u'_2 &= 0,8u_1 \quad (1)\end{aligned}$$

A.Δ.Ο. άξονας y:

$$\begin{aligned}\vec{p}_{ολ.(πριν),y} &= \vec{p}_{ολ.(μετά),y} \Rightarrow \\ -m_2 u_{2,y} &= -m_1 u'_1 \Rightarrow \\ m_2 u_2 \cdot \eta\mu 53^\circ &= m_1 u'_1 \Rightarrow \\ m_2 u_2 \cdot 0,8 &= 2m_2 u'_1 \Rightarrow \\ 0,8u_2 &= 2u'_1 \Rightarrow u'_1 = 0,4u_2 \Rightarrow \\ u'_1 &= 0,8u_1 \quad (2)\end{aligned}$$

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι τα μέτρα των τελικών ταχυτήτων των δύο σωμάτων m_1 και m_2 μετά την κρούση είναι ίσα $u'_1 = u'_2$ (3).

Για τα μέτρα των ορμών τους p'_1 και p'_2 μετά την κρούση, ισχύει:

$$p'_1 = m_1 u'_1 \Rightarrow p'_1 = 2m_2 u'_1 \quad (4)$$

$$p'_2 = m_2 u'_2 \Rightarrow p'_2 = m_2 u'_1 \quad (5)$$

Από τις σχέσεις (4), (5) προκύπτει $p'_1 = 2p'_2$

B2. Σωστή απάντηση είναι η β).

Δικαιολόγηση

Πλαστική κρούση:

$$A.Δ.Ο.: \vec{p}_{ολ.(πριν)} = \vec{p}_{ολ.(μετά)} \Rightarrow$$

$$m_2 v_0 = (m_1 + m_2) V \Rightarrow V = \frac{m_2 v_0}{m_1 + m_2} \quad (1)$$

$$V = v_{\max(1)} = \omega_1 A_1 \Rightarrow$$

$$A_1 = \frac{V}{\omega_1} = \frac{(1)}{\omega_1} \frac{m_2 v_0}{m_1 + m_2} \Rightarrow$$

$$A_1 = \frac{m_2 v_0}{m_1 + m_2} \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}} \quad (2)$$

Ελαστική κρούση: $u'_1 = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_0 \quad (3)$

$$u'_1 = v_{\max(2)} = \omega_2 A_2 \Rightarrow$$

$$A_2 = \frac{u'_1}{\omega_2} = \frac{(3)}{\omega_2} \frac{2m_2 v_0}{m_1 + m_2} \Rightarrow$$

$$A_2 = \frac{2m_2 v_0}{m_1 + m_2} \sqrt{\frac{m_1}{k}} \quad (4)$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{\frac{m_2 v_0}{m_1 + m_2} \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}}}{\frac{2m_2 v_0}{m_1 + m_2} \sqrt{\frac{m_1}{k}}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}}}{\sqrt{\frac{m_1}{k}}} = \sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\frac{\frac{m_1 + m_2}{k}}{\frac{m_1}{k}} = 3 \Rightarrow \frac{m_1 + m_2}{m_1} = 3 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{2}$$

B3. Σωστή απάντηση είναι η α).

Δικαιολόγηση

$$v_1 = v_{\max(1)} = \omega_1 d_1 \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} d = \sqrt{\frac{k}{m}} d \quad (1)$$

$$v_2 = v_{\max(2)} = \omega_2 d_2 \Rightarrow$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} 1,5d = 1,5 \sqrt{\frac{k}{m}} d \quad (2)$$

Τα σώματα Σ_1 και Σ_2 συγκρούονται στη Θ.Ι. τους, αφού έχουν ίσες περιόδους:

$$T_1 = T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

$$\text{Α.Δ.Ο.: } \vec{p}_{\text{ολ. (πριν)}} = \vec{p}_{\text{ολ. (μετά)}} \Rightarrow$$

$$m_2 v_2 - m_1 v_1 = (m_1 + m_2) V \Rightarrow$$

$$V = \frac{m_2 v_2 - m_1 v_1}{m_1 + m_2} \Rightarrow$$

$$V = \frac{4m v_2 - m v_1}{5m} = \frac{4v_2 - v_1}{5} \stackrel{(1),(2)}{\Rightarrow}$$

$$V = \frac{4 \cdot 1,5 \sqrt{\frac{k}{m}} d - \sqrt{\frac{k}{m}} d}{5} \Rightarrow V = \sqrt{\frac{k}{m}} d$$

Όμως:

$$V = v_{\max} = \omega A \Rightarrow \sqrt{\frac{k}{m}} d = \sqrt{\frac{D}{5m}} A \Rightarrow A = d$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Ισχύει $\Delta t = \frac{T}{2} \Rightarrow T = 2\Delta t = \frac{2\pi\sqrt{3}}{15} \text{ s},$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = 5\sqrt{3} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$k = (m_1 + m_2) \omega^2 \Rightarrow m_2 = 1 \text{ kg}$$

$$K_{\max} = E_{\text{ολ.}} = \frac{1}{2} k A^2 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2K_{\max}}{k}} \Rightarrow$$

$$A = 0,2 \text{ m}$$

Γ2. Στη Θ.Ι. του σώματος Σ_1 ισχύει:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{\epsilon\lambda} = w_1 \Rightarrow k \cdot \Delta l = m_1 g \Rightarrow$$

$$\Delta l = \frac{m_1 g}{k} \Rightarrow \Delta l = \frac{1}{30} \text{ m}$$

Στη Θ.Ι. του συσσωματώματος ισχύει:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F'_{\epsilon\lambda} = w_1 + w_2 \Rightarrow$$

$$k \cdot \Delta l' = (m_1 + m_2) g \Rightarrow$$

$$\Delta l' = \frac{(m_1 + m_2) g}{k} \Rightarrow \Delta l' = \frac{4}{30} \text{ m}$$

Για το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας της ταλάντωσης.

$$K + U = E_{\text{ολ.}} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 + \frac{1}{2} k (\Delta l' - \Delta l)^2 = E_{\text{ολ.}} \Rightarrow$$

$$|v| = 1,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Γ3. Α.Δ.Ο.: $\vec{p}_{ολ.(πριν)} = \vec{p}_{ολ.(μετά)} \Rightarrow$

$$m_2 v_0 = (m_1 + m_2) v \Rightarrow$$

$$v_0 = \frac{(m_1 + m_2) v}{m_2} = 2 \frac{m}{s}$$

Θ.Μ.Κ.Ε.: $\Delta K = \Sigma W_F \Rightarrow K_{τελ.} - K_{αρχ.} = W_w \Rightarrow$

$$\frac{1}{2} m_2 v_0^2 = m_2 g h \Rightarrow h = \frac{v_0^2}{2g} \Rightarrow$$

$$h = 0,2 \text{ m}$$

Γ4. $W_{F_{επ.}} = \Delta K = K_{τελ.} - K_{αρχ.} =$

$$= 0 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 \Rightarrow W_{F_{επ.}} = -1,5 \text{ J}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $m_1 v_0 = (m_1 + m_2) V \Rightarrow$

Α.Δ.Ο.: $\vec{p}_{ολ.(πριν)} = \vec{p}_{ολ.(μετά)} \Rightarrow$

$$V = \frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2} \Rightarrow V = 4 \frac{m}{s}$$

Δ2. $\Pi\% = \frac{K_{ολ.(πριν)} - K_{ολ.(μετά)}}{K_{ολ.(πριν)}} \cdot 100\% =$

$$= \left(1 - \frac{K_{ολ.(μετά)}}{K_{ολ.(πριν)}} \right) \cdot 100\% =$$

$$= \left(1 - \frac{\frac{1}{2} (m_1 + m_2) V^2}{\frac{1}{2} m_1 v_0^2} \right) \cdot 100\% \Rightarrow$$

$$\Pi\% = 75\%$$

Δ3. Επειδή η κρούση είναι ελαστική και ισχύει: $m_{1,2} = m_3$, τα σώματα ανταλλάσσουν ταχύτητες άρα $v'_{1,2} = 0$ και $v'_3 = 4 \text{ m/s}$.

$$v'_3 = v_{\max} = \omega A \Rightarrow v'_3 = \sqrt{\frac{k}{m_3}} A \Rightarrow A = 0,4 \text{ m}$$

Δ4. $T = 2\pi \sqrt{\frac{m_3}{k}} = 0,2\pi \text{ s}$

$$t_1 = \frac{T}{2} \Rightarrow t_1 = 0,1\pi \text{ s}$$

Η κρούση γίνεται στη Θ.Ι. και τα σώματα πάλι ανταλλάσσουν ταχύτητες, άρα το σώμα Σ_3 μετά την κρούση σταματάει και το συσσωμάτωμα $(B - \Sigma_2)$ αποκτά ταχύτητα $v = 4 \frac{m}{s}$.

Η απόσταση του σώματος Σ_3 από το συσσωμάτωμα $(B - \Sigma_2)$ τη χρονική στιγμή $t_2 = (t_1 + 5) \text{ s}$ είναι $d = v \cdot \Delta t \Rightarrow d = 20 \text{ m}$.

8ο Διαγώνισμα (Δ8)

ΘΕΜΑ Α

Α1. γ), Α2. α), Α3. γ), Α4. δ)
Α5. α) Σ, β) Λ, γ) Σ, δ) Σ, ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Σωστή απάντηση είναι η γ).

Δικαιολόγηση

Ισχύει:

$$\frac{\lambda}{2} = d \Rightarrow \lambda = 2d$$

Έχουμε:

$$\lambda = v_\delta T \Rightarrow 2d = v_\delta T \Rightarrow T = \frac{2d}{v_\delta}$$

Τελικά προκύπτει:

$$\Delta t = \frac{T}{2} \Rightarrow \Delta t = \frac{\frac{2d}{v_\delta}}{2} \Rightarrow \Delta t = \frac{d}{v_\delta}$$

B2. Σωστή απάντηση είναι η α).**Δικαιολόγηση**

Ισχύει:

$$\Delta t = t_2 - t_1 \Rightarrow \Delta t = \frac{r_2}{v_\delta} - \frac{r_1}{v_\delta} \Rightarrow$$

$$\Delta t = \frac{4\lambda}{v_\delta} - \frac{\lambda}{v_\delta} \Rightarrow \Delta t = \frac{3\lambda}{v_\delta} \Rightarrow$$

$$\Delta t = \frac{3v_\delta T}{v_\delta} \Rightarrow \Delta t = 3T$$

B3. Σωστή απάντηση είναι η β).**Δικαιολόγηση**

Η θέση του σημείου (Μ) είναι:

$$x_M = \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{12} \Rightarrow x_M = \frac{5\lambda}{6}$$

Για το πλάτος του σημείου (Μ) έχουμε:

$$A_M = 2A \left| \sin 2\pi \frac{x_M}{\lambda} \right| \Rightarrow$$

$$A_M = 2A \left| \sin 2\pi \frac{5\lambda}{6\lambda} \right| \Rightarrow$$

$$A_M = 2A \left| \sin \frac{5\pi}{3} \right| \Rightarrow A_M = A$$

Τελικά προκύπτει:

$$d = 2A_M \Rightarrow d = 2A$$

ΘΕΜΑ Γ**Γ1. Συγκρίνουμε την εξίσωση του κύματος:**

$$y = 0,1\eta\mu 2\pi(t - 0,5x) \text{ (S.I.)}$$

με τη γενική μορφή $y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$.

Για το μήκος κύματος, ισχύει:

$$\frac{x}{\lambda} = 0,5x \Rightarrow \lambda = 2 \text{ m}$$

Για την περίοδο, προκύπτει:

$$\frac{t}{T} = t \Rightarrow T = 1\text{s}$$

Η συχνότητα είναι:

$$f = \frac{1}{T} \Rightarrow f = 1 \text{ Hz}$$

Γ2. Υπολογίζουμε την ταχύτητα διάδοσης του κύματος:

$$v_\delta = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow v_\delta = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ισχύει:

$$t_\kappa = \frac{x_\kappa}{v_\delta} \Rightarrow t_\kappa = 4\text{s}$$

Προκύπτει:

$$y_\kappa = 0,1\eta\mu 2\pi(t - 0,5x_\kappa) \Rightarrow$$

$$y_\kappa = 0,1\eta\mu 2\pi(4,25 - 0,5 \cdot 8) \Rightarrow$$

$$y_\kappa = 0,1\text{m}$$

Γ3. Υπολογίζουμε τη χρονική στιγμή t_1 . Ισχύει:

$$t_1 = t_\kappa + \frac{5T}{4} \Rightarrow t_1 = 5,25\text{s}$$

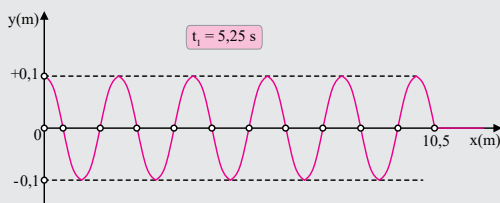
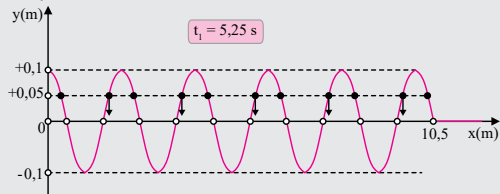
Έχουμε:

$$d_1 = v_\delta t_1 \Rightarrow d_1 = 10,5\text{m}$$

Προκύπτει:

$$\frac{d_1}{\lambda} = \frac{10,5}{2} \Rightarrow d_1 = 5,25\lambda$$

Το ζητούμενο στιγμιότυπο είναι το εξής:

**Γ4.****i)** 11 σημεία**ii)** 5 σημεία

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Ισχύει:

$$t_2 - t_1 = 1,5T \Rightarrow \frac{r_2}{v_\delta} - \frac{r_1}{v_\delta} = 1,5T \Rightarrow$$

$$r_2 - r_1 = 1,5\lambda \Rightarrow r_2 - r_1 = 0,6\text{m}(1)$$

Επίσης ισχύει:

$$r_2 + r_1 = d \Rightarrow r_2 + r_1 = 1,4\text{m}$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει:

$$r_1 = 0,4\text{m} \text{ και } r_2 = 1\text{m}$$

Δ2. Έχουμε:

$$r_1' - r_2' = N\lambda(3) \text{ και } r_1' + r_2' = d(4)$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) έχουμε:

$$r_1' = \frac{N}{2}\lambda + \frac{d}{2}$$

Προκύπτει ότι:

$$0 \leq r' \leq d \Rightarrow 0 \leq \frac{N}{2}\lambda + \frac{d}{2} \leq d \Rightarrow$$

$$0 \leq 0,2N + 0,7 \leq 1,4 \Rightarrow$$

$$-3,5 \leq N \leq 3,5$$

Άρα $N = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ άρα υπάρχουν 7 σημεία στο ευθύγραμμο τμήμα $\Pi_1\Pi_2$ που ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος μετά την έναρξη της συμβολής σε αυτά.

Δ3. Έχουμε:

$$t_1 = \frac{r_1}{v_\delta} \Rightarrow t_1 = 4\text{s}$$

Και:

$$t_2 = \frac{r_2}{v_\delta} \Rightarrow t_2 = 10\text{s}$$

Ισχύει:

$$T = \frac{\lambda}{v_\delta} \Rightarrow T = 4\text{s}$$

Για $t < 4\text{s}$ ισχύει $y_\Sigma = 0$.

Για $4\text{s} \leq t < 10\text{s}$ ισχύει:

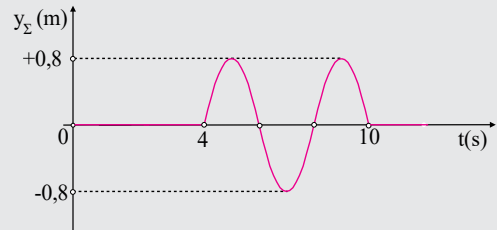
$$y_\Sigma = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda}\right) \Rightarrow$$

$$y_\Sigma = 0,8\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{4} - \frac{0,4}{0,4}\right) \Rightarrow$$

$$y_\Sigma = 0,8\eta\mu 2\pi(0,25t - 1)(\text{S.I})$$

Για $t \geq 10\text{s}$ ισχύει $y_\Sigma = 0$.

Το ζητούμενο διάγραμμα είναι το εξής:



Δ4. Αρχικά, για τη συχνότητα έχουμε:

$$f = \frac{1}{T} \Rightarrow f = 0,25\text{Hz}$$

Επίσης, ισχύει:

$$|r_1 - r_2| = (2N + 1)\frac{\lambda'}{2} \Rightarrow$$

$$|r_1 - r_2| = (2N + 1)\frac{v_\delta}{2f'} \Rightarrow$$

$$f' = \frac{(2N + 1)v_\delta}{2 \cdot |r_1 - r_2|} \Rightarrow$$

$$f' = \frac{(2N + 1)}{12} \text{ και για } N = 2, f' = \frac{5}{12}\text{Hz}$$

Για το ζητούμενο ποσοστό επί τοις εκατό προκύπτει:

$$\Pi(\%) = \frac{f' - f}{f} 100\% \Rightarrow \Pi(\%) = \frac{200}{3}\%$$

9ο Διαγώνισμα (Δ9)

ΘΕΜΑ Α

A1. γ), A2. β), A3. γ), A4. δ)
A5. α) Σ, β) Λ, γ) Σ, δ) Σ, ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

B1. Σωστή απάντηση είναι η γ).

Δικαιολόγηση

Για την περίοδο, έχουμε:

$$T = \frac{\lambda}{v_\delta} \Rightarrow T = 4\text{s}$$

Ισχύει:

$$t_1 = \frac{x_K}{v_\delta} + \frac{5T}{4} \quad (1)$$

Επίσης ισχύει:

$$t_1 = \frac{x_\Sigma}{v_\delta} + \frac{7T}{4} \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει:

$$\frac{x_K}{v_\delta} + \frac{5T}{4} = \frac{x_\Sigma}{v_\delta} + \frac{7T}{4} \Rightarrow$$

$$x_\Sigma = v_\delta \left(\frac{x_K}{v_\delta} - \frac{T}{2} \right) \Rightarrow x_\Sigma = +3,5\text{m}$$

B2. Σωστή απάντηση είναι η **β**).

Δικαιολόγηση

Ισχύει:

$$|r_1 - r_2| = N\lambda \Rightarrow |\lambda - 4\lambda| = N \frac{v_\delta}{f} \Rightarrow f = \frac{Nv_\delta}{3\lambda} \quad (1)$$

Θέτουμε στη σχέση (1) όπου $N = 1$ και προκύπτει:

$$f_{\min} = \frac{v_\delta}{3\lambda}$$

B3. Σωστή απάντηση είναι η **γ**).

Δικαιολόγηση

Στο ζεύγος **γ**) η φάση της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου είναι ίδια με αυτήν της έντασης του μαγνητικού πεδίου.

Επίσης ισχύει:

$$\frac{E_{\max}}{B_{\max}} = \left(\frac{90}{30 \cdot 10^{-8}} \right) \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow$$

$$\frac{E_{\max}}{B_{\max}} = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \frac{E_{\max}}{B_{\max}} = c$$

Έχουμε:

$$\frac{t}{T} = 3 \cdot 10^{10} t \Rightarrow T = \left(\frac{10^{-10}}{3} \right) \text{s}$$

Ισχύει:

$$\frac{x}{\lambda} = 100x \Rightarrow \lambda = \frac{1}{100} \text{m}$$

Για την ταχύτητα διάδοσης, προκύπτει:

$$v_\delta = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow v_\delta = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Ισχύει:

$$\varphi_1 = 2\pi \frac{t_1}{T} - 2\pi \frac{x}{\lambda} \Rightarrow \varphi_1 = \frac{4\pi}{T} - 2\pi \frac{x}{\lambda} \quad (1)$$

Από το διάγραμμα ισχύει ότι για $x = 0$, $\varphi_1 = 2\pi \text{ rad}$.

Από τη σχέση (1) προκύπτει:

$$2\pi = \frac{4\pi}{T} \Rightarrow T = 2\text{s}$$

Επίσης για $x = 0,5 \text{ m}$, $\varphi_1 = 0$:

$$0 = \frac{4\pi}{T} - 2\pi \frac{0,5}{\lambda} \Rightarrow \lambda = 0,5\text{m}$$

Για την ταχύτητα διάδοσης, προκύπτει:

$$v_\delta = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow v_\delta = 0,25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Γ2. Έχουμε:

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{\Delta x}{\lambda} \Rightarrow \Delta x = \frac{\Delta\varphi \cdot \lambda}{2\pi} \Rightarrow \Delta x = 1,5 \text{ m}$$

Γ3. Ισχύει:

$$d_{K\Sigma} = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow d_{K\Sigma} = 0,25\text{m}$$

Προκύπτει:

$$x_K = x_\Sigma + d_{K\Sigma} \Rightarrow x_K = 2,25 \text{ m}$$

Ισχύει (με απόδειξη):

$$v = +\omega \sqrt{A^2 - y_\Sigma^2} \Rightarrow$$

$$v = +\frac{2\pi}{T} \sqrt{A^2 - \left(-\frac{A}{2}\right)^2} \Rightarrow$$

$$v = +\frac{2\pi\sqrt{3}A}{2T} \Rightarrow$$

$$v = 0,2\sqrt{3}\pi \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Γ4. Έχουμε:

$$U = \frac{1}{4} E_T \Rightarrow \frac{1}{2} D y^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} D A^2 \Rightarrow y = \pm \frac{A}{2}$$

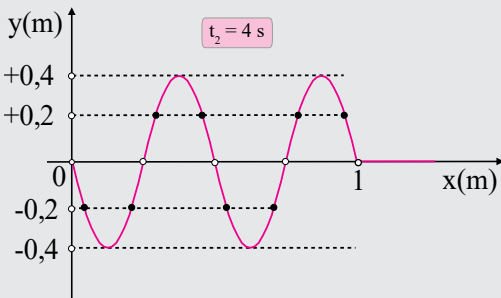
Ισχύει:

$$S = v_\delta t_2 \Rightarrow S = 1\text{m}$$

Προκύπτει:

$$\frac{S}{\lambda} = \frac{1}{0,5} \Rightarrow S = 2\lambda$$

Το ζητούμενο στιγμιότυπο είναι το εξής:



Από το στιγμιότυπο προκύπτει ότι το πλήθος των ζητούμενων σημείων είναι ίσο με 8.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Ισχύει:

$$d = 4 \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{d}{2} \Rightarrow \lambda = 0,4\text{m}$$

Έχουμε:

$$\frac{T}{2} = 0,1 \Rightarrow T = 0,2\text{s}$$

Προκύπτει:

$$v_{\max,0} = \omega A_0 \Rightarrow v_{\max,0} = \frac{2\pi}{T} 2A \Rightarrow$$

$$A = \frac{T v_{\max,0}}{4\pi} \Rightarrow A = 0,2\text{m}$$

Η εξίσωση του στασίμου κύματος είναι:

$$y = 2A \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \eta\mu 2\pi \frac{t}{T} \Rightarrow$$

$$y = 0,4 \sin 5\pi x \cdot \eta\mu 10\pi t (\text{S.I})$$

Δ2. Ισχύει:

$$x_Z = \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{12} \Rightarrow x_Z = \frac{7\lambda}{12}$$

Και:

$$x_\Delta = \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} \Rightarrow x_\Delta = \frac{9\lambda}{12}$$

Προκύπτει:

$$\Delta x_{Z\Delta} = \frac{9\lambda}{12} - \frac{7\lambda}{12} \Rightarrow \Delta x_{Z\Delta} = \frac{\lambda}{6} \Rightarrow \Delta x_{Z\Delta} = \frac{1}{15}\text{m}$$

Ισχύει:

$$d_{\min} = \Delta x_{Z\Delta} \Rightarrow d_{\min} = \frac{1}{15}\text{m}$$

Έχουμε:

$$A_Z = \left| 2A \sin 2\pi \frac{x_Z}{\lambda} \right| \Rightarrow A_Z = \left| 2A \sin 2\pi \frac{12}{\lambda} \right| \Rightarrow$$

$$A_Z = \left| 0,4 \sin \frac{7\pi}{6} \right| \text{m} \Rightarrow$$

$$A_Z = 0,2\sqrt{3}\text{m}$$

Προκύπτει:

$$d_{\max} = \sqrt{\Delta x_{Z\Delta}^2 + A_Z^2} \Rightarrow d_{\max} = \frac{2\sqrt{7}}{15}\text{m}$$

Δ3. Ισχύει $\Delta\phi_{OZ} = \pi \text{ rad}$ επομένως όταν $v = -v_{\max,0}$, τότε προκύπτει:

$$v_Z = +v_{\max,Z} \Rightarrow v_Z = +\omega A_Z \Rightarrow v_Z = +\frac{2\pi}{T} A_Z \Rightarrow$$

$$v_Z = +2\pi\sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Δ4. Την $t = 0,4\text{s}$ ισχύει:

$$y = 0,4 \sin 5\pi x \cdot \eta\mu 4\pi (\text{S.I})$$

Για $x < 0,1\text{m}$, $\phi = 4\pi \text{rad}$

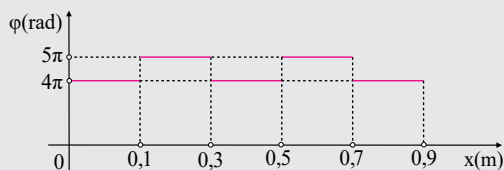
Για $0,1\text{m} < x < 0,3\text{m}$, $\phi = 5\pi \text{rad}$

Για $0,3\text{m} < x < 0,5\text{m}$, $\phi = 4\pi \text{rad}$

Για $0,5\text{m} < x < 0,7\text{m}$, $\phi = 5\pi \text{rad}$

Για $0,7\text{m} < x < 0,9\text{m}$, $\phi = 4\pi \text{rad}$

Το ζητούμενο διάγραμμα είναι το εξής:



Δ5. Αρχικά ισχύει:

$$L = \frac{4\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} \Rightarrow L = \frac{9\lambda}{4} \quad (1)$$

Επίσης έχουμε:

$$f = \frac{1}{T} \Rightarrow f = 5\text{ Hz}$$

Τελικά ισχύει:

$$L = \frac{6\lambda'}{2} + \frac{\lambda'}{4} \Rightarrow L = \frac{13\lambda'}{4} \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει:

$$\frac{9\lambda}{4} = \frac{13\lambda'}{4} \Rightarrow \frac{9v_\delta}{f} = \frac{13v_\delta}{f'} \Rightarrow f' = \frac{13f}{9} \Rightarrow f' = \frac{65}{9}\text{ Hz}$$

Έχουμε:

$$\Delta f = f' - f \Rightarrow \Delta f = \frac{20}{9}\text{ Hz}$$

10ο Διαγώνισμα (Δ10)

ΘΕΜΑ Α

A1. β), A2. δ), A3. α), A4. γ)
A5. α) Λ, β) Σ, γ) Λ, δ) Σ, ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

B1. Σωστή απάντηση είναι η **β**).

Δικαιολόγηση

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την επιταχυνόμενη κίνηση του ιόντος. Ισχύει:

$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = qV \Rightarrow V = \frac{mv^2}{2q}$$

Για τη νέα τάση, ισχύει:

$$V' = \frac{25}{100}V \Rightarrow V' = \frac{1}{4}V \Rightarrow$$

$$\frac{mv'^2}{2q} = \frac{1}{4} \cdot \frac{mv^2}{2q} \Rightarrow v' = \frac{v}{2}$$

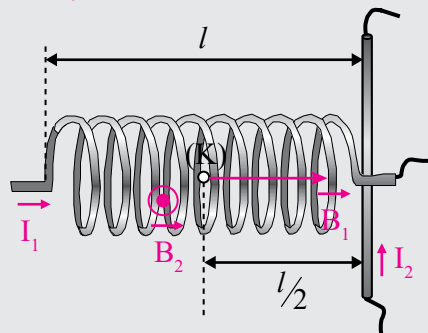
Τελικά έχουμε:

$$\frac{d}{d'} = \frac{2R}{2R'} \Rightarrow \frac{d}{d'} = \frac{\frac{mv}{Bq}}{\frac{mv'}{Bq}} \Rightarrow$$

$$\frac{d}{d'} = \frac{v}{v'} \Rightarrow \frac{d}{d'} = \frac{2v'}{v'} \Rightarrow d' = 0,5d$$

B2. Σωστή απάντηση είναι η **α**).

Δικαιολόγηση



Στο παραπάνω σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι κατευθύνσεις της έντασης του μαγνητικού πεδίου εξαιτίας του ευθύγραμμου αγωγού και του σωληνοειδούς οι οποίες είναι κάθετες μεταξύ τους. Για τα μέτρα του B_1 και B_2 αντίστοιχα έχουμε:

$$B_1 = \mu_0 \cdot I_1 \frac{N}{l} \quad (1) \quad \text{και} \quad B_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_2}{d} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{1}{2}l, I_2 = 2\pi I_1$$

$$B_2 = \mu_0 \cdot \frac{2I_1}{l} \quad (2).$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις δύο σχέσεις έχουμε:

$$\frac{B_1}{B_2} = \frac{\mu_0 \cdot I_1 \frac{N}{l}}{\mu_0 \cdot \frac{2I_1}{l}} = \frac{N}{2} \Rightarrow B_2 = \frac{2B_1}{N} \quad (3)$$

Για τη συνολική ένταση του μαγνητικού πεδίου στο κέντρο (Κ) του σωληνοειδούς που οφείλεται και στον ευθύγραμμο αγωγό αλλά και στο σωληνοειδές, έχουμε:

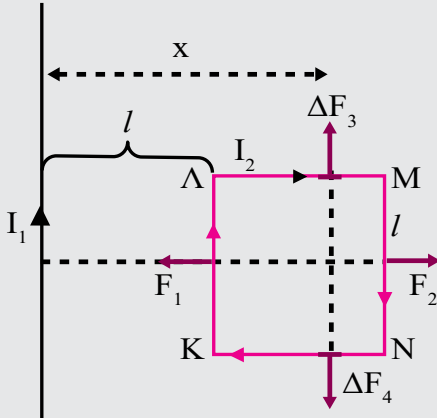
$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} \stackrel{(3)}{\Rightarrow} B = \sqrt{B_1^2 + \frac{4B_1^2}{N^2}} \Rightarrow$$

$$B = \frac{B_1 \sqrt{N^2 + 4}}{N}$$

B3. Σωστή απάντηση είναι η β).

Δικαιολόγηση

Ο ρευματοφόρος αγωγός I_1 και η πλευρά ΚΛ διαρρέονται από ομόρροπα ρεύματα, οπότε στον ΚΛ αναπτύσσεται δύναμη μέτρου F_1 με φορά προς τα αριστερά, όπως στο σχήμα. Ο ρευματοφόρος αγωγός και η πλευρά ΜΝ διαρρέονται από αντίρροπα ρεύματα, οπότε στον ΚΛ αναπτύσσεται δύναμη μέτρου F_2 με φορά προς τα δεξιά, όπως στο σχήμα.



Οι οριζόντιοι αγωγοί του πλαισίου δέχονται δυνάμεις Laplace ίδιου μέτρου και αντίθετης φοράς. Αυτό συμβαίνει γιατί ο ευθύγραμμος αγωγός δημιουργεί ίσες εντάσεις του μαγνητικού πεδίου του σε απόσταση x από αυτόν και ανά δύο τα απέναντι στοιχειώδη τμήματα των οριζόντιων αγωγών δέχονται δυνάμεις που αλληλοαναιρούνται.

$$\Delta F_3 = B_1 I_2 \Delta \ell_3 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2 \cdot \Delta \ell_3}{x}$$

$$\Delta F_4 = B_1 I_2 \Delta \ell_4 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2 \cdot \Delta \ell_4}{x}$$

$$\Sigma F_{3,4} = \Delta F_3 - \Delta F_4 = 0$$

Άρα η συνιστάμενη των δυνάμεων που ασκούνται στο πλαίσιο καθορίζεται μόνο από τη συνισταμένη των F_1, F_2 .

$$F_1 = B_1 I_2 \ell = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2 \cdot \ell}{\ell} \Rightarrow F_1 = 2 \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2$$

$$F_2 = B'_1 I_2 \ell = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2 \cdot \ell}{2\ell} \Rightarrow F_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2$$

$$\Sigma F_{1,2} = F_1 - F_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \quad \text{άρα}$$

$$\alpha = \frac{\Sigma F_{1,2}}{m} \Rightarrow \alpha = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi m}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Από το διάγραμμα προκύπτει ότι:

$$\frac{3T}{4} = 0,015s \Rightarrow T = 0,02s \Rightarrow$$

$$f = \frac{1}{T} \Rightarrow f = 50\text{Hz}$$

Επίσης έχουμε ότι:

$$P_{\max} = 100\text{W} \Rightarrow \frac{V^2}{R} = 100 \Rightarrow V = 50\text{V}.$$

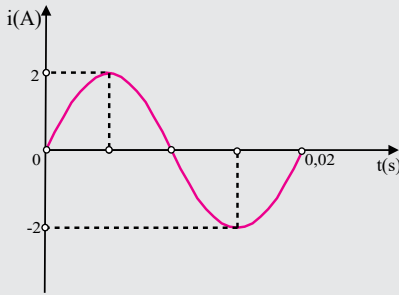
Γ2. Η χρονική εξίσωση της έντασης του εναλλασσόμενου ρεύματος είναι:

$$i = I \mu \omega t$$

$$\text{όπου } I = \frac{V}{R} = 2\text{A} \quad \text{και} \quad \omega = 2\pi f = 100\pi \text{ rad/s}$$

οπότε τελικά παίρνουμε:

$$i = 2\eta\mu 100\pi t (\text{SL})$$



Γ3. Η τάση μηδενίζεται στιγμιαία 200 φορές μετά από 100 περιόδους, άρα:
 $t = 100T = 2\text{ s}$

$$Q_R = I_{\text{ev.}}^2 R t$$

$$\text{Όμως: } I_{\text{ev.}} = \frac{I}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} A$$

$$\text{οπότε: } Q_R = 100 \text{ J.}$$

Γ4. $P = 50\% \bar{P} \Rightarrow V I \eta \mu^2 \omega t = \frac{1}{2} V_{\text{ev.}} I_{\text{ev.}} \Rightarrow$

$$V I \eta \mu^2 \omega t = \frac{1}{2} \frac{V}{\sqrt{2}} \frac{I}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\eta \mu^2 \omega t = \frac{1}{4} \Rightarrow \eta \mu \omega t = \pm \frac{1}{2}$$

$$\eta \mu \omega t = \frac{1}{2} = \eta \mu \frac{\pi}{6} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \omega t = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{2\kappa\pi}{\omega} + \frac{\pi}{6\omega} (1) \\ \eta \mu \\ \omega t = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{2\kappa\pi}{\omega} + \frac{5\pi}{6\omega} (2) \end{cases}$$

$$\eta \mu \omega t = -\frac{1}{2} = \eta \mu \left(-\frac{\pi}{6} \right) \Rightarrow$$

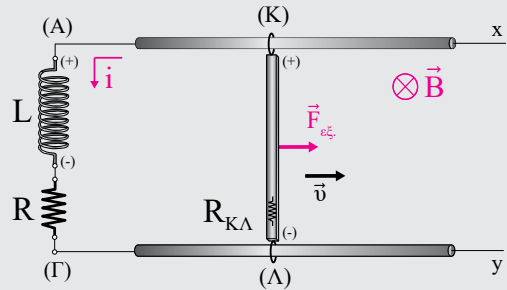
$$\begin{cases} \omega t = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{2\kappa\pi}{\omega} - \frac{\pi}{6\omega} (3) \\ \eta \mu \\ \omega t = 2\kappa\pi + \frac{7\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{2\kappa\pi}{\omega} + \frac{7\pi}{6\omega} (4) \end{cases}$$

Η στιγμιαία ισχύς είναι ίση με το 50% της μέσης ισχύος για δεύτερη φορά αν στη σχέση (2) βάλουμε όπου $\kappa = 0$.

$$\text{Τελικά } t = \frac{5\pi}{6\omega} \Rightarrow t = \frac{1}{120} \text{ s.}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.



Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας είναι της μορφής $v = v_0 + at$, επομένως, έχουμε:

$$v = 6 + 4t (\text{S.I.})$$

Από τον δεύτερο κανόνα του Kirchhoff προκύπτει:

$$E_{\text{επ}} - i(R + R_{\text{KL}}) - |E_{\text{αυτ}}| = 0 \Rightarrow$$

$$Bvl - i(R + R_{\text{KL}}) - |E_{\text{αυτ}}| = 0 \Rightarrow$$

$$i = \frac{Bvl - |E_{\text{αυτ}}|}{R + R_{\text{KL}}} \Rightarrow i = \left(\frac{2 \cdot (6 + 4t) \cdot 0,5 - 4}{0,5 + 0,5} \right) \Rightarrow$$

$$i = 2 + 4t (\text{S.I.})$$

Δ2. Από την εξίσωση $i = 2 + 4t$ (S.I.) προκύπτει ότι: $\frac{di}{dt} = 4 \frac{A}{s}$.

Για τον συντελεστή αυτεπαγωγής του πηνίου προκύπτει:

$$|E_{\text{αυτ}}| = L \left| \frac{di}{dt} \right| \Rightarrow L = \frac{|E_{\text{αυτ}}|}{\left| \frac{di}{dt} \right|} \Rightarrow L = 1H$$

Δ3. Υπολογίζουμε το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα τη χρονική στιγμή t_1 . Προκύπτει:

$$U_1 = \frac{1}{2} Li_1^2 \Rightarrow i_1 = \sqrt{\frac{2U_1}{L}} \Rightarrow i_1 = 10A$$

Ο ρυθμός αποθήκευσης της ενέργειας στο πηνίο είναι:

$$\frac{\Delta U}{\Delta t} = |E_{\text{αυτ}}| i_1 \Rightarrow \frac{\Delta U}{\Delta t} = 40 \frac{J}{s}$$

Βρίσκουμε τη χρονική στιγμή t_1 . Ισχύει:

$$i_1 = 2 + 4t_1 \Rightarrow 10 = 2 + 4t_1 \Rightarrow t_1 = 2s$$

Η ταχύτητα εκείνη τη χρονική στιγμή είναι:

$$v_1 = 6 + 4t_1 \Rightarrow v_1 = 14 \frac{m}{s}$$

Υπολογίζουμε την τιμή της εξωτερικής δύναμης τη χρονική στιγμή t_1 με τη βοήθεια του δευτέρου νόμου του Νεύτωνα. Έχουμε:

$$\Sigma F = m\alpha \Rightarrow F_{\text{εξ}} - F_L = m\alpha \Rightarrow$$

$$F_{\text{εξ}} = Bi_1 l + m\alpha \Rightarrow F_{\text{εξ}} = 10,4N$$

Ο ρυθμός της προσφερόμενης ενέργειας τη χρονική στιγμή t_1 είναι:

$$P_{F_{\text{εξ}}} = F_{\text{εξ}} v_1 \Rightarrow P_{F_{\text{εξ}}} = F_{\text{εξ}} v_1 \Rightarrow P_{F_{\text{εξ}}} = 145,6W$$

Δ4. Υπολογίζουμε την ταχύτητα τη χρονική στιγμή t_2 . Ισχύει:

$$\frac{dK}{dt} = \Sigma F \cdot v_2 \Rightarrow \frac{dK}{dt} = m\alpha v_2 \Rightarrow$$

$$v_2 = \frac{\frac{dK}{dt}}{m\alpha} \Rightarrow v_2 = 26 \frac{m}{s}$$

Υπολογίζουμε τη χρονική στιγμή t_2 .

Προκύπτει:

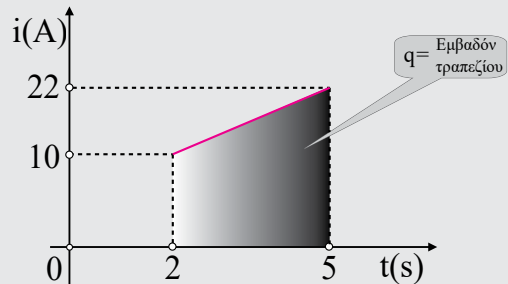
$$v_2 = 6 + 4t_2 \Rightarrow 26 = 6 + 4t_2 \Rightarrow t_2 = 5s$$

Από την εξίσωση $i = 2 + 4t$ (S.I.) έχουμε:

$$\text{Για } t_1 = 2s, i_1 = 10A$$

$$\text{Για } t_2 = 5s, i_2 = 22A$$

Σχεδιάζουμε το διάγραμμα $i_{\text{επ.}} - t$ για τη χρονική διάρκεια $t_1 \rightarrow t_2$.



Με εμβαδομέτρηση προκύπτει:

$$q = E \Rightarrow q = \left[\frac{(10 + 22) \cdot (5 - 2)}{2} \right] C \Rightarrow q = 48C$$

11ο Διαγώνισμα (Δ11)

ΘΕΜΑ Α

A1. β), A2. γ), A3. β), A4. α)
A5. α) Λ, β) Λ, γ) Σ, δ) Λ, ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

B1. Σωστή απάντηση είναι η **β**).

Δικαιολόγηση

Ισχύει $\Sigma F = 0 \Rightarrow F_A = F_r \Rightarrow$

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_A \cdot I_r \cdot \ell}{r_A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_A \cdot I_r \cdot \ell}{r_r} \Rightarrow \frac{I_A}{r_A} = \frac{I_r}{r_r} \Rightarrow$$

$$\frac{I_A}{r_r - d} = \frac{3I_A}{r_r} \Rightarrow r_r = \frac{3d}{2}$$



Δικαιολόγηση

$$I_{\varepsilon\pi} = \frac{E_{\varepsilon\pi}}{R_{\rho\lambda}} \Rightarrow I_{\varepsilon\pi} = \frac{E_{\varepsilon\pi}}{2R}$$
$$\Sigma F_v = m\alpha \Rightarrow w - F_L = m\alpha \Rightarrow$$

$$mg - BI_{\varepsilon\pi}L = m\frac{g}{4} \Rightarrow$$

$$\frac{3mg}{4} = \frac{BE_{\pi}L}{2R} \Rightarrow E_{\pi} = \frac{3mgR}{2BL}$$

$$E_{\varepsilon\pi} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \Rightarrow \frac{3mgR}{2BL} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \Rightarrow \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{1,5mgR}{BL}$$

Δικαιολόγηση

$$p = v_i \Rightarrow p = V \eta \mu \omega t \cdot I \eta \mu \omega t \Rightarrow$$

$$p = V_{\text{ev}} \sqrt{2} I_{\text{ev}} \sqrt{2} \eta \mu^2 \omega t \Rightarrow p = 2 \bar{P} \eta \mu^2 \omega t (1)$$

$P = \frac{\bar{P}}{\gamma}$ για 1η φορά. Από τη σχέση (1) έχουμε:

$$\frac{\bar{P}}{2} = 2\bar{P}\eta\mu^2\omega t_1 \Rightarrow \eta\mu^2\omega t_1 = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\eta\mu\omega t_1 = \pm \frac{1}{2} (2)$$

$$\eta\mu\omega t_1 = \frac{1}{2} = \eta\mu\frac{\pi}{6} \text{ και}$$

$$\eta\mu\omega t_1 = -\frac{1}{2} = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$t_1 = \frac{T}{12}, t_1 = \frac{5T}{12}, t_1 = \frac{7T}{12} \dots$$
$$t_1 = \frac{T}{12}$$

$p = \frac{3\bar{P}}{2}$ για 1η φορά. Από τη σχέση (1) έχουμε:

$$\frac{3\bar{P}}{2} = 2\bar{P}\eta\mu^2\omega t_1 \Rightarrow \eta\mu^2\omega t_1 = \frac{3}{4} \Rightarrow$$

$$\eta\mu\omega t_1 = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} (3)$$

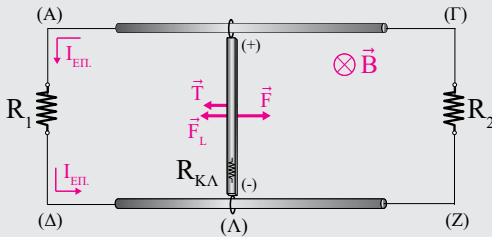
$$\eta\mu\omega t_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} = \eta\mu \frac{\pi}{3} \text{ και}$$

$$\eta\mu\omega t_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$t_2 = \frac{T}{6}, t_2 = \frac{T}{3}, t_2 = \frac{2T}{3} \dots$$
$$t_2 = \frac{T}{6}$$
$$\Delta t = \frac{T}{6} - \frac{T}{12} \Rightarrow \Delta t = \frac{T}{12}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.



Στον αγωγό αναπτύσσεται ΗΕΔ από επαγωγή:
 $E_{\text{επ}} = BvL$

Η ολική αντίσταση του κυκλώματος είναι:

$$R_{\text{ολ}} = R_{1,2} + R_{\text{ΚΛ}} \Rightarrow$$

$$R_{\text{ολ}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_{\text{ΚΛ}} \Rightarrow R_{\text{ολ}} = 5\Omega$$

Όταν η ταχύτητα είναι ίση με την οριακή ισχύει:

$$I_{\text{επ}} = \frac{E_{\text{επ}}}{R_{\text{ολ}}} \Rightarrow I_{\text{επ}} = \frac{Bv_{\text{οπ}}L}{R_{\text{ολ}}} \Rightarrow$$

$$I_{\text{επ}} = \frac{Bv_{\text{οπ}}L}{R_{\text{ολ}}} \Rightarrow I_{\text{επ}} = 2\text{A}$$

Το μέτρο της δύναμης Laplace υπολογίζεται από τον τύπο:

$$F_L = BI_{\text{επ}}L \Rightarrow F_L = 2\text{N}$$

Γ2. Όταν ο αγωγός κινείται με σταθερή οριακή ταχύτητα ισχύει:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F - T - F_L = 0 \Rightarrow$$

$$T = F - F_L \Rightarrow T = 2\text{N}$$

Για τη δύναμη της τριβής ισχύει:

$$T = \mu mg \Rightarrow \mu = \frac{T}{mg} \Rightarrow \mu = 0,5$$

Γ3. Τη χρονική στιγμή t_2 η ταχύτητα του αγωγού ΚΛ υπολογίζεται από τον τύπο της κινητικής ενέργειας:

$$K_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 \Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{2K_2}{m}} \Rightarrow v_2 = 4\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ο ρυθμός με τον οποίο η εξωτερική δύναμη παρέχει ενέργεια στο κύκλωμα, τη χρονική στιγμή t_2 , είναι:

$$P_F = Fv_2 \Rightarrow P_F = 16\text{W}$$

Ο ρυθμός με τον οποίο παράγεται θερμότητα λόγω τριβών, τη χρονική στιγμή t_2 , είναι:

$$\frac{\Delta Q_T}{\Delta t} = T v_2 \Rightarrow \frac{\Delta Q_T}{\Delta t} = 8\frac{\text{J}}{\text{s}}$$

Γ4. Από την εφαρμογή του δευτέρου νόμου του Νεύτωνα έχουμε:

$$\Sigma F = m\alpha \Rightarrow F - T - F_L = m\alpha \Rightarrow$$

$$F - T - \frac{B^2 v L^2}{R_{\text{ολ}}}$$

$$F - T - BI_{\text{επ}}L = m\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{F - T - \frac{B^2 v L^2}{R_{\text{ολ}}}}{m} \quad (1)$$

Από τη σχέση (1) υπολογίζουμε την ταχύτητα τη χρονική στιγμή t_3 , θέτοντας όπου $\alpha = 4\text{m/s}^2$. Έχουμε:

$$4 = \frac{4 - 2 - \frac{v_3}{5}}{0,4} \Rightarrow v_3 = 2\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του αγωγού τη χρονική στιγμή t_3 είναι:

$$\frac{dK}{dt} = \Sigma F \cdot v_3 \Rightarrow \frac{dK}{dt} = m\alpha v_3 \Rightarrow \frac{dK}{dt} = 3,2\frac{\text{J}}{\text{s}}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Ο συντελεστής αυτεπαγωγής του πηνίου είναι:

$$L = \mu\mu_0 \frac{N^2 S}{l} \Rightarrow L = 2\text{H}$$

Από τον νόμο του Ohm έχουμε:

$$I_0 = \frac{E}{R_{\pi} + r + R} \Rightarrow I_0 = 4\text{A}$$

Η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου που έχει αποθηκευτεί στο πηνίο είναι:

$$U_0 = \frac{1}{2} L I_0^2 \Rightarrow U_0 = 16 \text{ J}$$

Δ2. Σύμφωνα με τον νόμο της αυτεπαγωγής

$$\text{ισχύει: } E_{\text{αυτ}} = -L \frac{\Delta I}{\Delta t} (1)$$

Από τον νόμο της επαγωγής προκύπτει:

$$E_{\text{επ}} = -N \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} (2)$$

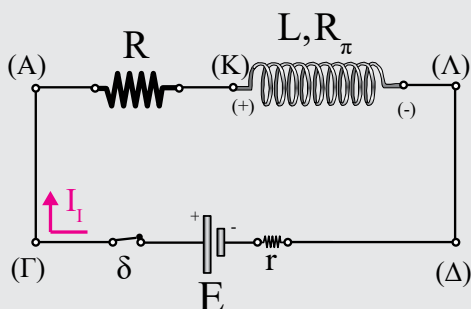
Από τις σχέσεις (1),(2) έχουμε:

$$-L \frac{\Delta I}{\Delta t} = -N \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \Rightarrow L \cdot \Delta I = N \cdot \Delta \Phi \Rightarrow$$

$$L(I_0 - 0) = N(\Phi - 0) \Rightarrow \Phi = \frac{L I_0}{N} \Rightarrow$$

$$\Phi = 8 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$$

Δ3.



Τη χρονική στιγμή t_1 ισχύει:

$$I_1 = \frac{25}{100} I_0 \Rightarrow I_1 = 1 \text{ A}$$

Από την εφαρμογή του δευτέρου κανόνα του Kirchhoff στη διαδρομή ΑΚΛΔΓΑ έχουμε:

$$E - I_1 r - I_1 R - I_1 R_{\pi} - |E'_{\text{αυτ}}| = 0 \Rightarrow$$

$$|E'_{\text{αυτ}}| = E - I_1 (r + R_{\pi} + R) \Rightarrow$$

$$|E'_{\text{αυτ}}| = 15 \text{ V}$$

Ισχύει:

$$|E'_{\text{αυτ}}| = L \left| \frac{dI}{dt} \right| \Rightarrow \left| \frac{dI}{dt} \right| = \frac{|E'_{\text{αυτ}}|}{L} \Rightarrow \left| \frac{dI}{dt} \right| = 7,5 \frac{\text{A}}{\text{s}}$$

Επειδή το ρεύμα αυξάνεται ισχύει:

$$\frac{dI}{dt} = +7,5 \frac{\text{A}}{\text{s}}$$

Δ4. Τη χρονική στιγμή t_2 για την ένταση του ρεύματος προκύπτει:

$$P_{\eta\lambda} = E I_2 \Rightarrow I_2 = \frac{P_{\eta\lambda}}{E} \Rightarrow I_2 = 2 \text{ A}$$

Εφαρμόζουμε τον 2^ο κανόνα του Kirchhoff στη διαδρομή ΚΑΓΔΛ για να υπολογίσουμε την τάση στα άκρα του πηνίου. Ισχύει:

$$V_K + I_2 R - E + I_2 r = V_{\Lambda} \Rightarrow$$

$$V_{K\Lambda} = E - I_2 (r + R) \Rightarrow$$

$$V_{K\Lambda} = 12 \text{ V}$$

Ο ρυθμός με τον οποίο προσφέρεται ενέργεια στο πηνίο είναι:

$$P_{\pi\eta\nu} = V_{\pi\eta\nu} I_2 \Rightarrow P_{\pi\eta\nu} = V_{K\Lambda} I_2 \Rightarrow P_{\pi\eta\nu} = 24 \text{ W}$$

Εφαρμόζουμε τον 2ο κανόνα του Kirchhoff στη διαδρομή ΑΚΛΔΓΑ:

$$E - I_2 r - I_2 R - I_2 R_{\pi} - |E'_{\text{αυτ}}| = 0 \Rightarrow$$

$$|E'_{\text{αυτ}}| = E - I_2 (r + R_{\pi} + R) \Rightarrow |E'_{\text{αυτ}}| = 10 \text{ V}$$

Ο ρυθμός με τον οποίο αποθηκεύεται ενέργεια στο μαγνητικό πεδίο του πηνίου είναι:

$$P_L = |E'_{\text{αυτ}}| I_2 \Rightarrow P_L = 20 \text{ W}$$

12ο Διαγώνισμα (Δ12)

ΘΕΜΑ Α

Α1. α), Α2. δ), Α3. β), Α4. γ)
Α5. α) Λ, β) Λ, γ) Λ, δ) Λ, ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Σωστή απάντηση είναι η β).

Δικαιολόγηση

Ισχύει:

$$T_{\text{αρχ}} = \theta_{\text{αρχ}} + 273 \Rightarrow T_{\text{αρχ}} = (127 + 273) \text{ K} \Rightarrow$$

$$T_{\text{αρχ}} = 400 \text{ K}$$

Επίσης έχουμε:

$$T_{\text{τελ}} = \theta_{\text{τελ}} + 273 \Rightarrow T_{\text{τελ}} = (527 + 273) \text{ K} \Rightarrow T_{\text{τελ}} = 800 \text{ K} \Rightarrow T_{\text{τελ}} = 2T_{\text{αρχ}}$$

Από τον νόμο μετατόπισης του Wien, προκύπτει:

$$\lambda_{\text{αρχ}} T_{\text{αρχ}} = \lambda_{\text{τελ}} T_{\text{τελ}} \Rightarrow \lambda_{\text{τελ}} = \frac{\lambda_{\text{αρχ}} T_{\text{αρχ}}}{T_{\text{τελ}}} \Rightarrow \lambda_{\text{τελ}} = \frac{\lambda_{\text{αρχ}} T_{\text{αρχ}}}{2T_{\text{αρχ}}} \Rightarrow \lambda_{\text{τελ}} = \frac{\lambda_{\text{αρχ}}}{2}$$

B2. Σωστή απάντηση είναι η γ).

Δικαιολόγηση

Σε απόσταση r ισχύει:

$$I = \frac{P}{4\pi r^2}$$

Σε απόσταση $4r$ ισχύει:

$$I' = \frac{P}{4\pi(4r)^2} \Rightarrow I' = \frac{I}{16}$$

B3. Σωστή απάντηση είναι η α).

Δικαιολόγηση

Ισχύει:

$$P = \frac{E_{\text{ολ}}}{t} \Rightarrow P = \frac{Nhf}{t} \Rightarrow \frac{N}{t} = \frac{P}{hf}$$

Επίσης έχουμε:

$$I = \frac{q}{t} \Rightarrow I = \frac{N|q_e|}{t} \Rightarrow I = \frac{P|q_e|}{hf}$$

Ισχύει:

$$P' = 2P$$

Για την ένταση του ρεύματος προκύπτει τελικά:

$$I' = \frac{P'|q_e|}{hf} \Rightarrow I' = \frac{2P|q_e|}{hf} \Rightarrow I' = 2I$$

ΘΕΜΑ Γ

A)

Γ1. Για το μήκος κύματος αιχμής της ακτινοβολίας αυτής, έχουμε:

$$\lambda_{\text{max}} T = 2,9 \cdot 10^{-3} \Rightarrow \lambda_{\text{max}} = \frac{2,9 \cdot 10^{-3}}{T} \Rightarrow$$

$$\lambda_{\text{max}} = 5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

Γ2. Για την ενέργεια των φωτονίων, ισχύει:

$$E = hf \Rightarrow E = \frac{hc}{\lambda_{\text{max}}} \Rightarrow E = 4 \cdot 10^{-20} \text{ J}$$

B)

Γ3. Για την ένταση της ακτινοβολίας σε απόσταση d , ισχύει:

$$I = \frac{P}{4\pi d^2} \Rightarrow I = \frac{400 \text{ W}}{\pi \text{ m}^2}$$

Γ4. Προκύπτει:

$$P' = P \frac{A}{4\pi d'^2} \Rightarrow P' = 5 \cdot 10^{-3} \text{ W}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Από διάγραμμα έχουμε:

$$f_0 = 450 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

Δ2. Για το έργο εξαγωγής του μετάλλου, ισχύει:

$$\phi = hf_0 \Rightarrow \phi = 187,5 \text{ eV}$$

Δ3. Υπολογίζουμε τη μέγιστη κινητική ενέργεια των εκπεμπόμενων φωτοηλεκτρονίων:

$$K_{\text{max}} = hf - \phi \Rightarrow K_{\text{max}} = 10^{-17} \text{ J}$$

Δ4. Ισχύει:

$$P = \frac{E_{\text{ολ}}}{t} \Rightarrow P = \frac{Nhf}{t} \Rightarrow \frac{N}{t} = \frac{P}{hf}$$

Για την ένταση του ρεύματος στο κύκλωμα, έχουμε:

$$I = \frac{q}{t} \Rightarrow I = \frac{N|q_e|}{t} \Rightarrow$$

$$I = \frac{P|q_e|}{hf} \Rightarrow I = 24 \cdot 10^{-3} \text{ A}$$

13ο Διαγώνισμα (Δ13)

ΘΕΜΑ Α

A1. γ), A2. γ), A3. α), A4. δ)
A5. α) Σ, β) Λ, γ) Σ, δ) Λ, ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

B1. Σωστή απάντηση είναι η β).

Δικαιολόγηση

Η φωτοηλεκτρική εξίσωση του Einstein είναι:

$$K = hf - \varphi \quad (1)$$

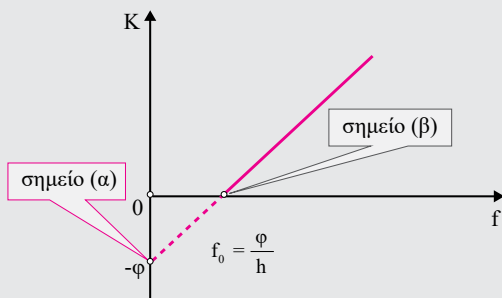
Για $f = 0$ η σχέση (1) δίνει:

$$K = -\varphi \text{ (σημείο } (\alpha))$$

Για $K = 0$ η σχέση (1) δίνει:

$$f = f_0 = \frac{\varphi}{h} \text{ (σημείο } (\beta)) \Rightarrow$$

συχνότητα κατωφλίου



Για το μέταλλο M_1 όπως φαίνεται από το δοθέν διάγραμμα, για τη συχνότητα κατωφλίου του $f_{0(1)}$ ισχύει:

$$f_{0(1)} = \frac{\varphi_0}{h} \quad (2)$$

όπου φ_0 το έργο εξαγωγής για το μέταλλο M_1 .

Για το μέταλλο M_2 , όπως φαίνεται από το δοθέν διάγραμμα, για τη συχνότητα κατωφλίου του $f_{0(2)}$ ισχύει:

$$f_{0(2)} = \frac{3\varphi_0}{h} \quad (3)$$

Εφαρμόζουμε τη φωτοηλεκτρική εξίσωση του Einstein για το μέταλλο M_1 .

$$K = hf - \varphi_0$$

Για την κινητική ενέργεια K που αποκτούν τα φωτοηλεκτρόνια που εξέρχονται από το μέταλλο M_1 , αν σε αυτό προσπίπτει ακτινοβολία συχνότητας ίσης με τη συχνότητα κατωφλίου του μετάλλου M_2 , έχουμε:

$$K = hf - \varphi_0 \Rightarrow$$

$$K = h \cdot \frac{f = f_{0(2)} = \frac{3\varphi_0}{h}} - \varphi_0 \Rightarrow K = 2\varphi_0$$

B2. Σωστή απάντηση είναι η α).

Δικαιολόγηση

Ισχύει:

$$\lambda' - \lambda_c = \lambda_c \left(1 - \sin \frac{2\pi}{3} \right) \Rightarrow \lambda' = 2,5\lambda_c$$

Για το προσπίπτον φωτόνιο έχουμε:

$$p = \frac{h}{\lambda_c}$$

Για το σκεδαζόμενο φωτόνιο έχουμε:

$$p' = \frac{h}{2,5\lambda_c} \Rightarrow p' = 0,4p$$

Το ζητούμενο ποσοστό (%) είναι:

$$\Pi(\%) = \frac{p' - p}{p} 100\% \Rightarrow$$

$$\Pi(\%) = \frac{0,4p - p}{p} 100\% \Rightarrow \Pi(\%) = -60\%$$

B3. Σωστή απάντηση είναι η β).

Δικαιολόγηση

Αρχικά ισχύει:

$$K_1 - K = eV \Rightarrow \frac{8}{9}K = eV \quad (1)$$

Τελικά ισχύει:

$$\begin{aligned} K_2 - K &= -eV \Rightarrow \\ K_2 - K &= -\frac{8}{9}K \Rightarrow K_2 = \frac{K}{9} \Rightarrow \\ \frac{p_2^2}{2m} &= \frac{1}{9} \frac{p^2}{2m} \Rightarrow p_2 = \frac{1}{3}p \Rightarrow \\ \frac{h}{\lambda_2} &= \frac{1}{3} \frac{h}{\lambda} \Rightarrow \lambda_2 = 3\lambda \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Ισχύει:

$$\begin{aligned} E &= hf \Rightarrow E = \frac{hc}{\lambda} \Rightarrow \\ E &= \frac{hc}{1,5\lambda_c} \Rightarrow E = 5,5 \cdot 10^{-14} \text{ J} \end{aligned}$$

Υπολογίζουμε την ενέργεια των φωτονίων σε eV. Προκύπτει:

$$E = \left(\frac{5,5 \cdot 10^{-14}}{1,6 \cdot 10^{-19}} \right) \text{ eV} \Rightarrow E = 343750 \text{ eV}$$

Γ2. Για τη μετατόπιση Compton, έχουμε:

$$\begin{aligned} \Delta\lambda &= \lambda_c (1 - \cos\varphi) \Rightarrow \\ \Delta\lambda &= \frac{\lambda_c}{2} \Rightarrow \Delta\lambda = 1,2 \cdot 10^{-12} \text{ m} \end{aligned}$$

Γ3. Για το μήκος κύματος του σκεδαζόμενου φωτονίου, προκύπτει:

$$\begin{aligned} \Delta\lambda &= \lambda' - \lambda \Rightarrow \lambda' = \lambda + \Delta\lambda \Rightarrow \\ \lambda' &= 1,5\lambda_c + \frac{\lambda_c}{2} \Rightarrow \lambda' = 2\lambda_c \Rightarrow \\ \lambda' &= 4,8 \cdot 10^{-12} \text{ m} \end{aligned}$$

Γ4. Η κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου, μετά τη σκέδαση, είναι:

$$\begin{aligned} K &= \Delta E \Rightarrow K = hf - hf' \Rightarrow K = \left(\frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'} \right) \Rightarrow \\ K &= hc \left(\frac{1}{1,5\lambda_c} - \frac{1}{2\lambda_c} \right) \Rightarrow K = \frac{hc}{6\lambda_c} \Rightarrow \\ K &= 1,375 \cdot 10^{-14} \text{ J} \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για τη συχνότητα κατωφλίου, ισχύει:

$$f_0 = \frac{\phi}{h} \Rightarrow f_0 = 0,6 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

Δ2. Έχουμε:

$$\lambda_0 = \frac{c}{f_0} \Rightarrow \lambda_0 = 5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

Δ3. Για την τάση αποκοπής, προκύπτει:

$$K_{\max} = eV_0 \Rightarrow V_0 = \frac{K_{\max}}{e} \Rightarrow V_0 = 0,5 \text{ V}$$

Δ4. Για τη συχνότητα της προσπίπτουσας ακτινοβολίας έχουμε:

$$\begin{aligned} K_{\max} &= hf - \phi \Rightarrow f = \frac{K_{\max} + \phi}{h} \Rightarrow \\ f &= 1,8 \cdot 10^{14} \text{ Hz} \end{aligned}$$

14ο Διαγώνισμα (Δ14)

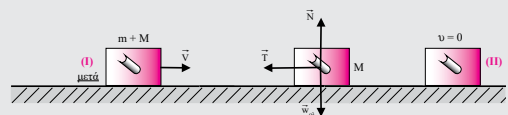
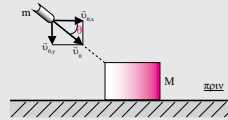
ΘΕΜΑ Α

A1. δ), A2. γ), A3. α), A4. δ)
A5. α) Λ, β) Λ, γ) Λ, δ) Σ, ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

B1. Σωστή απάντηση είναι η β).

Δικαιολόγηση



Η ορμή του συστήματος βλήμα-ξύλινο κιβώτιο διατηρείται μόνο στον άξονα x.

Α.Δ.Ο. άξονας x:

$$\vec{p}_{ολ(πριν),x} = \vec{p}_{ολ(μετά),x} \Rightarrow m v_{0,x} = (m+M)V \Rightarrow$$

$$m v_0 \sin \theta = (m+M)V \Rightarrow V = \frac{m v_0}{2(m+M)} \quad (1)$$

Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση μέχρι να σταματήσει. Η θερμότητα που παράγεται λόγω της τριβής ισούται με την απόλυτη τιμή του έργου της. Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας. Ισχύει:

$$\Theta.M.K.E._{(I) \rightarrow (II)} : \Delta K = \Sigma W_F \Rightarrow$$

$$K_{(τελ.)} - K_{(αρχ.)} = W_T \Rightarrow$$

$$W_T = -\frac{1}{2}(m+M)V^2 \Rightarrow$$

$$Q_{τριβής} = |W_T| = \frac{1}{2}(m+M)V^2 \quad (2)$$

Η θερμότητα που παράχθηκε κατά την κρούση είναι:

$$\begin{aligned} Q_{κρούσης} &= K_{ολ.(πριν)} - K_{ολ.(μετά)} = \\ &= \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{1}{2} (m+M)V^2 \quad (3) \end{aligned}$$

Γνωρίζουμε ότι:

$$\begin{aligned} Q_{κρούσης} &= 21 \cdot Q_{τριβής} \stackrel{(2),(3)}{\Rightarrow} \\ \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{1}{2} (m+M)V^2 &= 21 \cdot \frac{1}{2} (m+M)V^2 \Rightarrow \\ m v_0^2 &= 22 \cdot (m+M)V^2 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \\ m v_0^2 &= 22 \cdot (m+M) \left[\frac{m v_0}{2(m+M)} \right]^2 \Rightarrow \frac{m}{M} = \frac{2}{9} \end{aligned}$$

B2. Σωστή απάντηση είναι η α).

Δικαιολόγηση

Σύμφωνα με την εξίσωση Compton έχουμε :

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \varphi) \quad (1)$$

θέτοντας $\lambda = 2 \frac{h}{m_e c} (2)$ και $\varphi = 180^\circ$ έχουμε

$$\lambda' - 2 \frac{h}{m_e c} = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos 180^\circ) \Rightarrow$$

$$\lambda' = 2 \frac{h}{m_e c} + \frac{h}{m_e c} (1+1) \Rightarrow \lambda' = 4 \frac{h}{m_e c} \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (2), (3) προκύπτει ότι:

$$\lambda' = 2\lambda \Rightarrow \frac{h}{p'} = 2 \frac{h}{p} \Rightarrow p' = \frac{p}{2}$$

Η σκέδαση Compton αποτελεί ένα είδος κρούσης, οπότε ισχύει η Αρχή διατήρησης της Ορμής. (Α.Δ.Ο):

$$\vec{p}_{ολ.πριν} = \vec{p}_{ολ.μετά} \Rightarrow \vec{p}_{\text{φωτ.}} = \vec{p}'_{\text{φωτ.}} + \vec{p}_e \Rightarrow$$

$$p = -p' + p_e \Rightarrow p_e = p + p' \Rightarrow$$

$$p_e = p + \frac{p}{2} \Rightarrow p_e = \frac{3p}{2}$$

B3. Σωστή απάντηση είναι η β).

Δικαιολόγηση

Σε $t = T$ έχουμε $A = A_0 - \frac{40}{100} A_0 = 0,6 A_0$

Το ποσοστό μείωσης της ενέργειας θα είναι:

$$\begin{aligned} \Pi\% &= \frac{|\Delta E|}{E_0} \cdot 100\% = \frac{E_0 - E}{E_0} \cdot 100\% = \\ &= \left(1 - \frac{E}{E_0} \right) \cdot 100\% = \left(1 - \frac{\frac{1}{2} D A^2}{\frac{1}{2} D A_0^2} \right) \cdot 100\% = \\ &= \left[1 - \frac{(0,6 A_0)^2}{A_0^2} \right] \cdot 100\% \Rightarrow \Pi\% = 64\% \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Συγκρίνουμε την εξίσωση του κύματος

$y = 0,2 \eta \mu 2\pi (2t - 2x) \text{ (S.I.)}$, με τη γενική

$$\text{μορφή } y = A \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right).$$

Προκύπτει:

$$\frac{t}{T} = 2t \Rightarrow T = 0,5s$$

Και:

$$\frac{x}{\lambda} = 2x \Rightarrow \lambda = 0,5m$$

Υπολογίζουμε την ταχύτητα διάδοσης:

$$v_{\delta} = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow v_{\delta} = 1 \frac{m}{s}$$

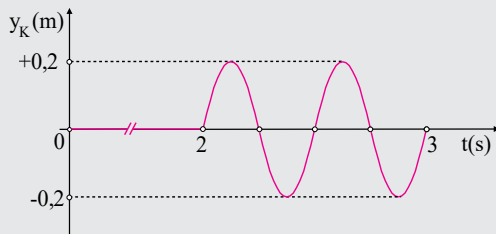
Γ2. Ισχύει:

$$t_K = \frac{x_K}{v_{\delta}} \Rightarrow t_K = 2s$$

Κατά τη χρονική διάρκεια $t = 0 \rightarrow t = 3s$, το σημείο (Κ) θα εκτελέσει:

$$N = \frac{\Delta t}{T} \Rightarrow N = \frac{t - t_K}{T} \Rightarrow N = 2\alpha\lambda.$$

Το ζητούμενο διάγραμμα είναι το εξής:



Γ3. Η φάση του σημείου (Κ) είναι η:

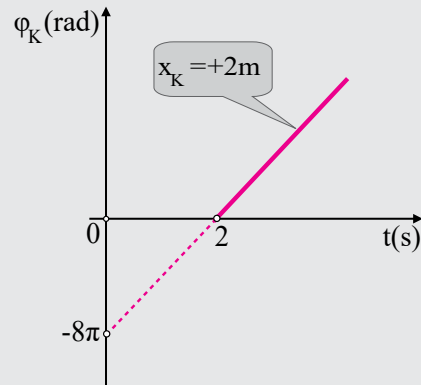
$$\varphi_K = 4\pi t - 4\pi x_K \Rightarrow \varphi_K = 4\pi t - 8\pi (S.I)(1)$$

Θέτουμε στη σχέση (1) όπου $t = 0$ και παίρνουμε: $\varphi_K = -8\pi \text{ rad}$

Θέτουμε στη σχέση (1) όπου $\varphi_K = 0$ και προκύπτει:

$$0 = 4\pi t - 8\pi \Rightarrow t = 2s$$

Το ζητούμενο διάγραμμα είναι το εξής:



Γ4. i) Ισχύει $\varphi_{\Sigma} > \varphi_{\Lambda}$ άρα το (Σ) είναι πιο κοντά στην πηγή.

ii) Ισχύει:

$$\Delta\varphi_{\Sigma,\Lambda} = \varphi_{\Sigma} - \varphi_{\Lambda} \Rightarrow$$

$$\frac{3\pi}{2} \text{ rad} = \varphi_{\Sigma} - \varphi_{\Lambda} \Rightarrow$$

$$\varphi_{\Sigma} = \varphi_{\Lambda} + \frac{3\pi}{2} \text{ rad}(1)$$

Για τη φάση του σημείου (Λ) έχουμε:

$$y_{\Lambda} = A \cdot \eta \mu \varphi_{\Lambda} \Rightarrow A = A \cdot \eta \mu \varphi_{\Lambda} \Rightarrow$$

$$\varphi_{\Lambda} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}(2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει:

$$\varphi_{\Sigma} = 2\kappa\pi + 2\pi$$

Τελικά προκύπτει:

$$y_{\Sigma} = A \cdot \eta \mu \varphi_{\Sigma} \Rightarrow$$

$$y_{\Sigma} = A \eta \mu (2\kappa\pi + 2\pi) \Rightarrow y_{\Sigma} = 0$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Αφού η ένταση του μαγνητικού πεδίου στην περιοχή που βρίσκεται ο κυκλικός αγωγός μειώνεται, μειώνεται και η μαγνητική ροή που διέρχεται μέσα από αυτόν, άρα, σύμφωνα με τον νόμο επαγωγής του Faraday στα άκρα του (Ζ) και (Δ) αναπτύσσεται Η.Ε.Δ. από

επαγωγή. Επειδή έχουμε κλειστό κύκλωμα, αυτό θα διαρρέεται από επαγωγικό ρεύμα το οποίο θα πρέπει να υπακούει στον κανόνα του Lenz και να αντιστέκεται στο αίτιο που το προκάλεσε το οποίο είναι η μείωση της έντασης του μαγνητικού πεδίου στην περιοχή του κυκλικού αγωγού. Για να γίνει αυτό, θα πρέπει ο κυκλικός αγωγός να δημιουργήσει μαγνητικό πεδίο με δυναμικές γραμμές που έχουν φορά από τον αναγνώστη προς τη σελίδα, ώστε να μην αφήσει την ένταση του μαγνητικού πεδίου σ' αυτή την περιοχή να μειωθεί. Από τον κανόνα του δεξιού χεριού προκύπτει ότι η φορά της έντασης του ρεύματος που διαρρέει τον αγωγό ΚΛ είναι από το άκρο (Λ) προς το άκρο (Κ) και η πολικότητα των (Δ) και (Ζ) είναι αυτή που φαίνεται στο σχήμα.

Για την ένταση του ρεύματος έχουμε:

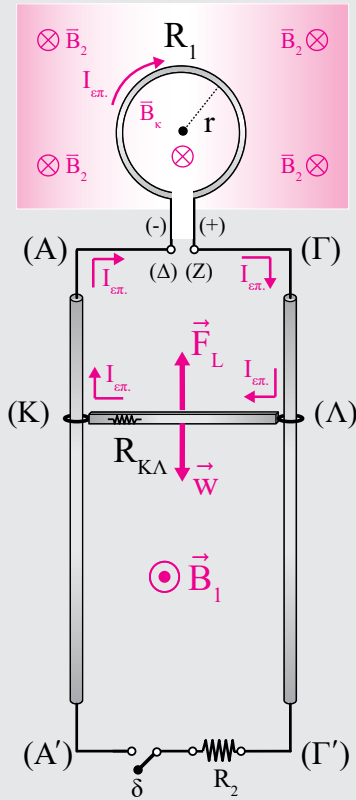
$$\begin{aligned} \frac{\Delta B_2}{\Delta t} &= \frac{B_{2(\text{τελ.})} - B_{2(\text{αρχ.})}}{\Delta t} = \\ &= \frac{4 - 0, 2\pi \cdot t_{\text{τελ.}} - 4 + 0, 2\pi \cdot t_{\text{αρχ.}}}{\Delta t} = \\ &= \frac{-0, 2\pi \cdot (t_{\text{τελ.}} - t_{\text{αρχ.}})}{\Delta t} = \frac{-0, 2\pi \cdot \Delta t}{\Delta t} \Rightarrow \\ \frac{\Delta B_2}{\Delta t} &= -0, 2\pi \frac{\text{T}}{\text{s}} \end{aligned}$$

Για την Η.Ε.Δ. από επαγωγή, έχουμε:

$$\begin{aligned} E_{\text{επ}} &= N \frac{|\Delta \Phi|}{\Delta t} = N \frac{|\Delta B_2| \cdot A}{\Delta t} = N \frac{|\Delta B_2| \cdot \pi r^2}{\Delta t} \Rightarrow \\ E_{\text{επ}} &= 8 \text{ V} \end{aligned}$$

Για το επαγωγικό ρεύμα, προκύπτει:

$$I_{\text{επ}} = \frac{E_{\text{επ}}}{R_{\text{ολ.}}} \Rightarrow I_{\text{επ}} = \frac{E_{\text{επ}}}{R_1 + R_{\text{ΚΛ}}} \Rightarrow I_{\text{επ}} = 2 \text{ A}$$



Α2. Για να ισορροπεί ο αγωγός ΚΛ πρέπει να ισχύει $\Sigma \vec{F} = 0$. Στον αγωγό ασκούνται το βάρος και η δύναμη Laplace που πρέπει να είναι αντίθετες. Σύμφωνα με τον κανόνα των τριών δακτύλων του δεξιού χεριού, για να έχει η δύναμη Laplace φορά προς τα πάνω πρέπει η φορά των δυναμικών γραμμών του μαγνητικού πεδίου $\vec{B}_1$ να είναι από τη σελίδα προς τον αναγνώστη. Ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow F_L = w \Rightarrow B_1 I_{\text{επ}} l = mg \Rightarrow$$

$$B_1 = \frac{mg}{I_{\text{επ}} l} \Rightarrow B_1 = 2 \text{ T}$$

Α3. Όταν η ένταση B_2 του ομογενούς μαγνητικού πεδίου, που υπάρχει στον χώρο του κυκλικού αγωγού, μηδενίζεται, ο αγωγός αρχίζει να κινείται προς τα κάτω επιταχυνόμενος λόγω του βάρους του.

Λόγω της κίνησης του αγωγού ΚΛ, αφού αυτός βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο κάθετα στις δυναμικές του γραμμές, στα άκρα του αναπτύσσεται ηλεκτρεγερτική δύναμη από επαγωγή.

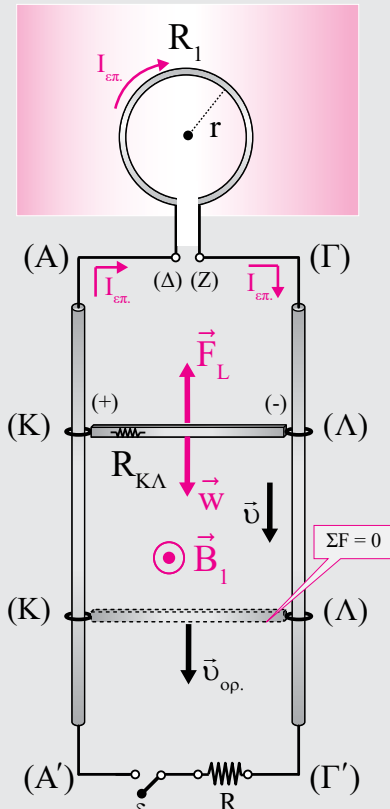
$$E_{\text{επ.}} = B_1 v l \quad (1)$$

και πολικότητας που φαίνεται στο σχήμα.

Η τάση αυτή θα έχει ως αποτέλεσμα το κύκλωμα να διαρρέεται από ρεύμα (επαγωγικό):

$$I_{\text{επ.}} = \frac{E_{\text{επ.}}}{R_{\text{ολ.}}} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} I_{\text{επ.}} = \frac{B_1 v l}{R_1 + R_{\text{ΚΛ}}} \quad (2)$$

και φοράς που φαίνεται στο σχήμα.



Επειδή ο αγωγός διαρρέεται από ρεύμα και βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο θα του ασκηθεί δύναμη Laplace μέτρον:

$$F_L = B_1 I_{\text{επ.}} l \Rightarrow F_L = \frac{B_1^2 l^2}{R_1 + R_{\text{ΚΛ}}} v \quad (3)$$

και φοράς που φαίνεται στο σχήμα.

Ο αγωγός επιταχύνεται άρα:

$$v \uparrow \Rightarrow E_{\text{επ.}} \uparrow \Rightarrow I_{\text{επ.}} \uparrow \Rightarrow F_L \uparrow \Rightarrow \Sigma F \downarrow \Rightarrow a \downarrow$$

Η κίνηση που θα εκτελέσει ο αγωγός είναι ευθύγραμμη μη ομαλά επιταχυνόμενη με συνεχώς μειούμενη επιτάχυνση.

Κάποια στιγμή η επιτάχυνση θα γίνει μηδέν, όταν και η συνισταμένη δύναμη γίνει μηδέν, οπότε από εκεί και μετά ο αγωγός θα εκτελέσει Ευθύγραμμη Ομαλή Κίνηση με σταθερή (οριακή) ταχύτητα.

Υπολογισμός οριακής ταχύτητας:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_L = mg \Rightarrow \frac{B_1^2 l^2}{R_1 + R_{\text{ΚΛ}}} v_1 = mg \Rightarrow$$

$$v_1 = \frac{mg(R_1 + R_{\text{ΚΛ}})}{B_1^2 l^2} \Rightarrow v_1 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Δ4. Όταν κλείνουμε τον διακόπτη δ η ολική αντίσταση του κυκλώματος μικραίνει.

$$R'_{\text{ολ.}} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} + R_{\text{ΚΛ}} = 3\Omega < R_{\text{ολ.}} = 4\Omega$$

Από τη σχέση $I_{\text{επ.}} = \frac{B_1 v l}{R'_{\text{ολ.}}}$ προκύπτει ότι το

ρεύμα μεγαλώνει αφού μικραίνει η αντίσταση του κυκλώματος άρα και η δύναμη Laplace. Έτσι ο αγωγός εκτελεί ευθύγραμμη μη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση με συνεχώς μειούμενη επιτάχυνση. Κάποια στιγμή, πάλι η συνισταμένη των δυνάμεων θα είναι μηδέν, οπότε ο αγωγός ΚΛ θα αποκτήσει νέα οριακή ταχύτητα.

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F'_L = mg \Rightarrow$$

$$\frac{B_1^2 l^2}{R'_{\text{ολ.}}} v_2 = mg \Rightarrow v_2 = \frac{mg R'_{\text{ολ.}}}{B_1^2 l^2} \Rightarrow$$

$$v_2 = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Η τάση στα άκρα του αγωγού ΚΛ είναι:

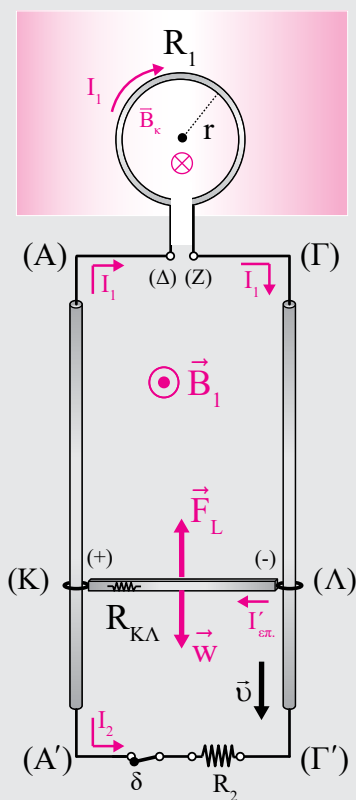
$$\begin{aligned} V_{\text{ΚΛ}} &= E_{\text{επ.}} - I_{\text{επ.}} R_{\text{ΚΛ}} = \\ &= B_1 v_2 l - \frac{B_1 v_2 l}{R'_{\text{ολ.}}} R_{\text{ΚΛ}} \Rightarrow V_{\text{ΚΛ}} = 4V \end{aligned}$$

$$I_1 = \frac{V_{\text{KL}}}{R_1} = \frac{4}{3} \text{ A}$$

Η ένταση του μαγνητικού πεδίου στο κέντρο του κυκλικού αγωγού, όταν ο αγωγός ΚΛ κινείται με τη νέα σταθερή του ταχύτητα $\vec{v}_2$, είναι:

$$B_K = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2\pi I_1}{r} \cdot N \Rightarrow$$

$$B_K = \frac{32}{3} \cdot 10^{-5} \text{ T}$$



Δ5. Έχουμε:

$$P_2 = P_{2(\text{τελ.})} + 21\%P_{2(\text{τελ.})} \Rightarrow$$

$$P_2 = 121\%P_{2(\text{τελ.})} = 1,21P_{2(\text{τελ.})} \Rightarrow$$

$$I_2'^2 R_2 = 1,21 \cdot I_2^2 R_2 \Rightarrow$$

$$I_2' = 1,1 \cdot I_2 \Rightarrow \frac{V'_{\text{KL}}}{R_2} = 1,1 \cdot \frac{V_{\text{KL}}}{R_2} \Rightarrow$$

$$V'_{\text{KL}} = 1,1 \cdot V_{\text{KL}} = 4,4 \text{ V}$$

Όμως

$$V'_{\text{KL}} = E'_{\text{επ.}} - I'_{\text{επ.}} R_{\text{KL}} = B_1 v l - \frac{B_1 v l}{R'_{\text{ολ.}}} R_{\text{KL}} \Rightarrow$$

$$4,4 = 2v - \frac{2v}{3} \Rightarrow 4,4 = \frac{4v}{3} \Rightarrow v = 3,3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Για τον ρυθμό μεταβολής της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας του αγωγού έχουμε:

$$\frac{\Delta U_{\text{βαρ.}}}{\Delta t} = \frac{-\Delta W_{\text{w}}}{\Delta t} = \frac{-mg \cdot \Delta y}{\Delta t} = -mgv \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta U_{\text{βαρ.}}}{\Delta t} = -13,2 \frac{\text{J}}{\text{s}}$$

15ο Διαγώνισμα (Δ15)

ΘΕΜΑ Α

A1. β), A2. δ), A3. β), A4. γ)

A5. α) Λ, β) Σ, γ) Λ, δ) Σ, ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

B1. Σωστή απάντηση είναι η **γ**).

Δικαιολόγηση

Κατά τη διάρκεια της περιστροφής του συστήματος της αβαρούς ράβδου και των δύο μεταλλικών δακτυλίων, ασκούνται τα βάρη και οι τάσεις στα δύο άκρα του νήματος που συγκρατούν τους δύο δακτυλίους. Οι δυνάμεις αυτές δεν προκαλούν ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής του συστήματος που είναι το μέσο της ράβδου. Έτσι, η στροφορμή όλου του συστήματος παραμένει σταθερή και πριν αλλά και μετά που θα κόψουμε το νήμα και οι δύο δακτύλιοι σταματήσουν τελικά στα άκρα της ράβδου.

$$\vec{L}_{\text{πριν}} = \vec{L}_{\text{μετά}} \Rightarrow 2m_1 v \frac{L}{4} = 2m_1 v' \frac{L}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{v}{2} = v' \Rightarrow \frac{\omega \frac{L}{4}}{2} = \omega' \frac{L}{2} \Rightarrow \omega = 4\omega' \Rightarrow$$

$$2\pi f = 4 \cdot 2\pi f' \Rightarrow f = 4f'$$

Η ποσοστιαία επί τοις εκατό μεταβολή της συχνότητας περιστροφής του συστήματος μετά τη μετακίνηση των δακτυλίων είναι:

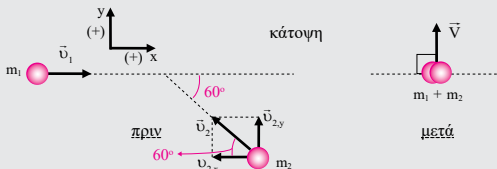
$$\Pi\% = \frac{f' - f}{f} \cdot 100\% = \frac{f' - 4f'}{4f'} \cdot 100\% \Rightarrow$$

$$\Pi\% = -75\%$$

B2. Σωστή απάντηση είναι η γ).

Δικαιολόγηση

Αναλύουμε την ταχύτητα του σώματος m_2 σε δύο κάθετες συνιστώσες, όπως φαίνεται στο σχήμα, και στη συνέχεια εφαρμόζουμε Αρχή Διατήρησης της Ορμής σε κάθε άξονα χωριστά.



Α.Δ.Ο. άξονας x:

$$\vec{p}_{\text{ολ.}(πριν),x} = \vec{p}_{\text{ολ.}(μετά),x} \Rightarrow$$

$$m_1 v_1 - m_2 v_{2,x} = 0 \Rightarrow$$

$$m_1 v_1 = m_2 v_2 \cdot \sin 60^\circ \quad m_2 = 2m_1 \Rightarrow$$

$$m_1 v_1 = 2m_1 v_2 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow v_1 = v_2 \quad (1)$$

Α.Δ.Ο. άξονας y:

$$\vec{p}_{\text{ολ.}(πριν),y} = \vec{p}_{\text{ολ.}(μετά),y} \Rightarrow$$

$$m_2 v_{2,y} = (m_1 + m_2) V \quad m_2 = 2m_1 \Rightarrow$$

$$2m_1 v_2 \cdot \sin 60^\circ = (m_1 + 2m_1) V \Rightarrow$$

$$2m_1 v_2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3m_1 V \Rightarrow V = v_2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (2)$$

Το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας των δύο σωμάτων που έγινε θερμότητα είναι:

$$\Pi\% = \frac{Q}{K_{\text{ολ.}(πριν)}} \cdot 100\% = \frac{K_{\text{ολ.}(πριν)} - K_{\text{ολ.}(μετά)}}{K_{\text{ολ.}(πριν)}} \cdot 100\% =$$

$$= \frac{\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2} \cdot 100\% \quad m_2 = 2m_1$$

$$= \frac{m_1 v_1^2 + 2m_1 v_2^2 - (m_1 + 2m_1) V^2}{m_1 v_1^2 + 2m_1 v_2^2} \cdot 100\% =$$

$$= \frac{v_1^2 + 2v_2^2 - 3V^2}{v_1^2 + 2v_2^2} \cdot 100\% \quad \stackrel{(1),(2)}{=} =$$

$$= \frac{v_1^2 + 2v_2^2 - 3 \left(v_2 \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2}{v_1^2 + 2v_2^2} \cdot 100\% \Rightarrow$$

$$\Pi\% = \frac{200}{3} \%$$

B3. Σωστή απάντηση είναι η α).

Δικαιολόγηση

Ισχύει:

$$P = \frac{E_{\text{ολ}}}{t} \Rightarrow P = \frac{N h f}{t} \Rightarrow \frac{N}{t} = \frac{P}{h f} \quad (1)$$

Επίσης έχουμε:

$$I = \frac{q}{t} \Rightarrow I = \frac{N |q_e|}{t} \Rightarrow I = \frac{P |q_e|}{h f}$$

Ισχύει:

$$P' = 2P$$

Τελικά προκύπτει:

$$I' = \frac{P' |q_e|}{h f} \Rightarrow I' = \frac{2P |q_e|}{h f} \Rightarrow I' = 2I$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Από διάγραμμα έχουμε:

$$\frac{3T}{2} = 0,3 \Rightarrow T = 0,2\text{s}$$

Ισχύει:

$$v_\delta = \frac{x_K}{t_K} \Rightarrow v_\delta = 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Έχουμε:

$$\lambda = v_\delta T \Rightarrow \lambda = 0,1\text{m}$$

Η εξίσωση του κύματος είναι η:

$$y = A \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \Rightarrow$$

$$y = 0,5 \eta \mu 2\pi (5t - 10x) (\text{S.I.})$$

Γ2. Ισχύει:

$$t_\Sigma = \frac{x_\Sigma}{v_\delta} \Rightarrow t_\Sigma = 4\text{s}$$

Υπολογίζουμε τη χρονική στιγμή t_1 :

$$t_1 = t_\Sigma + \frac{3T}{4} \Rightarrow t_1 = 4,15\text{s}$$

Ισχύει:

$$\varphi_1 = 2\pi \frac{t_1}{T} - 2\pi \frac{x}{\lambda} \Rightarrow \varphi_1 = 41,5\pi - 20\pi x (\text{S.I.}) (1)$$

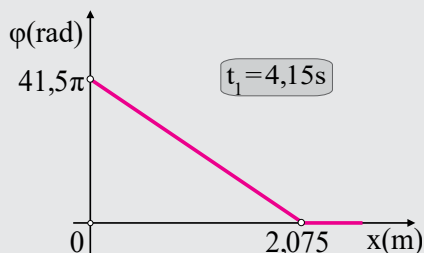
Θέτοντας στη σχέση (1), όπου $x = 0$, προκύπτει:

$$\varphi_1 = 41,5\pi \text{rad}$$

Θέτοντας στη σχέση (1) όπου $\varphi_1 = 0$, προκύπτει:

$$0 = 41,5\pi - 20\pi x \Rightarrow x = 2,075\text{m}$$

Το ζητούμενο διάγραμμα είναι το εξής:



Γ3. Ισχύει:

$$t_2 = t_\Sigma + \frac{9T}{4} \Rightarrow t_2 = 4,45\text{s}$$

Προκύπτει:

$$N = \frac{\Delta t}{T} \Rightarrow N = \frac{t_2 - t_K}{T} \Rightarrow N = \frac{t_2 - \frac{x_K}{v_\delta}}{T} \Rightarrow$$

$$N = 12,25 \text{ ταλ.}$$

Οι ολοκληρωμένες ταλαντώσεις θα είναι **12**.

Γ4. Ισχύει:

$$\Delta\varphi_{K\Sigma} = \varphi_K - \varphi_\Sigma \Rightarrow 2\pi \frac{\Delta x}{\lambda} = \varphi_K - \varphi_\Sigma \Rightarrow$$

$$\varphi_K - \varphi_\Sigma = \left[2\pi \frac{(2-1)}{0,1} \right] \Rightarrow$$

$$\varphi_K - \varphi_\Sigma = 20\pi \text{ rad}$$

Προκύπτει:

$$\varphi_K = \varphi_\Sigma + 20\pi \text{ rad} (2)$$

Για τη φάση του σημείου Σ έχουμε $v_\Sigma = 0$ και $a_\Sigma > 0$ επομένως $y_\Sigma = -A$. Προκύπτει:

$$y_\Sigma = A \cdot \eta \mu \varphi_\Sigma \Rightarrow -A = A \cdot \eta \mu \varphi_\Sigma \Rightarrow$$

$$\varphi_K = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{2} (3)$$

Από τις σχέσεις (2) και (3) προκύπτει:

$$\varphi_K = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{2} + 20\pi$$

Για την ταχύτητα του σημείου Κ τελικά προκύπτει:

$$v_K = \omega A \cdot \sigma \nu \varphi_K \Rightarrow$$

$$v_K = \omega A \cdot \sigma \nu \left(2\kappa\pi + \frac{3\pi}{2} + 20\pi \right) \Rightarrow$$

$$v_K = 0$$

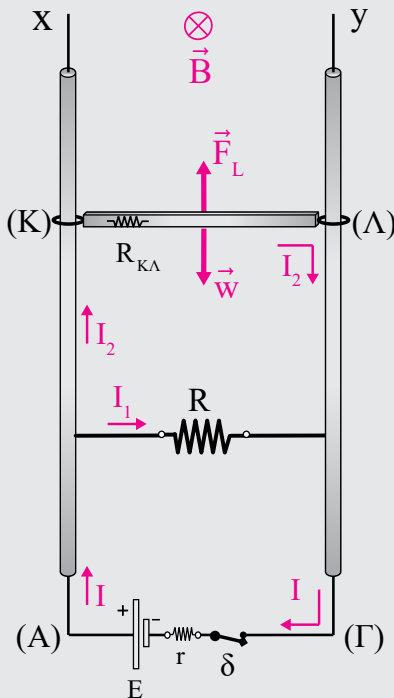
ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Ο αγωγός ισορροπεί με την επίδραση του βάρους και της δύναμης Laplace, επομένως:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_L = -m\vec{g} \Rightarrow F_L = mg (1) \text{ (κατά μέ-}$$

τρο).

Για να προκύπτει η $\vec{F}_L$ με φορά προς τα πάνω με το ρεύμα στον αγωγό ΚΛ να έχει φορά από το (Κ) προς το (Λ) πρέπει οι μαγνητικές γραμμές να έχουν φορά από τον αναγνώστη προς τη σελίδα.



Η ισοδύναμη αντίσταση του κυκλώματος είναι:

$$R_{\text{ολ.}} = \frac{R_{\text{ΚΛ}} \cdot R}{R_{\text{ΚΛ}} + R} + r \Rightarrow R_{\text{ολ.}} = 2\Omega$$

Από τον νόμο του Ohm για κλειστό κύκλωμα ισχύει:

$$I = \frac{E}{R_{\text{ολ.}}} \Rightarrow I = 4\text{A}$$

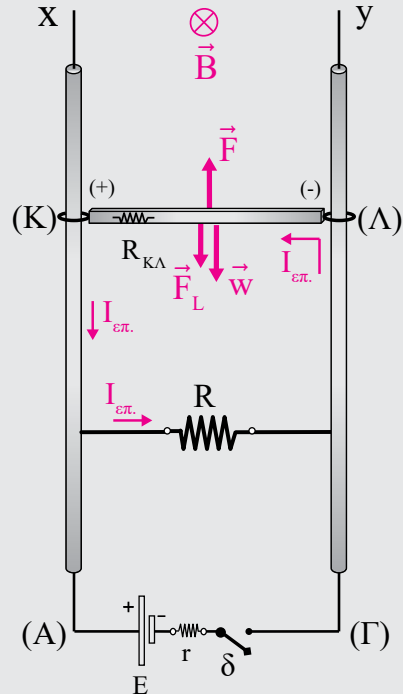
$$\text{Ισχύει } V_{\text{ΚΛ}} = V_{\pi} = E - Ir \Rightarrow V_{\text{ΚΛ}} = 4\text{V}$$

$$I_2 = \frac{V_{\text{ΚΛ}}}{R_{\text{ΚΛ}}} \Rightarrow I_2 = 2\text{A}$$

Από τη σχέση (1) έχουμε:

$$BI_2 l = mg \Rightarrow B = \frac{mg}{I_2 l} \Rightarrow \mathbf{B = 1\text{T}}$$

Δ2. Καθώς ο αγωγός κινείται προς τα πάνω έχουμε μεταβολή της μαγνητικής ροής, άρα εμφανίζεται Η.Ε.Δ. από επαγωγή στα άκρα του αγωγού και επαγωγικό ρεύμα, με αποτέλεσμα να ασκείται στον αγωγό δύναμη Laplace εκτός από το βάρος και τη δύναμη $\vec{F}$.



Από τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής έχουμε:

$$\Sigma F = m\alpha \Rightarrow F - F_L - mg = m\alpha \Rightarrow$$

$$F = F_L + mg + m\alpha \Rightarrow$$

$$F = BI_{\text{επ.}} l + mg + m\alpha \Rightarrow$$

$$F = B \frac{E_{\text{επ.}}}{R'_{\text{ολ.}}} l + mg + m\alpha(2)$$

Όμως: $E_{\text{επ.}} = Bvl$ και $R'_{\text{ολ.}} = R + R_{\text{ΚΛ}}$

Από τη σχέση (2) έχουμε:

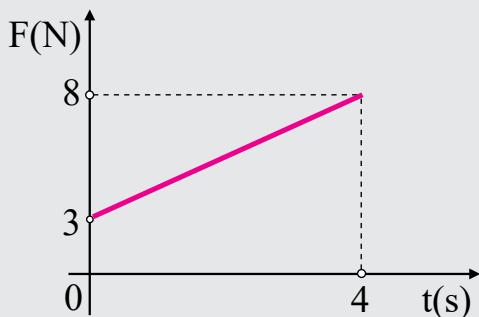
$$F = \frac{B^2 v l^2}{R'_{\text{ολ.}}} + mg + m\alpha$$

και ισχύει $v = \alpha t$ οπότε:

$$F = \frac{B^2 \alpha t l^2}{R'_{\text{ολ.}}} + mg + m\alpha \Rightarrow$$

$$F = 1,25t + 3 \text{ (S.I.)}$$

Η γραφική παράσταση $F = f(t)$ παριστάνεται στο ακόλουθο διάγραμμα.



Δ3. Το επαγωγικό φορτίο που μετακινήθηκε από $t = 0$ έως $t = 4\text{s}$ είναι

$$q_{\text{επ}} = \frac{\Delta\Phi}{R'_{\text{ολ.}}} \Rightarrow q_{\text{επ}} = \frac{B \cdot \Delta A}{R'_{\text{ολ.}}} \Rightarrow$$

$$q_{\text{επ}} = \frac{B l \Delta x}{R'_{\text{ολ.}}} \Rightarrow q_{\text{επ}} = \frac{B l \cdot \frac{1}{2} \alpha t^2}{R'_{\text{ολ.}}} \Rightarrow$$

$$q_{\text{επ}} = 10\text{C}$$

Δ4. Τη χρονική στιγμή t_1 η δύναμη $\vec{F}$ σταθεροποιείται στην τιμή $F = 8\text{N}$.

$$\text{Ισχύει } \Sigma F = F - \frac{B^2 l^2 v}{R'_{\text{ολ.}}} - mg$$

επομένως το ρεύμα της ΣF ελαττώνεται καθώς αυξάνεται η ταχύτητα του αγωγού. Τη

χρονική στιγμή t_2 είναι $\frac{dK}{dt} = 0$

$$\text{Όμως } \frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt} = \Sigma \vec{F} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} = \Sigma \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Επειδή $v \neq 0$ είναι $\Sigma F = 0$.

$$\text{Άρα } \frac{B^2 l^2 v_2}{R + R_{\text{ΚΛ}}} = F - mg \Rightarrow v_2 = 24 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{Δ5. } v_3 = \frac{7v_0}{8} = 21 \text{ m/s}$$

$$\frac{\Delta E_{\text{προσφ.}}}{\Delta t} = \frac{\Delta W_F}{\Delta t} = P_F = F \cdot v_3 \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta E_{\text{προσφ.}}}{\Delta t} = 168 \frac{\text{J}}{\text{s}}$$

$$\frac{\Delta Q_R}{\Delta t} = P_R = I_{\text{επ.}}^2 R \Rightarrow \frac{\Delta Q_R}{\Delta t} = 55,125 \frac{\text{J}}{\text{s}}$$

$$\frac{\Delta K}{\Delta t} = \frac{W_{\Sigma F}}{\Delta t} = \Sigma F \cdot v_3 =$$

$$= (F - F_L - mg) \cdot v_3 =$$

$$= \left(F - \frac{B^2 l^2 v_0}{R + R_{\text{ΑΓ}}} - mg \right) \cdot v_3 \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta K}{\Delta t} = 15,75 \frac{\text{J}}{\text{s}}$$

16ο Διαγώνισμα (Δ16)

ΘΕΜΑ Α

Α1. δ), Α2. β), Α3. δ), Α4. γ)

Α5. α) Σ, β) Λ, γ) Σ, δ) Λ, ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Σωστή απάντηση είναι η **α).**

Δικαιολόγηση

Ισχύει:

$$P = \frac{N h f}{t} \Rightarrow P = \frac{N h c}{\lambda t} \quad (1)$$

Το μήκος κύματος μειώνεται, άρα από τη σχέση (1) προκύπτει ότι η ισχύς αυξάνεται κατά 40% αρά και η συχνότητα αυξάνεται κατά 40%.

Αρχικά ισχύει:

$$K = hf - \phi(1)$$

Τελικά ισχύει:

$$1,8K = 1,4hf - \varphi(1)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) έχουμε:

$$\varphi = K$$

B2. Α. Σωστή απάντηση είναι η γ).

Δικαιολόγηση

$$E_{10} = E_0 - 75\%E_0 \Rightarrow E_0 = 25\%E_0 = \frac{E_0}{4} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}DA_{10}^2 = \frac{1}{2}DA_0^2 \Rightarrow$$

$$A_{10}^2 = \frac{A_0^2}{4} \Rightarrow A_{10} = \frac{A_0}{2}$$

B. Σωστή απάντηση είναι η α).

Δικαιολόγηση

$$A_{10} = A_0 \cdot e^{-(\ln 2) \cdot 10T} \Rightarrow \frac{A_0}{2} = A_0 \cdot e^{-(\ln 2) \cdot 10T} \Rightarrow$$

$$e^{-(\ln 2) \cdot 10T} = \frac{1}{2} \Rightarrow -(\ln 2) \cdot 10T = -(\ln 2) \Rightarrow$$

$$T = 0,1s$$

B3. Σωστή απάντηση είναι η γ).

Δικαιολόγηση

Η φάση του σημείου (Κ) σε συνάρτηση με τον χρόνο είναι:

$$\varphi_{(K)} = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_{(K)}}{\lambda} \right) = \frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x_{(K)}}{\lambda} \Rightarrow$$

$$\varphi_{(K)} = \frac{2\pi t}{T} - \frac{4\pi}{\lambda}(1)$$

Από το διάγραμμα προκύπτει:

$$(1) \Rightarrow \begin{matrix} t=0, \varphi_{(K)} = -10\pi \text{ rad} \\ -10\pi = -\frac{4\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = 0,4m \end{matrix}$$

$$(1) \Rightarrow \begin{matrix} t=1s, \varphi_{(K)} = 0 \\ 0 = \frac{2\pi \cdot 1}{T} - \frac{4\pi}{0,4} \Rightarrow T = 0,2s \end{matrix}$$

Το σημείο (Λ) βρίσκεται δεξιότερα κατά 0,7m από το (Κ) δηλαδή κατά απόσταση

$$\lambda + \frac{3\lambda}{4} = \frac{7\lambda}{4}.$$

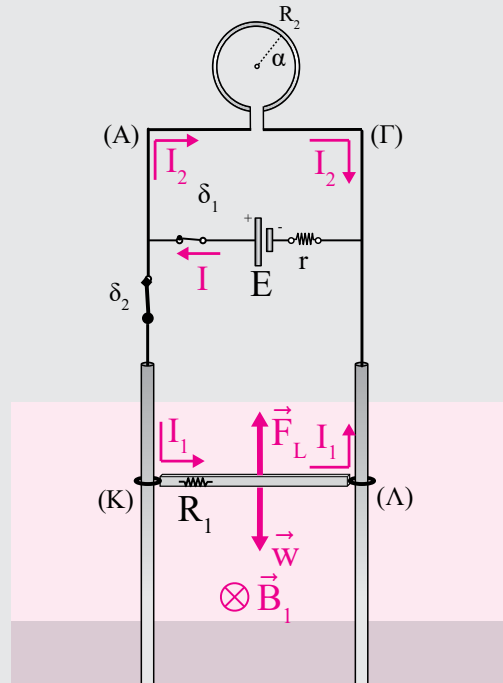
Άρα το χρονικό διάστημα που χρειάζεται το κύμα για να πάει από το (Κ) στο (Λ) είναι

$$T + \frac{3T}{4} = \frac{7T}{4}, \text{ οπότε το (Κ) θα έχει διανύσει}$$

$$\text{απόσταση } 4\lambda + 3\lambda = 7\lambda = 1,4m$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.



ι) Όταν κλείσουν οι διακόπτες ο αγωγός διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα σταθερής έντασης I_1 . Ο αγωγός διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα και βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο, οπότε ασκείται σε αυτόν δύναμη Laplace την κατεύθυνση της οποίας την προσδιορίζουμε με τον κανόνα των τριών δακτύλων του δεξιού χεριού, όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.

Ο αγωγός ισορροπεί άρα:

$$\Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F}_L + \vec{w} = 0 \Rightarrow F_L - w = 0 \Rightarrow$$

$$F_L = w \Rightarrow B_1 \ell = mg \Rightarrow I_1 = 1A$$

Οι αντιστάσεις R_1 και R_2 είναι παράλληλα συνδεδεμένες οπότε ισχύει:

$$V_1 = V_2 \Rightarrow I_1 R_1 = I_2 R_2 \Rightarrow I_2 = 1A.$$

Από τον 1^ο κανόνα Kirchhoff έχουμε:

$$I = I_1 + I_2 \Rightarrow I = 2A$$

Σύμφωνα με τον νόμο του Ohm για κλειστό κύκλωμα ισχύει:

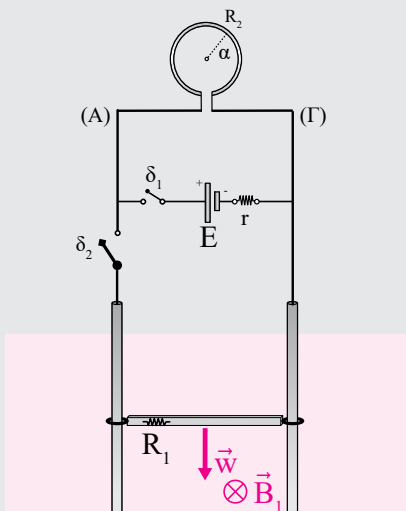
$$I = \frac{E}{R_{ολ}} \Rightarrow E = I \cdot \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + r \right) \Rightarrow E = 6V$$

ii) Η ένταση του μαγνητικού πεδίου στο κέντρο του κυκλικού αγωγού είναι:

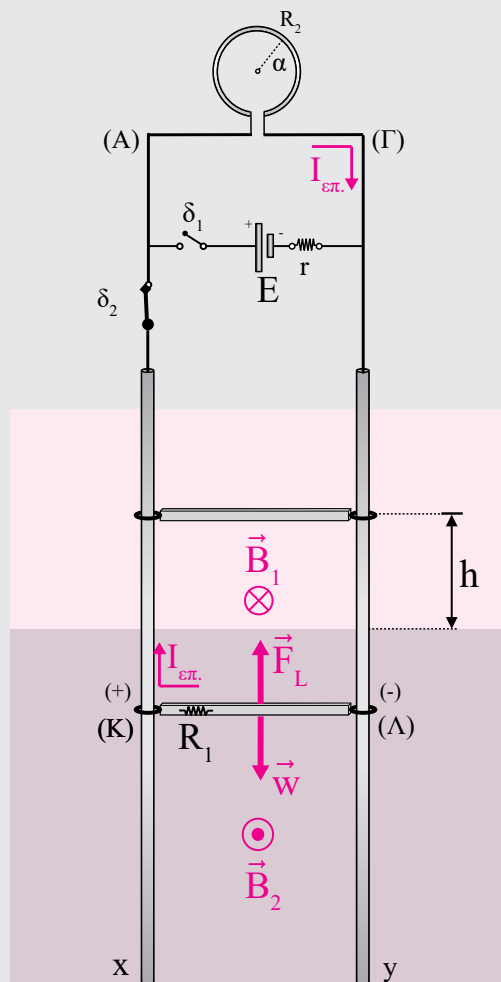
$$B = \frac{\mu_0 \cdot 2\pi I_2}{4\pi \alpha} \Rightarrow B = 10^{-5} T$$

Γ2. i) Τη στιγμή που ανοίγουν και οι δύο διακόπτες ο αγωγός αρχίζει να κινείται μόνο με την επίδραση του βάρους του και πραγματοποιεί ελεύθερη πτώση μέχρι την στιγμή που εισέρχεται μέσα στο μαγνητικό πεδίο έντασης $\vec{B}_2$. Η ταχύτητά του την στιγμή που εισέρχεται στο μαγνητικό πεδίο ισούται με:

$$v = g\Delta t \Rightarrow v = 2 \frac{m}{s}$$



ii) Τη χρονική στιγμή που κλείνει ο διακόπτης δ_2 εξαιτίας της κίνησης του αγωγού ΚΛ στο μαγνητικό πεδίο έντασης $\vec{B}_2$ αναπτύσσεται ηλεκτρεγερτική δύναμη από επαγωγή $E_{επ} = Bv\ell$, το κύκλωμα διαρρέεται από επαγωγικό ρεύμα $I_{επ}$ και στον αγωγό ασκείται δύναμη Laplace η οποία, από τον κανόνα του Lenz, αντιτίθεται στην κίνηση του.



Η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στον αγωγό ΚΛ τη χρονική στιγμή που εισέρχεται στο μαγνητικό πεδίο έντασης $\vec{B}_2$ ισούται με:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{F}_L + \vec{w} \Rightarrow$$

$$\Sigma F = F_L + w = mg - B_2 I_{\varepsilon\pi} \ell =$$

$$= mg - B_2 \frac{B_2 v \ell}{R_1 + R_2} \ell = 0$$

Άρα ο αγωγός εκτελεί **ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με ταχύτητα $v = 2 \frac{m}{s}$** .

Γ3. Η τάση του αγωγού ΚΛ ισούται με:

$$V_{KL} = I_{\varepsilon\pi} R_2 \Rightarrow V_{KL} = \frac{E_{\varepsilon\pi}}{R_1 + R_2} R_2 \Rightarrow$$

$$V_{KL} = \frac{B_2 v \ell}{R_1 + R_2} R_2 \Rightarrow$$

$$V_{KL} = 2V$$

Η θερμική ισχύ που καταναλώνει ο αγωγός κατά την κίνησή του στο μαγνητικό πεδίο έντασης $\vec{B}_2$ ισούται με:

$$P_{\theta} = I_{\varepsilon\pi}^2 R_1 \Rightarrow P_{\theta} = \left(\frac{B_2 v \ell}{R_1 + R_2} \right)^2 R_1 \Rightarrow P_{\theta} = 1W$$

Γ4. Για το επαγωγικό φορτίο που διέρχεται από τη διατομή του αγωγού ΚΛ ισχύει:

$$q_{\varepsilon\pi} = I_{\varepsilon\pi} \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{q_{\varepsilon\pi}}{I_{\varepsilon\pi}} \Rightarrow$$

$$\Delta t = \frac{q_{\varepsilon\pi}}{\frac{B_2 v \ell}{R_1 + R_2}} \Rightarrow \Delta t = 2s$$

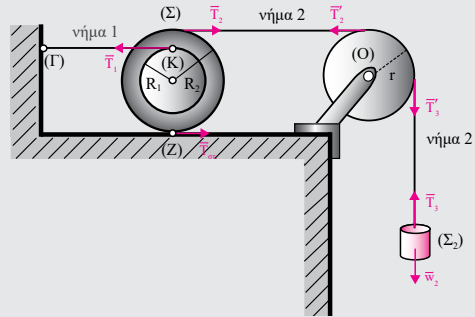
Η θερμότητα που εκλύεται λόγω φαινομένου joule στο κυκλικό συμμάτινο πλαίσιο είναι:

$$Q = I_{\varepsilon\pi}^2 R_2 \Delta t \Rightarrow$$

$$Q = \left(\frac{B_2 v \ell}{R_1 + R_2} \right)^2 R_2 \Delta t \Rightarrow Q = 2J$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.



Στο παραπάνω σχήμα φαίνονται οι δυνάμεις που δέχεται το στερεό, η τροχαλία και το σώμα (Σ_2).

Αφού το σώμα ισορροπεί, πρέπει:

$$\Sigma F_2 = 0 \Rightarrow T_3 = m_2 g \Rightarrow T_3 = 30N$$

Επειδή το νήμα είναι αβαρές έχουμε:

$$T'_3 = T_3 = 30N$$

Η τροχαλία ισορροπεί οπότε θα πρέπει η συνισταμένη των ροπών ως προς το κέντρο της (Ο) να κάνει μηδέν. Έχουμε:

$$\Sigma \tau_{(O)} = 0 \Rightarrow T'_2 \cdot r = T'_3 \cdot r \Rightarrow$$

$$T'_2 = T'_3 \Rightarrow T'_2 = 30N$$

Επειδή το νήμα είναι αβαρές έχουμε:

$$T_2 = T'_2 = 30N$$

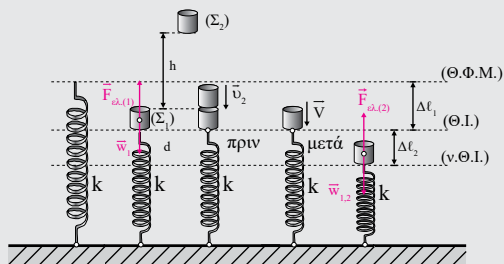
Το στερεό ισορροπεί οπότε η συνισταμένη των ροπών ως προς οποιοδήποτε σημείο του είναι μηδέν, άρα και ως προς το σημείο (Ζ).

Έχουμε:

$$\Sigma \tau_{(Z)} = 0 \Rightarrow T_1 \cdot (R_1 + R_2) = T_2 \cdot 2R_2 \Rightarrow$$

$$T_1 \cdot 3R_1 = T_2 \cdot 4R_1 \Rightarrow 3T_1 = 4T_2 \Rightarrow T_1 = 40N$$

Δ2.



Για την κίνηση του σώματος (Σ_2) από τη στιγμή που κόβουμε το νήμα και μέχρι την πλαστική του κρούση με το σώμα (Σ_1), εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας.

$$\Delta K = \Sigma W_F \Rightarrow K_{\text{τελ.}} - K_{\text{αρχ.}} = W_{w_2} \Rightarrow \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - 0 = m_2 g h \Rightarrow$$

$$v_2 = \sqrt{2gh} \Rightarrow v_2 = \frac{4\sqrt{10}}{3} \text{ m/s}$$

Τα σώματα Σ_2 και Σ_1 συγκρούονται κεντρικά και πλαστικά. Σύμφωνα με την Αρχή Διατήρησης της Ορμής ισχύει:

$$\vec{p}_{\text{ολ. πριν}} = \vec{p}_{\text{ολ. μετά}} \Rightarrow \vec{p}_2 + \vec{p}_1 = \vec{p}_{\text{συσ.}} \Rightarrow m_2 v_2 = (m_2 + m_1) V \Rightarrow V = \sqrt{10} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Δ3. Στην κατάσταση ισορροπίας του σώματος (Σ_1), έχουμε:

$$(\Theta.Ι.): \Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{\text{ελ.}(1)} + \vec{w}_1 = 0 \Rightarrow F_{\text{ελ.}(1)} - w_1 = 0 \Rightarrow F_{\text{ελ.}(1)} = w_1 \Rightarrow$$

$$k \Delta l_1 = m_1 g (1 \Rightarrow \Delta l_1 = \frac{m_1 g}{k} \Rightarrow \Delta l_1 = 0,1 \text{ m})$$

Για τη νέα θέση ισορροπίας του συστήματος των σωμάτων (Σ_1) και (Σ_2) ισχύει:

$$(ν.Θ.Ι.): \Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{\text{ελ.}(2)} + \vec{w}_{1,2} = 0 \Rightarrow F_{\text{ελ.}(2)} - w_{1,2} = 0 \Rightarrow F_{\text{ελ.}(2)} = w_{1,2} \Rightarrow$$

$$k \cdot (\Delta l_1 + \Delta l_2) = (m_1 + m_2) g \Rightarrow$$

$$k \Delta l_1 + k \Delta l_2 = m_1 g + m_2 g \stackrel{(1)}{\Rightarrow} k \Delta l_2 = m_2 g \Rightarrow$$

$$\Delta l_2 = \frac{m_2 g}{k} \Rightarrow \Delta l_2 = 0,3 \text{ m}$$

Εφαρμόζουμε τη διατήρηση ενέργειας της ταλάντωσης (Α.Δ.Ε.Τ.) για τη θέση που γίνεται η κρούση η οποία απέχει από τη νέα θέση ισορροπίας του συστήματος των σωμάτων (Σ_1) και (Σ_2) απόσταση $\Delta l_2 = 0,3 \text{ m}$.

$$E = K + U \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V^2 + \frac{1}{2} k \Delta l_2^2 \Rightarrow$$

$$A = \sqrt{\frac{(m_1 + m_2) V^2 + k \Delta l_2^2}{k}} \Rightarrow A = 0,7 \text{ m}$$

Δ4. Το συσσωμάτωμα θα ακινητοποιηθεί για πρώτη φορά μετά την κρούση στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσης του. Στη θέση αυτή η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου θα είναι:

$$U_{\text{ελ.}} = \frac{1}{2} k (A + \Delta l_1 + \Delta l_2)^2 \Rightarrow U_{\text{ελ.}} = 60,5 \text{ J}$$

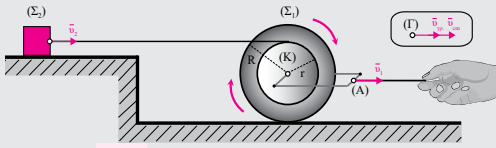
17ο Διαγώνισμα (Δ17)

ΘΕΜΑ Α

A1. γ), A2. β), A3. α), A4. γ)
A5. α) Σ, β) Λ, γ) Σ, δ) Σ, ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

B1. Σωστή απάντηση είναι η **β)**.
Δικαιολόγηση



Έστω v_1 και v_2 τα μέτρα των ταχυτήτων των δύο σωμάτων (Σ_1) και (Σ_2) σε τυχαία χρονική στιγμή.

Κάθε χρονική στιγμή οι ταχύτητες όλων των σημείων του νήματος που συνδέει τα σώματα (Σ_1) και (Σ_2) είναι ίσες, αφού το νήμα είναι διαρκώς τεντωμένο. Ισχύει:

$$v_B (= v_{\text{νημ.}}) = v_{\Gamma} \Rightarrow v_2 = v_{\Gamma} \quad (1)$$

Το στερεό (Σ_1) εκτελεί σύνθετη κίνηση οπότε όλα του τα σημεία (εκτός από το κέντρο μάζας του) κάθε χρονική στιγμή θα έχουν δύο ταχύτητες, μία εξαιτίας της μεταφορικής και μία εξαιτίας της στροφικής του. Έτσι για την ταχύτητα του σημείου (Γ) του στερεού που καταλήγει το νήμα, έχουμε:

$$v_{\Gamma} = v_{\text{cm}} + v_{\text{γρ.}} \quad (2)$$

Όμως το στερεό (Σ_1) κυλίζει χωρίς να ολισθαίνει, οπότε:

$$v_{\text{cm}} = \omega R \quad \text{και}$$

$$v_{\text{γρ.}} = \omega r \Rightarrow v_{\text{γρ.}} = \omega \frac{R}{2} \Rightarrow v_{\text{γρ.}} = \frac{v_{\text{cm}}}{2}$$

$$(2) \Rightarrow v_{\Gamma} = v_{\text{cm}} + \frac{v_{\text{cm}}}{2} \Rightarrow v_{\Gamma} = \frac{3v_{\text{cm}}}{2}$$

Όμως $v_2 = v_{\Gamma}$ και $v_1 = v_{\text{cm}}$ οπότε τελικά παίρνουμε:

$$v_2 = \frac{3v_1}{2}$$

Κάθε χρονική στιγμή το σώμα (Σ_2) έχει ταχύτητα $v_2 = \frac{3v_1}{2}$ μεγαλύτερη από την ταχύτητα με την οποία κινείται το κέντρο μάζας του στερεού (Σ_1), άρα και για την μετατόπιση

$\Delta x'$ του σώματος (Σ_2) και τη μετατόπιση Δx του στερεού (Σ_1) σε χρονικό διάστημα Δt ισχύει το ίδιο:

$$\Delta x' = \frac{3\Delta x}{2} \Rightarrow \Delta x' = 3\text{m}$$

B2. Σωστή απάντηση είναι η β).

Δικαιολόγηση

Για τη μονοχρωματική ακτινοβολία (Α) εφαρμόζουμε τη φωτοηλεκτρική εξίσωση του Einstein. Έχουμε:

$$K_A = hf_A - \varphi \quad f_A = 2f_0 \quad f_0 = \frac{\varphi}{h} \Rightarrow K_A = 2hf_0 - \varphi \Rightarrow$$

$$K_A = 2h \cdot \frac{\varphi}{h} - \varphi \Rightarrow K_A = \varphi \quad (1)$$

Για τη μονοχρωματική ακτινοβολία (Β) εφαρμόζουμε τη φωτοηλεκτρική εξίσωση του Einstein. Έχουμε:

$$K_B = hf_B - \varphi \quad f_B = 5f_A = 10f_0 \quad f_0 = \frac{\varphi}{h} \Rightarrow K_B = 10hf_0 - \varphi \Rightarrow$$

$$K_B = 10h \cdot \frac{\varphi}{h} - \varphi \Rightarrow K_B = 9\varphi \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει

$$K_B = 9K_A \Rightarrow \frac{1}{2} m_e v_B^2 = 9 \cdot \frac{1}{2} m_e v_A^2 \Rightarrow v_B = 3v_A \quad (3)$$

Για τις ακτίνες R_A και R_B των κυκλικών τροχιών ισχύει:

$$R_A = \frac{m_e v_A}{B|q_e|}$$

και

$$R_B = \frac{m_e v_B}{B|q_e|} \stackrel{(3)}{\Rightarrow} R_B = \frac{m_e 3v_A}{B|q_e|} \Rightarrow R_B = 3R_A$$

B3. Σωστή απάντηση είναι η γ).

Δικαιολόγηση

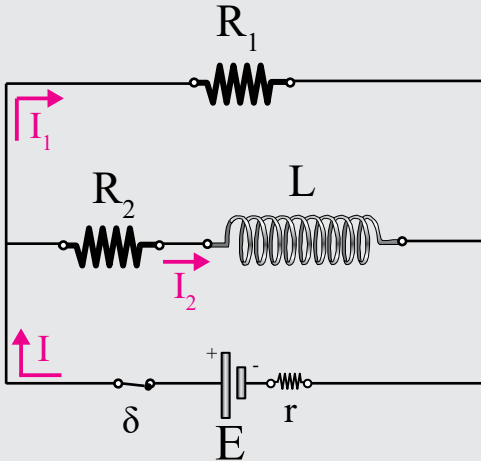
Όταν έχει σταθεροποιηθεί η ένταση του ρεύματος στο κύκλωμα ισχύει:

Η συνολική αντίσταση του κυκλώματος ισού-

ται με:

$$R_{ολ} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + r \Rightarrow R_{ολ} = \frac{6R \cdot 2R}{6R + 2R} + \frac{R}{2} \Rightarrow$$

$$R_{ολ} = 2R$$



Σύμφωνα με τον νόμο του Ohm ισχύει:

$$I = \frac{E}{R_{ολ}} \Rightarrow I = \frac{E}{2R}$$

Η πολική τάση στα άκρα της πηγής ισούται με:

$$V_{\pi} = E - Ir \Rightarrow V_{\pi} = E - \frac{E}{2R} \cdot \frac{R}{2} \Rightarrow V_{\pi} = \frac{3E}{4}$$

Η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος που διαρρέει τον κλάδο που βρίσκεται το πηνίο ισούται με:

$$I_2 = \frac{V_{\pi}}{R_2} \Rightarrow I_2 = \frac{3E}{8R} \quad (1)$$

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ που ανοίγει ο διακόπτης, η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου που είναι αποθηκευμένη στο πηνίο ισούται με:

$$U_0 = \frac{1}{2} LI_2^2$$

Τη χρονική στιγμή t_1 η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου που είναι αποθηκευμένη στο πηνίο είναι ίση με το 25% της τιμής που είχε τη χρονική στιγμή $t = 0$, δηλαδή

$$U_1 = 25\% U_0 \Rightarrow \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} LI_2^2 \Rightarrow$$

$$I = \frac{I_2}{2} \Rightarrow I = \frac{3E}{16R}$$

Όμως για την ένταση του ρεύματος που διαρρέει τον βρόγχο του κυκλώματος που περιέχει το πηνίο και τις αντιστάσεις R_1, R_2 έχουμε:

$$I = \frac{|E_{αυτ.}|}{R_1 + R_2} \Rightarrow I = \frac{|E_{αυτ.}|}{6R + 2R} \Rightarrow$$

$$\frac{3E}{16R} = \frac{|E_{αυτ.}|}{8R} \Rightarrow |E_{αυτ.}| = \frac{3E}{2} \Rightarrow$$

$$L \left| \frac{di}{dt} \right| = \frac{3E}{2} \Rightarrow \left| \frac{di}{dt} \right| = \frac{3E}{2L}$$

Μετά το άνοιγμα του διακόπτη το ρεύμα μειώνεται οπότε τελικά έχουμε $\frac{di}{dt} = -\frac{3E}{2L}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Υπολογίζουμε την περίοδο του κύματος. Προκύπτει:

$$\Delta t = \frac{T}{2} \Rightarrow T = 2 \cdot \Delta t \Rightarrow T = 0,2s$$

Για την ταχύτητα διάδοσης ισχύει:

$$v_{\delta} = \lambda f \Rightarrow v_{\delta} = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow v_{\delta} = 2,5 \frac{m}{s}$$

Για το πλάτος της ταλάντωσης ισχύει:

$$s = 2A \Rightarrow A = \frac{s}{2} \Rightarrow A = 0,4m$$

Γράφουμε την εξίσωση του κύματος:

$$y = A \cdot \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \Rightarrow$$

$$y = 0,4 \cdot \eta \mu 2\pi (5t - 2x) (S.I.)$$

Γ2. Για το σημείο (Κ) ισχύει:

$$\Delta \phi_{OK} = 2\pi \frac{\Delta x}{\lambda} \Rightarrow \Delta \phi_{OK} = 2\pi \frac{x_K - x_0}{\lambda} \Rightarrow$$

$$x_K = \frac{\lambda \cdot \Delta\phi_{OK}}{2\pi} \Rightarrow x_K = 0,5 \text{ m}$$

Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας ταλάντωσης για το σημείο (Κ). Προκύπτει:

$$\begin{aligned} K + U &= E_T \Rightarrow \\ \frac{1}{2} \cdot \Delta m \cdot v_K^2 + \frac{1}{2} \cdot \Delta m \cdot \omega^2 \cdot y_K^2 &= \frac{1}{2} \cdot \Delta m \cdot \omega^2 \cdot A^2 \Rightarrow \\ |v_K| &= \omega \sqrt{A^2 - y_K^2} \Rightarrow |v_K| = \frac{2\pi}{T} \sqrt{A^2 - y_K^2} \Rightarrow \\ |v_K| &= 2\pi\sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

Γ3. Υπολογίζουμε τη θέση του σημείου (Μ). Προκύπτει:

$$\begin{aligned} N &= \frac{\Delta t}{T} \Rightarrow N = \frac{t_1 - t_M}{T} \Rightarrow \\ NT &= t_1 - \frac{x_M}{v_\delta} \Rightarrow x_M = v_\delta (t_1 - NT) \Rightarrow \\ x_M &= 0,75 \text{ m} \end{aligned}$$

Βρίσκουμε τη διαφορά φάσης μεταξύ των σημείων Μ,Κ. Ισχύει:

$$\begin{aligned} \Delta\phi_{KM} &= 2\pi \frac{\Delta x}{\lambda} \Rightarrow \Delta\phi_{KM} = 2\pi \frac{(x_M - x_K)}{\lambda} \Rightarrow \\ \Delta\phi_{KM} &= \pi \text{ rad} \end{aligned}$$

Για τη φάση του σημείου (Κ) έχουμε:

$$\begin{aligned} y_K &= A \eta \mu \phi_K \Rightarrow A = A \eta \mu \phi_K \Rightarrow \\ \eta \mu \phi_K &= 1 \Rightarrow \phi_K = 2\pi + \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Ισχύει:

$$\begin{aligned} \phi_K - \phi_M &= \pi \Rightarrow \phi_M = \phi_K - \pi \Rightarrow \\ \phi_M &= 2\pi + \frac{\pi}{2} - \pi \Rightarrow \phi_M = 2\pi - \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Για την απομάκρυνση του σημείου Μ προκύπτει:

$$\begin{aligned} y_M &= A \eta \mu \phi_M \Rightarrow y_M = A \eta \mu \left(2\pi - \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow \\ y_M &= -A \Rightarrow y_M = -0,4 \text{ m} \end{aligned}$$

Γ4. i) Η εξίσωση του στάσιμου κύματος θα είναι:

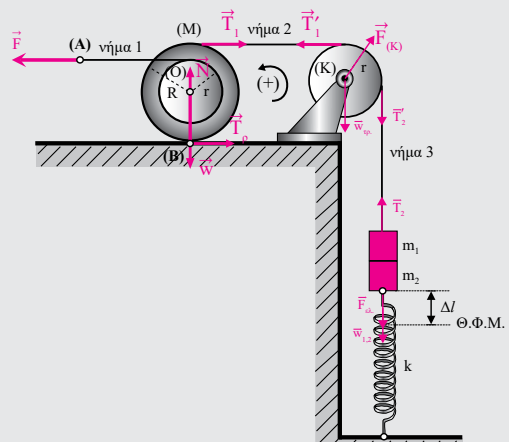
$$\begin{aligned} y &= 2A \cdot \sigma \nu \nu \frac{2\pi x}{\lambda} \cdot \eta \mu \frac{2\pi t}{T} \Rightarrow \\ y &= 0,8 \sigma \nu \nu 4\pi x \cdot \eta \mu 10\pi t \text{ (S.I.)} \end{aligned}$$

ii) Για τον 15° δεσμό ισχύει:

$$x_{15} = \frac{\lambda}{4} + 14 \cdot \frac{\lambda}{2} \Rightarrow x_{15} = 3,625 \text{ m}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Στο παρακάτω σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται σε όλα τα σώματα στην κατάσταση ισορροπίας.



Το σύστημα των σωμάτων $\Sigma_1 - \Sigma_2$ ισορροπεί οπότε με βάση τον 1° Νόμο του Νεύτωνα ισχύει:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow T_2 = w_{1,2} + F_{ελ.} \Rightarrow$$

$$T_2 = (m_1 + m_2)g + k \cdot \Delta l \Rightarrow$$

$$T_2 = 30 \text{ N}$$

Η τροχαλία ισορροπεί οπότε πρέπει:

$$\Sigma \tau_{(K)} = 0 \Rightarrow +T_1' r - T_2' r = 0 \Rightarrow T_2' = T_2, \text{ νήμα αβαρές}$$

$$T_1' = T_2 = 30 \text{ N}$$

Από την ισορροπία του καρουλιού παίρνοντας

ροπές ως προς το σημείο επαφής (B) του καρουλιού με το έδαφος έχουμε:

$$\Sigma \tau_{(B)} = 0 \Rightarrow F \cdot (R + r) - T_1 \cdot 2R = 0 \Rightarrow$$

$$F \cdot \frac{3R}{2} = T_1 \cdot 2R \quad T_1 = T_1' = 30 \text{ N, νήμα αβαρές} \Rightarrow$$

$$F = \frac{4T_1}{3} = \frac{4 \cdot 30}{3} \Rightarrow F = 40 \text{ N}$$

Δ2. Για τις επιταχύνσεις των σωμάτων ισχύει:

$$v_2 = v_{\text{νημ.}(3)} = v_{\text{γρ.}(r)} = \omega r =$$

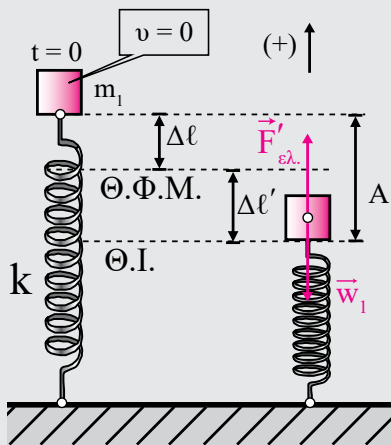
$$= v_{\text{νημ.}(2)} = v_{\text{ανωτ.}} = 2v_{\text{cm}} \Rightarrow$$

$$\alpha_2 = \alpha_{\text{γων}(r)} \cdot r = 2\alpha_{\text{cm}} \Rightarrow \alpha_2 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Δ3. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ που τα δύο σώματα m_1 και m_2 αποκολλώνται, το σώμα m_1 θα κινηθεί από την ακινησία προς τα κάτω λόγω του βάρους του και της δύναμης του ελατηρίου. Για τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσής του ισχύει:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow w_1 = F_{\text{ελ.}}' \Rightarrow$$

$$m_1 g = k \cdot \Delta l' \Rightarrow \Delta l' = 0,1 \text{ m}$$



Έτσι τη στιγμή $t = 0$ το σώμα m_1 βρίσκεται στην ακραία θετική του απομάκρυνση. Το πλάτος της ταλάντωσης που θα εκτελέσει είναι

$$A = \Delta l + \Delta l' \Rightarrow A = 0,2 \text{ m}$$

$$k = m_1 \omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m_1}} = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Υπολογισμός αρχικής φάσης.

$$x = A \eta \mu(\omega t + \varphi_0) \quad t=0, x=A \Rightarrow A = A \eta \mu \varphi_0 \Rightarrow$$

$$\eta \mu \varphi_0 = 1 \quad 0 \leq \varphi_0 < 2\pi \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης της ταλάντωσης που θα εκτελέσει το σώμα μάζας m_1 είναι:

$$x = A \eta \mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow$$

$$x = 0,2 \eta \mu \left(10t + \frac{\pi}{2} \right) (\text{S.I.})$$

Δ4. Η γωνιακή ταχύτητα της τροχαλίας είναι:

$$\omega_T = \alpha_{\text{γων}(r)} t_1 = \frac{\alpha_2}{r} \cdot t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{\omega_T r}{\alpha_2} = \frac{\pi}{6} \text{ s}$$

Η απομάκρυνση του σώματος μάζας m_1 τη χρονική στιγμή t_1 είναι:

$$x_1 = 0,2 \eta \mu \left(10t_1 + \frac{\pi}{2} \right) =$$

$$= 0,2 \eta \mu \left(10 \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} \right) = 0,1 \text{ m}$$

Δηλαδή τη χρονική στιγμή t_1 το σώμα μάζας m_1 βρίσκεται στη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου άρα η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου είναι ίση με το μηδέν, δηλαδή $U_{\text{ελ.}} = 0$.

Δ5. Για το έργο της δύναμης $\vec{F}$ από τη χρονική στιγμή 0 έως τη χρονική στιγμή t_1 έχουμε:

$$W_F = F \cdot \Delta x_A$$

Για τη μετατόπιση του σημείου (A) έχουμε:

$$\Delta x_A = \Delta x_{\text{cm}} + \Delta l$$

όπου Δl το μήκος του νήματος 1 το οποίο ξετυλίγεται από τη χρονική στιγμή 0 έως τη χρονική στιγμή t_1 . Όμως ισχύει $\Delta l = \Delta \theta \cdot r$ άρα:

$$\Delta x_A = \Delta x_{\text{cm}} + \Delta \theta \cdot r = \Delta x_{\text{cm}} + \Delta \theta \cdot \frac{R}{2}$$

Όμως επειδή το καρούλι εκτελεί κύλιση χωρίς ολίσθηση έχουμε:

$$\Delta x_{cm} = \Delta \theta \cdot R$$

οπότε η τελευταία σχέση δίνει:

$$\Delta x_A = \Delta x_{cm} + \frac{\Delta x_{cm}}{2} = \frac{3\Delta x_{cm}}{2}$$

Τελικά για το έργο της δύναμης $\vec{F}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} W_F &= F \cdot \Delta x_A = \frac{3F\Delta x_{cm}}{2} = \frac{3F \frac{1}{2} \alpha_{cm} t_1^2}{2} = \\ &= \frac{3F\alpha_{cm} t_1^2}{4} \Rightarrow W_F = \frac{25}{3} \text{ J} \end{aligned}$$

18ο Διαγώνισμα (Δ18)

ΘΕΜΑ Α

A1. γ), A2. α), A3. β), A4. γ)
A5. α) Σ, β) Λ, γ) Σ, δ) Λ, ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

B1. A. Σωστή απάντηση είναι η γ).

Δικαιολόγηση

Από τη μετατόπιση Compton έχουμε:

$$\Delta \lambda = \lambda_c (1 - \cos \varphi) \Rightarrow$$

$$\Delta \lambda = \lambda_c (1 - 0,6) \Rightarrow \Delta \lambda = 0,4 \lambda_c$$

Το ζητούμενο ποσοστό επί τοις εκατό είναι:

$$\Pi(\%) = \frac{\Delta \lambda}{\lambda} \cdot 100\% \Rightarrow$$

$$\Pi(\%) = \frac{0,4 \lambda_c}{\lambda_c} \cdot 100\% \Rightarrow \Pi(\%) = 40\%$$

B. Σωστή απάντηση είναι η α).

Δικαιολόγηση

Για το μήκος κύματος Compton του σκεδαζόμενου φωτονίου προκύπτει:

$$\Delta \lambda = 0,4 \lambda_c \Rightarrow \lambda' - \lambda_c = 0,4 \lambda_c \Rightarrow \lambda' = 1,4 \lambda_c$$

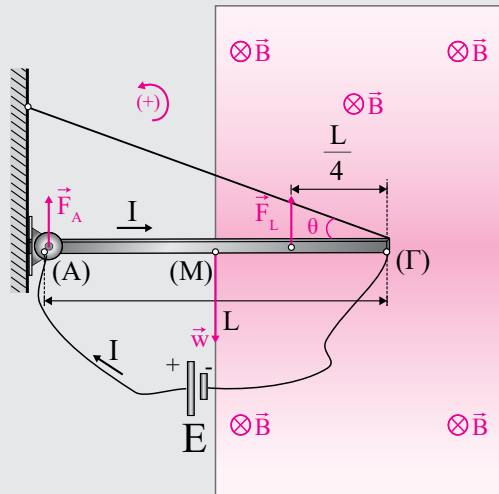
Ο ζητούμενος λόγος είναι:

$$\frac{p'}{p} = \frac{\frac{h}{\lambda'}}{\frac{h}{\lambda}} \Rightarrow \frac{p'}{p} = \frac{\lambda}{\lambda'} \Rightarrow$$

$$\frac{p'}{p} = \frac{\lambda_c}{1,4 \lambda_c} \Rightarrow \frac{p'}{p} = \frac{5}{7}$$

B2. Σωστή απάντηση είναι η β).

Στην αρχική κατάσταση ισορροπίας ο αγωγός δέχεται το βάρος του $\vec{w}$, τη δύναμη Laplace $\vec{F}_L$ και τη δύναμη από την άρθρωση. Αφού η δύναμη που δέχεται ο αγωγός από την άρθρωση έχει κατακόρυφη διεύθυνση, τότε το νήμα οριακά χαλαρώνει καθώς όλες οι δυνάμεις θα πρέπει να είναι κατακόρυφες.



Ισχύει:

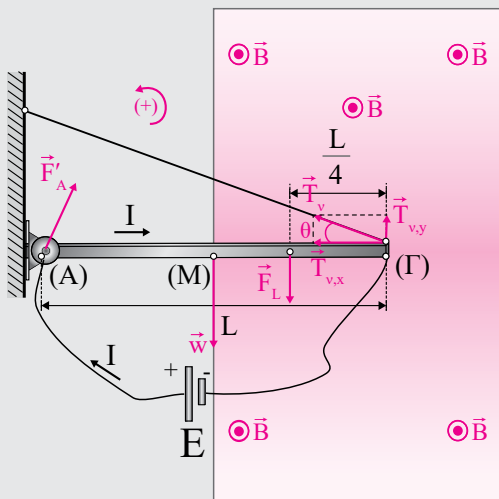
$$\Sigma \vec{\tau}_{(A)} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\tau}_w + \vec{\tau}_{F_L} + \vec{\tau}_{F_A} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$-w \frac{L}{2} + F_L \frac{3L}{4} + 0 = 0 \Rightarrow$$

$$F_L \frac{3}{4} = Mg \frac{1}{2} \Rightarrow F_L = \frac{2Mg}{3} \quad (1)$$

Όταν αντιστρέφουμε τη φορά των δυναμικών γραμμών του μαγνητικού πεδίου η δύναμη Laplace αλλάζει φορά όπως φαίνεται στο

σχήμα αλλά όχι μέτρο.



Στη νέα κατάσταση ισορροπίας του αγωγού έχουμε:

$$\Sigma \vec{\tau}_{(A)} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\vec{\tau}_W + \vec{\tau}_{F_L} + \vec{\tau}_{T_{v,x}} + \vec{\tau}_{T_{v,y}} + \vec{\tau}_{F'_A} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$-w \cdot \frac{L}{2} - F_L \cdot \frac{3L}{4} + 0 + T_{\theta p} \cdot \eta \mu 30^\circ \cdot L = 0 \Rightarrow$$

$$-Mg \cdot \frac{1}{2} - F_L \cdot \frac{3}{4} + T_{\theta p} \cdot \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow T_{\theta p} = 2Mg$$

B3. Σωστή απάντηση είναι η α).

Αν μετακινήσουμε τον ανακλαστήρα ξεκινώντας από το σημείο Ο (μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΠΣ) έτσι ώστε να απέχει απόσταση $H = 0,8m$ από αυτό, το σημείο Σ παραμένει διαρκώς ακίνητο για τρίτη φορά κατά τη μετακίνησή του από το Ο στο Α οπότε έχουμε ακυρωτική συμβολή στο σημείο Σ με $N = 2$. Ισχύει:

$$(\text{ΠΑΣ}) - (\text{ΠΟΣ}) = (2N + 1) \cdot \frac{\lambda}{2} \Rightarrow$$

$$2(\text{ΠΑ}) - (\text{ΠΟΣ}) = \frac{5\lambda}{2} \Rightarrow$$

$$2\sqrt{H^2 + \left(\frac{S}{2}\right)^2} - S = \frac{5\lambda}{2} \Rightarrow$$

$$2\sqrt{0,8^2 + \left(\frac{1,2}{2}\right)^2} - 1,2 = \frac{5\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = 0,32m$$

$$\text{Όμως } v_\delta = \lambda f \Rightarrow f = \frac{v_\delta}{\lambda} \Rightarrow f = 6,25Hz$$

Το σημείο Σ για να κάνει ταλάντωση με μέγιστο πλάτος πρέπει:

$$(\text{ΠΑΣ}) - (\text{ΠΟΣ}) = N\lambda' \Rightarrow$$

$$\sqrt{H^2 + \left(\frac{S}{2}\right)^2} - S = N \cdot \frac{v_\delta}{f_{\text{,,}}} \Rightarrow$$

$$\sqrt{0,8^2 + \left(\frac{1,2}{2}\right)^2} - 1,2 = N \cdot \frac{2}{f'} \Rightarrow$$

$$f' = 2,5N$$

Θέλω $f' > f$ με το ελάχιστο $N \in \mathbb{N}$ άρα $N = 3$ οπότε τελικά παίρνουμε $f' = 7,5Hz$.

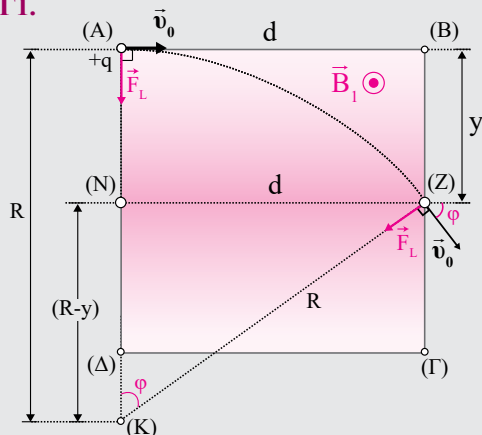
Το ελάχιστο ποσοστό αύξησης της συχνότητας ταλάντωσης της πηγής είναι:

$$\Pi\% = \frac{f' - f}{f} \cdot 100\% = \frac{7,5 - 6,25}{6,25} \cdot 100\% \Rightarrow$$

$$\Pi\% = 20\%$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.



Για την επίκεντρη γωνία που διαγράφει το σωματίδιο στο πεδίο (1) έχουμε:

$$\varphi = \omega t \Rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{T_1} t \Rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{\frac{2\pi m}{B_1 q}} t \Rightarrow$$

$$\varphi = \frac{q B_1 t}{m} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

Από το τρίγωνο KNZ έχουμε:

$$\eta \mu \varphi = \frac{d}{R} \Rightarrow R = \frac{d}{\eta \mu \frac{\pi}{3}} \Rightarrow R = 0,4 \text{ cm}$$

Για την κατακόρυφη εκτροπή προκύπτει:

$$\text{συν} \varphi = \frac{R-y}{R} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{R-y}{R} \Rightarrow$$

$$y = \frac{R}{2} \Rightarrow y = 0,2 \text{ cm}$$

Γ2. Υπολογίζουμε το μέτρο της ταχύτητας εισόδου στο πεδίο (1). Ισχύει:

$$R = \frac{m v_0}{B_1 |q|} \Rightarrow v_0 = \frac{R B_1 |q|}{m} \Rightarrow v_0 = \frac{2}{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Για το κατά de Broglie μήκος κύματος του σωματιδίου έχουμε:

$$\lambda = \frac{h}{p} \Rightarrow \lambda = \frac{h}{m v_0} \Rightarrow \lambda = \frac{5}{3} \cdot 10^{-25} \text{ m}$$

Γ3. Κατά την κίνηση του σωματιδίου στο μαγνητικό πεδίο (1) δε μεταβάλλεται το μέτρο της ταχύτητας του σωματιδίου επειδή το έργο της δύναμης Lorentz που ασκείται σε αυτό είναι ίσο με μηδέν.

Αναλύουμε την ταχύτητα σε δύο συνιστώσες, μια παράλληλη $\vec{v}_\pi$ στις δυναμικές γραμμές του πεδίου (2) και σε μια κάθετη $\vec{v}_\kappa$ στις δυναμικές γραμμές αυτού. Ισχύει:

$$v_\pi = v_0 \cdot \text{συν} \varphi \Rightarrow v_\pi = \frac{1}{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Για την περίοδο της ελικοειδούς κίνησης έχουμε:

$$T_2 = \frac{2\pi m}{B_2 |q|} \Rightarrow T_2 = 6\pi \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

Για το βήμα της έλικας ισχύει:

$$\beta = v_\pi T_2 \Rightarrow \beta = 2\pi \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

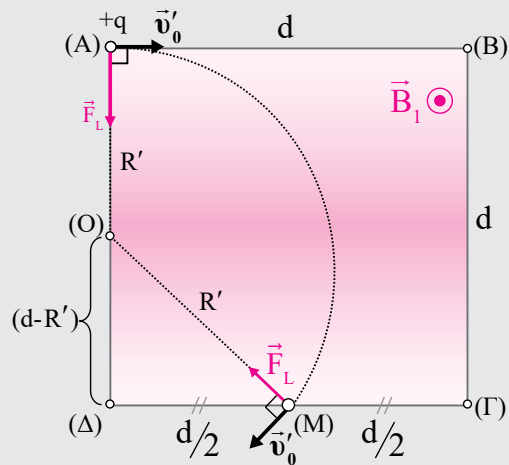
Για τον χρόνο κίνησης στο μαγνητικό πεδίο (2) έχουμε:

$$s = v_\pi \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{s}{v_\pi} \Rightarrow \Delta t = 3 \text{ s}$$

Για το μήκος της τροχιάς του σωματιδίου έχουμε:

$$s' = v_0 \cdot \Delta t \Rightarrow s' = \left(\frac{2}{3} \cdot 3 \right) \text{ m} \Rightarrow s' = 2 \text{ m}$$

Γ4.



Από το τρίγωνο OΔM έχουμε:

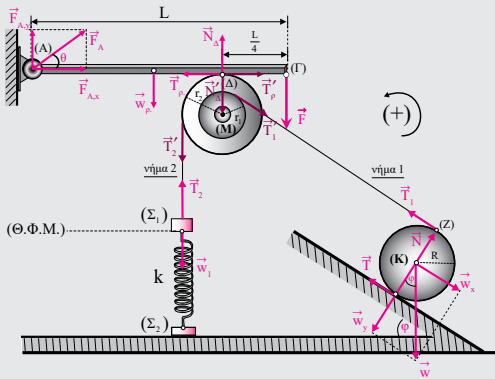
$$R'^2 = \left(\frac{d}{2} \right)^2 + (d - R')^2 \Rightarrow$$

$$R' = \frac{5d}{8} \Rightarrow R' = \frac{\sqrt{3}}{8} \text{ cm}$$

Για το μέτρο της ταχύτητας εισόδου θα ισχύει:

$$R' = \frac{m v_0'}{B_1 |q|} \Rightarrow v_0' = \frac{R' B_1 |q|}{m} \Rightarrow v_0' = \frac{5\sqrt{3}}{24} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

ΘΕΜΑ Δ



Δ1. i) Αφού ο δίσκος ισορροπεί πρέπει η συνισταμένη των ροπών ως προς οποιοδήποτε σημείο του να είναι ίση με μηδέν καθώς και η συνισταμένη των δυνάμεων σε κάθε άξονα. Έχουμε:

$$\Sigma \tau_{(K)} = 0 \Rightarrow -TR + T_1 R = 0 \Rightarrow T = T_1 \quad (1)$$

$$\Sigma \vec{F}_x = 0 \Rightarrow w_x = T + T_1 \quad (1)$$

$$mg \cdot \eta\mu\phi = 2T_1 \Rightarrow T_1 = \frac{mg \cdot \eta\mu\phi}{2} \Rightarrow T_1 = 5\text{ N}$$

ii) Αφού το ελατήριο στην κατάσταση ισορροπίας δεν έχει δυναμική ενέργεια παραμόρφωσης, σημαίνει ότι βρίσκεται στη θέση φυσικού μήκους του. Έτσι το σώμα (Σ_1) δέχεται την τάση του νήματος 2 και το βάρος του. Αφού το σώμα (Σ_1) ισορροπεί πρέπει:

$$\Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow w_1 = T_2 \Rightarrow m_1 g = T_2 \Rightarrow T_2 = 5\text{ N}$$

Επειδή το νήμα 2 είναι αβαρές, το μέτρο της δύναμης που δέχεται ο μεγάλος δίσκος της τροχαλίας από το νήμα 2 είναι ίσο με το μέτρο της δύναμης που δέχεται το σώμα Σ_1 από το νήμα 2 οπότε $T'_2 = T_2 \Rightarrow T'_2 = 5\text{ N}$

Δ2. i) Επειδή το νήμα 1 είναι αβαρές, το μέτρο της δύναμης που δέχεται ο μικρός δίσκος της τροχαλίας από το νήμα 1, είναι ίσο με το μέτρο της δύναμης που δέχεται ο δίσκος από το νήμα 1 δηλαδή $T'_1 = T_1 = 5\text{ N}$.

Η τροχαλία ισορροπεί οπότε η συνισταμένη των ροπών ως προς το κέντρο της M θα πρέπει να ισούται με μηδέν.

$$\Sigma \tau_{(M)} = 0 \Rightarrow$$

$$+T'_2 r_2 - T'_1 r_1 - T'_p r_2 = 0 \Rightarrow$$

$$T'_p = 2,5\text{ N}$$

Η δύναμη της στατικής τριβής που δέχεται η ράβδος από την τροχαλία και η δύναμη της στατικής τριβής που δέχεται η τροχαλία από τη ράβδο έχουν σχέση μεταξύ τους δράσης – αντίδρασης οπότε έχουμε $T_p = T'_p \Rightarrow T_p = 2,5\text{ N}$

ii) Από την ισορροπία των ροπών για τη ράβδο ως προς το άκρο της A έχουμε:

$$\Sigma \tau_{(A)} = 0 \Rightarrow$$

$$-F \cdot L + N_\Delta \cdot \frac{3L}{4} - Mg \cdot \frac{L}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$N_\Delta = 30\text{ N}$$

Από την ισορροπία των δυνάμεων σε κάθε άξονα x, y για τη ράβδο έχουμε:

Άξονας x :

$$\Sigma \vec{F}_x = 0 \Rightarrow F_{A,x} = T_p \Rightarrow F_{A,x} = 2,5\text{ N}$$

Άξονας y :

$$\Sigma \vec{F}_y = 0 \Rightarrow F_{A,y} + N_\Delta = Mg + F \Rightarrow F_{A,y} = 2,5\text{ N}$$

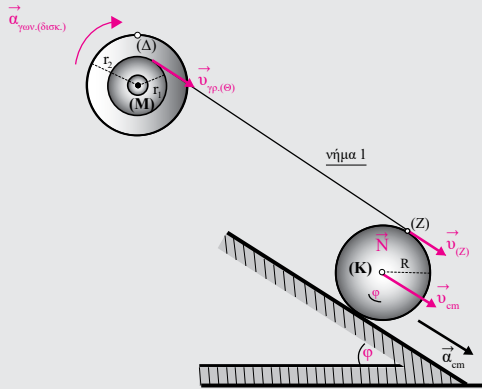
Το μέτρο της δύναμης από την άρθρωση ισούται με:

$$F_A = \sqrt{F_{A,x}^2 + F_{A,y}^2} \Rightarrow F_A = 2,5\sqrt{2}\text{ N}$$

Και η διεύθυνσή της:

$$\epsilon\phi\theta = \frac{F_{A,y}}{F_{A,x}} = 1 \Rightarrow \theta = 45^\circ.$$

Δ3.



Όταν κόψουμε το νήμα 2, η τροχαλία αρχίζει να περιστρέφεται περί το κέντρο της (Μ), ενώ ο δίσκος κυλιέται χωρίς ολίσθηση πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο.

Α' τρόπος

Κατά τη διάρκεια της κίνησης του συστήματος διπλή τροχαλία – δίσκος ισχύει ότι το μήκος Δl του νήματος 1 που ξετυλίγεται από την περιφέρεια του μικρού δίσκου της τροχαλίας είναι ίσο με το άθροισμα της μετατόπισης Δx_{cm} του κέντρου μάζας του δίσκου και του μήκους Δl' που τυλίγεται στην περιφέρειά του, δηλαδή:

$$\Delta l = \Delta x_{cm} + \Delta l' \Rightarrow \Delta l = \Delta x_{cm} + \Delta l' \Rightarrow$$

$$\Delta \theta_{(τροχ.)} r_1 = \Delta \theta_{(δισκ.)} R + \Delta \theta_{(δισκ.)} R \Rightarrow$$

$$\Delta \theta_{(τροχ.)} r_1 = 2 \Delta \theta_{(δισκ.)} R \Rightarrow$$

$$\Delta \theta_{(τροχ.)} = 2,5 \Delta \theta_{(δισκ.)} \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta \theta_{(τροχ.)}}{2\pi} = 2,5 \frac{\Delta \theta_{(δισκ.)}}{2\pi} \Rightarrow N_{(τροχ.)} = 2,5 N_{(δισκ.)} \Rightarrow$$

$$N_{(τροχ.)} = 10 \text{ περιστροφές}$$

Β' τρόπος

Κάθε χρονική στιγμή όλα τα σημεία του νήματος 1 έχουν την ίδια ταχύτητα άρα και το σημείο Θ της περιφέρειας του μικρού δίσκου της τροχαλίας με το ανώτερο σημείο Ζ του

δίσκου. Η ταχύτητα του σημείου Ζ είναι διπλάσια από την ταχύτητα του κέντρου μάζας του δίσκου αφού το σημείο Ζ είναι το ανώτερο σημείο του δίσκου και αυτός εκτελεί κύλιση χωρίς ολίσθηση. Η ταχύτητα του σημείου Θ οφείλεται στην περιστροφική κίνηση της τροχαλίας.

Έχουμε:

$$v_{\Theta} = v_Z \Rightarrow \omega_{τροχ.} r_1 = 2 v_{cm} \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta(\omega_{τροχ.})}{\Delta t} r_1 = 2 \frac{\Delta(v_{cm})}{\Delta t} \Rightarrow \alpha_{γων.(τροχ.)} r_1 = 2 \alpha_{cm} \Rightarrow$$

$$\alpha_{γων.(τροχ.)} r_1 = 2 \alpha_{γων.(δισκ.)} R \Rightarrow$$

$$\alpha_{γων.(τροχ.)} = 2,5 \alpha_{γων.(δισκ.)} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \alpha_{γων.(τροχ.)} \Delta t^2 = 2,5 \frac{1}{2} \alpha_{γων.(δισκ.)} \Delta t^2 \Rightarrow$$

$$\Delta \theta_{(τροχ.)} = 2,5 \Delta \theta_{(δισκ.)} \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta \theta_{(τροχ.)}}{2\pi} = 2,5 \frac{\Delta \theta_{(δισκ.)}}{2\pi} \Rightarrow N_{(τροχ.)} = 2,5 N_{(δισκ.)} \Rightarrow$$

$$N_{(τροχ.)} = 10 \text{ περιστροφές}$$

Δ4. Όταν κόψουμε το νήμα 2 καταργείται η δύναμη της τάσης T₂ και το σώμα (Σ₁) θα κινηθεί προς τα κάτω λόγω του βάρους του εκτελώντας απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς D = k.

Στη θέση ισορροπίας του σώματος (Σ₁), έχουμε

$$(\Theta.I.): \Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{ελ.} + \vec{w}_1 = 0 \Rightarrow F_{ελ.} = w_1 \Rightarrow$$

$$k \Delta l = m_1 g \Rightarrow \Delta l = \frac{m_1 g}{k} \Rightarrow \Delta l = 0,1m$$

$$k = m_1 \omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m_1}} = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος (Σ₁) είναι A = Δl = 0,1m

Τη χρονική στιγμή t = 0 έχουμε x = +A, επομένως:

$$A = A \eta \mu \varphi_0 \Rightarrow \eta \mu \varphi_0 = 1$$

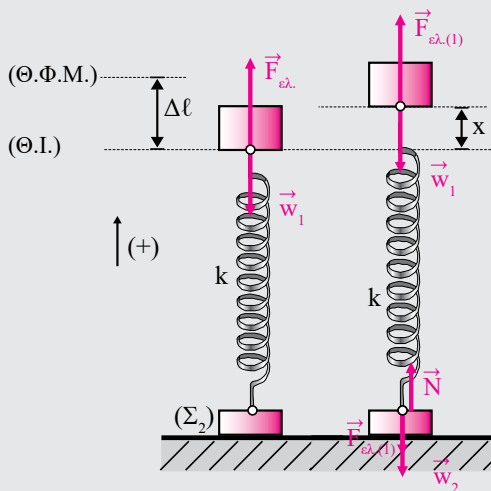
Επειδή $0 \leq \varphi_0 < 2\pi \text{rad}$ τελικά προκύπτει:

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{rad}$$

Επομένως, η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης της ταλάντωσης του σώματος (Σ_1) είναι:

$$x = 0,1 \cdot \eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) (\text{S.I.})$$

Δ5.



Σε μια τυχαία θέση της ταλάντωσης του σώματος (Σ_1) η οποία απέχει απόσταση x από τη θέση ισορροπίας του έχουμε:

$$\Sigma \vec{F} = -k\vec{x} \Rightarrow \vec{F}_{el} + \vec{w} = -k\vec{x} \Rightarrow$$

$$F_{el(1)} - w_1 = -kx \Rightarrow F_{el(1)} = m_1 g - kx \Rightarrow$$

$$F_{el(1)} = 5 - 50x (\text{S.I.}) \text{ για } -0,1\text{m} \leq x \leq 0,1\text{m}$$

Το σώμα (Σ_2) ισορροπεί άρα:

$$\Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F}'_{el(1)} + \vec{w}_2 + \vec{N} = 0 \Rightarrow$$

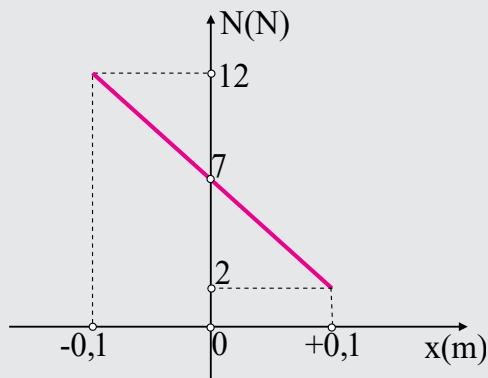
$$N = F'_{el(1)} + m_2 g \Rightarrow$$

$$N = 7 - 50x (\text{S.I.}) \text{ για } -0,1\text{m} \leq x \leq 0,1\text{m}$$

$$\text{Για } x = +0,1\text{m} \Rightarrow N = 2\text{N}$$

$$\text{Για } x = -0,1\text{m} \Rightarrow N = 12\text{N}$$

$$\text{Για } x = 0 \Rightarrow N = 7\text{N}$$



19ο Διαγώνισμα (Δ19)

ΘΕΜΑ Α

A1. β), A2. γ), A3. β), A4. α)

A5. α) Σ, β) Σ, γ) Λ, δ) Λ, ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

B1. Σωστή απάντηση είναι η γ).

Δικαιολόγηση

Το να μη γνωρίζουμε πού ακριβώς μέσα στον πυρήνα βρίσκεται το πρωτόνιο αντιστοιχεί σε αβεβαιότητα στη θέση περίπου $\Delta x \approx d$ (θα μπορούσε κανείς να θεωρήσει αβεβαιότητα θέσης το $d/2$, αλλά αυτό δεν αλλάζει την τάξη μεγέθους της απάντησης).

Χρησιμοποιώντας την αρχή της αβεβαιότητας:

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar \Rightarrow \Delta x \approx d \Rightarrow d \Delta p \geq \hbar \Rightarrow \Delta p \geq \frac{\hbar}{d}$$

Η κινητική ενέργεια του πρωτονίου (ακόμα και αν θεωρήσουμε πως η ορμή του είναι μηδέν κατά μέσο όρο) είναι:

$$K = \frac{p^2}{2m} \geq \frac{(0 \pm \Delta p)^2}{2m} = \frac{\left(\frac{\hbar}{d}\right)^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2d^2 m}$$

B2. Σωστή απάντηση είναι η γ).

Δικαιολόγηση

Έστω ότι τη στιγμή που περνά το σώμα μάζας M από τη θέση όπου το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος (θέση ισορροπίας της ταλάντωσης), έχει ταχύτητα v_0 . Εφαρμόζοντας Α.Δ.Ο. στον οριζόντιο άξονα της κίνησης του σώματος μάζας M κατά τη διάρκεια της κρούσης του με το σώμα μάζας m , έχουμε:

$$\begin{aligned}\vec{p}_{\text{αρχ}} &= \vec{p}_{\text{τελ}} \Rightarrow \\ Mv_0 + 0 &= (m + M)V_0 \Rightarrow \\ V_0 &= \frac{M}{m + M}v_0 \quad (1)\end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας αρχή διατήρησης ενέργειας στη νέα ταλάντωση (ΑΔΕΤ) στη θέση της κρούσης (που παραμένει θέση ισορροπίας και για τη νέα ταλάντωση), έχουμε:

$$\begin{aligned}E &= K + U \Rightarrow \frac{1}{2}kA'^2 = \frac{1}{2}(m + M)V_0^2 + 0 \Rightarrow \\ kA'^2 &= (m + M)\frac{M^2}{(m + M)^2}v_0^2 \Rightarrow \\ M\omega^2 A'^2 &= \frac{M^2}{m + M}A^2\omega^2 \Rightarrow A' = A\sqrt{\frac{M}{m + M}} \quad (2)\end{aligned}$$

Για την παραγωγή της σχέσης (2) χρησιμοποιήσαμε τις σχέσεις $k = M\omega^2$, $v_0 = A\omega$ και (1).

Από τη σχέση (2) παρατηρούμε ότι $A' < A$.

B3. Σωστή απάντηση είναι η γ).

Δικαιολόγηση

Αν v είναι η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων

$$\text{ισχύει: } v = \frac{L}{t_1} \quad (1)$$

$$\text{Η συχνότητα } f, \text{ των κυμάτων είναι: } f = \frac{N}{t_2} \quad (2)$$

Σύμφωνα με τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής και λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (2), έχουμε:

$$v = \lambda f \Rightarrow v = \lambda \cdot \frac{N}{t_2} \quad (3)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (1) και (3) καταλήγουμε:

$$\frac{L}{t_1} = \lambda \cdot \frac{N}{t_2} \Rightarrow \lambda = \frac{L}{N} \cdot \frac{t_2}{t_1}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Ο πυρήνας Ηλίου (He) μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο δέχεται δύναμη Lorentz F_L , η οποία παραμένει μονίμως κάθετη στην ταχύτητά του παίζοντας ρόλο κεντρομόλου δύναμης. Έτσι ο πυρήνας He εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση, της οποίας η ακτίνα και η περίοδος δίνονται από τις σχέσεις:

$$R = \frac{mv}{B|q|} \quad (1) \quad T = \frac{2\pi m}{B|q|} \quad (2)$$

Η περίοδος T_1 της κίνησης του πυρήνα He πριν περάσει το φύλλο του μολύβδου σύμφωνα με τη σχέση (2) είναι:

$$T_1 = \frac{2\pi m}{B|q|} \Rightarrow T_1 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ s}$$

Από τη σχέση (2) παρατηρούμε ότι η περίοδος είναι ανεξάρτητη της ταχύτητας, συνεπώς η περίοδος T_2 της κίνησης του πυρήνα He αφού περάσει το φύλλο του μολύβδου θα είναι

$$T_2 = T_1 \Rightarrow T_2 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ s}$$

Γ2. Από τη σχέση (1) βρίσκουμε την ταχύτητα v_1 του πυρήνα He πριν διαπεράσει το φύλλο μολύβδου:

$$v_1 = \frac{BR_1|q|}{m} = 3 \cdot 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Το μήκος κύματος de Broglie λ_1 , που αντιστοιχεί στον πυρήνα He για τη συγκεκριμένη ταχύτητα είναι:

$$\lambda_1 = \frac{h}{p_1} = \frac{h}{mv_1} \Rightarrow \lambda_1 = 343,75 \cdot 10^{-15} \text{ m}$$

Γ3. Από τη σχέση (1) βρίσκουμε την ταχύτητα v_2 του πυρήνα He αφού διαπεράσει το

φύλλο μολύβδου:

$$v_2 = \frac{BR_2 |q|}{m} = 10^5 \text{ m/s}$$

Το μήκος κύματος de Broglie λ_2 , που αντιστοιχεί στον πυρήνα He για τη συγκεκριμένη ταχύτητα είναι:

$$\lambda_2 = \frac{h}{p_2} = \frac{h}{mv_2} \Rightarrow \lambda_2 = 1031,25 \cdot 10^{-15} \text{ m}$$

Το ποσοστό επί τοις εκατό της μεταβολής του μήκους κύματος de Broglie που αντιστοιχεί στον πυρήνα He αφού διαπεράσει το φύλλο μολύβδου είναι:

$$\pi\% = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1} \cdot 100\% \Rightarrow \pi\% = 200\%$$

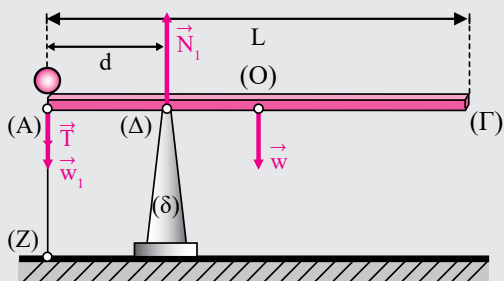
Γ4. Η απώλεια ενέργειας $E_{\text{απ}}$, του πυρήνα He κατά το πέρασμά του μέσα από το φύλλο του μολύβδου είναι:

$$E_{\text{απ}} = |K_2 - K_1| = \left| \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \right| \Rightarrow$$

$$E_{\text{απ}} = 25,6 \cdot 10^{-17} \text{ J}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

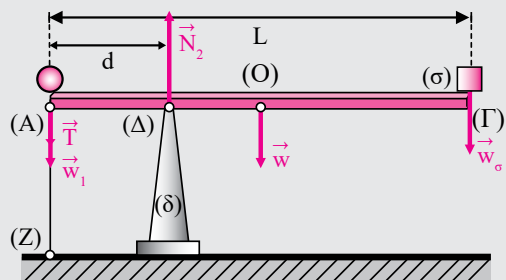


Στη σανίδα ΑΓ ασκούνται: η δύναμη που ασκεί η σφαίρα στη σανίδα που είναι ίση με το βάρος w_1 , το βάρος της σανίδας w , που ασκείται στο μέσο της Ο επειδή είναι ομογενής, η τάση του νήματος T , που είναι μηδενική και η δύναμη N_1 από το υποστήριγμα (δ).

Η σανίδα ισορροπεί οπότε:

$$\Sigma \tau_{(A)} = 0 \Rightarrow w_1 \cdot d - w \cdot \left(\frac{L}{2} - d \right) = 0 \Rightarrow d = 1 \text{ m}$$

Δ2.



Στη σανίδα τώρα προστίθεται η δύναμη που ασκεί το σώμα (σ) που είναι ίση με το βάρος του w_σ , η τάση του νήματος T , που είναι μη μηδενική και η δύναμη N_2 από το υποστήριγμα (δ). Η σανίδα ισορροπεί οπότε:

$$\Sigma \tau_{(A)} = 0 \Rightarrow$$

$$N_2 \cdot d - w \cdot \frac{L}{2} - w_\sigma \cdot L = 0 \Rightarrow$$

$$N_2 = 900 \text{ N}$$

Αλλά

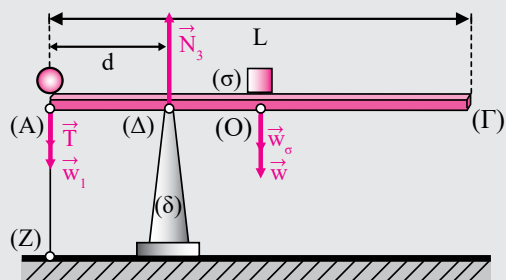
$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow$$

$$N_2 - T - w_1 - w - w_\sigma = 0 \Rightarrow$$

$$T = 400 \text{ N}$$

οπότε παρατηρούμε ότι $T < T_{\text{θρ}}$, συνεπώς το νήμα δεν κόβεται.

Δ3.



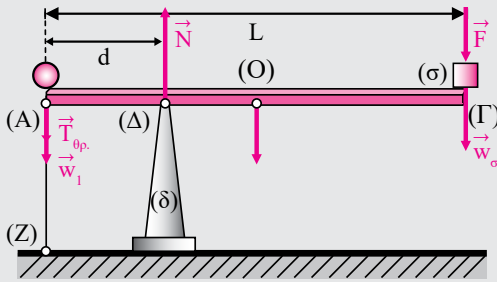
Η σανίδα ισορροπεί οπότε έχουμε:

$$\Sigma \tau_{(\Delta)} = 0 \Rightarrow$$

$$w_1 \cdot d + T \cdot d - (w + w_\sigma) \cdot \left(\frac{L}{2} - d \right) = 0 \Rightarrow$$

$$T = 100 \text{ N}$$

Δ4.



Η δύναμη που ασκείται στο σημείο Γ της σανίδας είναι ίση με το άθροισμα του βάρους w_σ του σώματος (σ) και της δύναμης F . Η τάση του νήματος στην οριακή στιγμή που θα κοπεί το νήμα θα πάρει την τιμή $T = T_{\theta p}$. Η σανίδα ισορροπεί οπότε έχουμε:

$$\Sigma \tau_{(\Delta)} = 0 \Rightarrow$$

$$w_1 \cdot d + T_{\theta p} \cdot d - \left(\frac{L}{2} - d \right) - (w_\sigma + F) \cdot (L - d) = 0 \Rightarrow$$

$$F = 50 \text{ N}$$

Από τη σχέση $F = 20 + 5t$, για $F = 50 \text{ N}$ βρίσκουμε: $t = 6 \text{ s}$.

206 Διαγώνισμα (Δ20)

ΘΕΜΑ Α

A1. δ), A2. γ), A3. α), A4. δ)
A5. α) Λ, β) Σ, γ) Σ, δ) Λ, ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

B1. Σωστή απάντηση είναι η **α**).

Δικαιολόγηση

Το φωτόνιο που σκεδάζεται από το ελεύθερο ηλεκτρόνιο στο σημείο Α έχει μήκος κύματος λ' με

$$\lambda' = \lambda + \frac{h}{mc}(1 - \cos \theta) \quad (1)$$

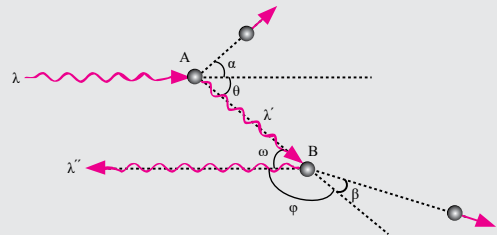
Η σκέδαση αυτού του φωτονίου στο σημείο Β θα έχει ως αποτέλεσμα το νέο μήκος κύματος του σκεδαζόμενου φωτονίου λ'' να είναι:

$$\lambda'' = \lambda' + \frac{h}{mc}(1 - \cos \phi) \quad (2)$$

Αντικαθιστώντας την σχέση (1) στην (2) έχουμε:

$$\lambda'' = \lambda + \frac{h}{mc}(1 - \cos \theta) + \frac{h}{mc}(1 - \cos \phi) \Leftrightarrow$$

$$\lambda'' = \lambda + \frac{h}{mc}(2 - \cos \theta - \cos \phi) \quad (3)$$



Οι γωνίες θ και ω είναι εντός εναλλάξ των παράλληλων ευθειών που ορίζονται από την αρχική και τελική διεύθυνση διάδοσης του φωτονίου με τέμνουσα την ευθεία AB, οπότε είναι ίσες, δηλαδή $\theta = \omega$. Επίσης, οι γωνίες ω και ϕ είναι παραπληρωματικές, οπότε $\omega + \phi = \pi$ ή $\theta + \phi = \pi$. Αυτό σημαίνει ότι οι γωνίες θ και ϕ έχουν αντίθετα τα συνημίτονά τους, δηλαδή $\cos \theta = -\cos \phi$.

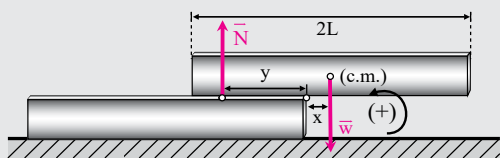
Αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα αυτό στην σχέση (3) προκύπτει ότι

$$\lambda'' = \lambda + \frac{2h}{mc} \Leftrightarrow \lambda'' - \lambda = \frac{2h}{mc} \Leftrightarrow \Delta \lambda = \frac{2h}{mc}$$

B2. Σωστή απάντηση είναι η α).

Δικαιολόγηση

Στο σχήμα της εκφώνησης φαίνονται τα σημεία εφαρμογής των δυνάμεων $\vec{N}$ και $\vec{w}$ που ασκούνται στην πάνω ράβδο όταν αυτή τοποθετείται κατά τρόπο ώστε να προεξέχει από την κάτω:



Η δύναμη στήριξης $\vec{N}$, που ασκείται από την όμοια κάτω ράβδο, ασκείται σε σημείο που απέχει κατά y από το σημείο K.

Το βάρος $\vec{w}$ έχει σημείο εφαρμογής το κέντρο μάζας (c.m.) της ράβδου που βρίσκεται σε οριζόντια απόσταση x από το σημείο K. Αν η πάνω ράβδος πρόκειται να ανατραπεί θα πρέπει να περιστραφεί ως προς οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το σημείο K και είναι κάθετος στο μήκος της. Ορίζουμε θετική φορά περιστροφής την αντίθετη της φοράς κίνησης των δεικτών του ρολογιού όπως φαίνεται στο σχήμα.

Το βάρος $\vec{w}$ και η δύναμη $\vec{N}$ δημιουργούν αρνητική συνισταμένη ροπή γύρω από το K. Δηλαδή για οποιαδήποτε τιμή του $x > 0$ η ράβδος θα ανατραπεί.

Σωστή λοιπόν πρέπει να είναι υποχρεωτικά η απάντηση (α).

Πραγματικά, αν $x = 0$ τότε $\tau_w = 0$ και η συνθήκη ισορροπίας γράφεται:

$$\Sigma \tau = 0 \Rightarrow \tau_N + \tau_w = 0 \Rightarrow \tau_N + 0 = 0 \Rightarrow \tau_N = 0 \Rightarrow -N \cdot y + 0 = 0 \Rightarrow y = 0$$

αφού φυσικά η δύναμη στήριξης N δεν μπορεί να είναι 0.

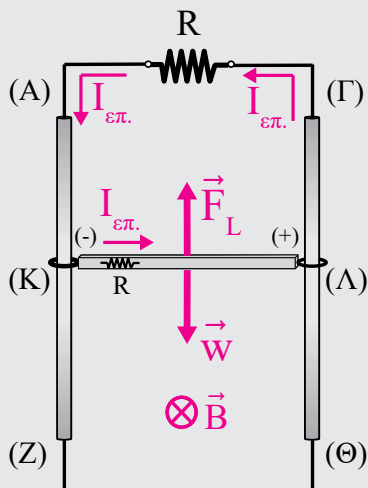
Δηλαδή οι δύο αντίθετες δυνάμεις έχουν σημείο εφαρμογής το K, συνεπώς τόσο η συνισταμένη δύναμη όσο και η συνισταμένη ροπή είναι μηδενικές, άρα η ράβδος παραμένει σε ισορροπία στη θέση αυτή.

B3. Σωστή απάντηση είναι η γ).

Δικαιολόγηση

Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ ο αγωγός ΚΛ αρχίζει να κατέρχεται επιταχυνόμενος και κινούμενος κάθετα στις δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου. Στον αγωγό ΚΛ αναπτύσσεται επαγωγική τάση $E_{\text{επ}} = B\ell v$. Το κλειστό κύκλωμα ΚΛΓΑΚ διαρρέεται από επαγωγικό ρεύμα έντασης:

$$I_{\text{επ}} = \frac{E_{\text{επ}}}{R + R} \Rightarrow I_{\text{επ}} = \frac{B\ell v}{2R} \quad (1)$$



Στον αγωγό ΚΛ ασκείται δύναμη Laplace αντίρροπη του βάρους του που έχει μέτρο $F_L = BI_{\text{επ}}\ell \quad (2)$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι

$$F_L = \frac{B^2 \ell^2 v}{2R} \quad (3)$$

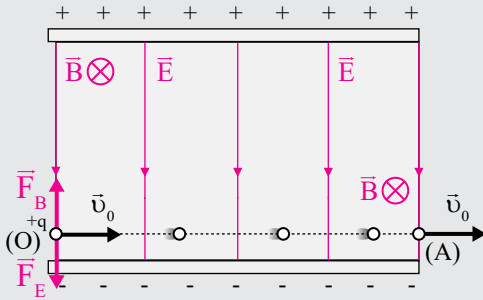
Τη χρονική στιγμή που ο αγωγός ΚΛ αποκτά οριακή ταχύτητα $\vec{v}_{\text{op}}$, η συνισταμένη δύναμη που δέχεται είναι μηδέν, επομένως:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_L = mg \Rightarrow \frac{B^2 \ell^2 v_{\text{op}}}{2R} = mg \Rightarrow$$

$$v_{\text{op}} = \frac{2mgR}{B^2 \ell^2}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έστω $\vec{v}_{(0)}$ η ταχύτητα των ιόντων που εκτοξεύονται από το σημείο (O) και εξέρχονται από το σημείο (A) έχοντας ταχύτητα $\vec{v}_0$ χωρίς να εκτραπούν από την ευθύγραμμη πορεία τους. Αυτό συμβαίνει επειδή η συνισταμένη δύναμη που δέχεται κάθε τέτοιο ιόν κατά την κίνησή του στο φίλτρο ταχυτήτων είναι μηδέν, $\Sigma \vec{F} = 0$. Κάθε ιόν εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση άρα οι δύο ταχύτητες είναι ίσες, $\vec{v}_{(0)} = \vec{v}_0$.



Η δύναμη $\vec{F}_E$ που ασκείται στο θετικό ιόν από το ηλεκτρικό πεδίο έχει την ίδια κατεύθυνση με την ένταση $\vec{E}$. Σύμφωνα με τον κανόνα των τριών δακτύλων του δεξιού χεριού η δύναμη $\vec{F}_B$ που ασκείται στο θετικό ιόν από το μαγνητικό πεδίο έχει κατεύθυνση κατακόρυφη προς τα πάνω. Οι δύο δυνάμεις είναι αντίθετες, επομένως έχουν ίσα μέτρα.

$$F_E = F_B \Rightarrow E \cdot |q| = B \cdot |q| \cdot v_{(0)} \Rightarrow$$

$$E = B \cdot v_{(0)} \Rightarrow v_{(0)} = \frac{E}{B} \Rightarrow$$

$$v_{(0)} = v_0 \Rightarrow v_{(0)} = 2 \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

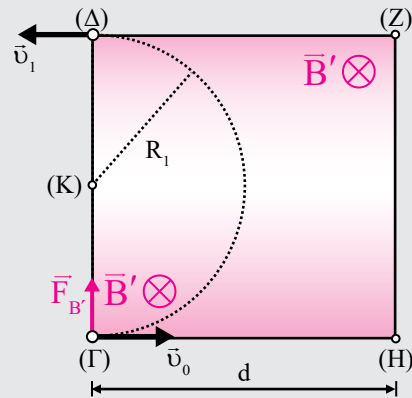
Γ2. Το θετικό ιόν που μπαίνει με ταχύτητα $\vec{v}_0$ στο μαγνητικό πεδίο $\vec{B}'$ δέχεται δύναμη Lorentz $\vec{F}_{B'}$ που παίζει ρόλο κεντρομόλου δύναμης και αναγκάζει το ιόν να εκτελέσει ομαλή κυκλική κίνηση. Η τροχιά που διαγράφει το μονοσθενές θετικό ιόν, $q = +e$, μέσα στο μα-

γνητικό πεδίο είναι ημικυκλική με κέντρο (K) και ακτίνα:

$$R_1 = \frac{d}{2} = 10^{-2} \text{ m}.$$

$$F_{B'} = B' \cdot |q| \cdot v_0 = m \cdot \frac{v_0^2}{R_1} \Rightarrow R_1 = \frac{m \cdot v_0}{B' \cdot e} \Rightarrow$$

$$m = \frac{B' \cdot e \cdot R_1}{v_0} \Rightarrow m = 1,6 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$



Έστω Δt_1 το χρονικό διάστημα της κίνησης του ιόντος από το Γ μέχρι το Δ και $\phi_1 = \pi \text{ rad}$ η γωνία που διαγράφει η επιβατική του ακτίνα.

$$\phi_1 = \omega_1 \cdot \Delta t_1 \Rightarrow \pi = \frac{2\pi}{T_1} \cdot \Delta t_1 \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{T_1}{2} \Rightarrow$$

$$\Delta t_1 = \frac{2\pi m}{2B' \cdot |q|} \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{\pi m}{B' \cdot e} \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{\pi}{2} \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

Γ3. Το μέτρο της ταχύτητας του ιόντος παραμένει σταθερό κατά την κίνηση του στο μαγνητικό πεδίο $\vec{B}'$, επομένως $v_1 = v_0 = 2 \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Η με-

ταβολή της ορμής του ιόντος είναι ίση με:

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}_1 - \vec{p}_0 \Rightarrow \Delta p = m \cdot v_1 - m \cdot v_0$$

Θεωρούμε θετική τη φορά της $\vec{v}_1$, οπότε:

$$\Delta p = m \cdot v_1 - m \cdot (-v_0) \Rightarrow$$

$$\Delta p = 2m \cdot v_0 \Rightarrow \Delta p = 6,4 \cdot 10^{-23} \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Η μεταβολή $\Delta \vec{p}$ της ορμής του ιόντος έχει την ίδια κατεύθυνση με την $\vec{v}_1$.

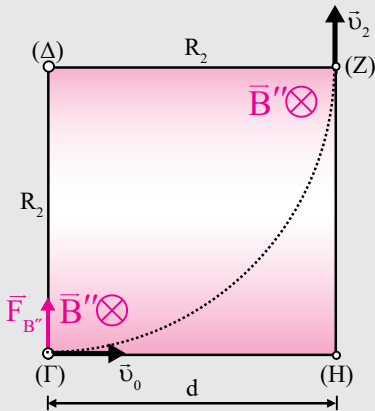
Η δύναμη $\vec{F}_{B'}$ είναι συνεχώς κάθετη στην τροχιά του ιόντος επομένως $W_{F_{B'}} = 0$.

Σύμφωνα με το θεώρημα έργου – ενέργειας η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του ιόντος είναι:

$$\Delta K = W_{F_{B'}} \Rightarrow \Delta K = 0$$

Γ4. Η $\vec{v}_0$ είναι κάθετη στην $\Gamma\Delta$ και η $\vec{v}_2$ είναι κάθετη στη $Z\Delta$. Το ιόν διαγράφει μέσα στο μαγνητικό πεδίο ένα τεταρτοκύκλιο με κέντρο το (Δ) και ακτίνα $R_2 = d$ εκτελώντας ομαλή κυκλική κίνηση. Η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς του ιόντος είναι ίση με:

$$R_2 = \frac{m \cdot v_0}{B'' \cdot e} \Rightarrow B'' = \frac{m \cdot v_0}{d \cdot e} \Rightarrow B'' = 10^{-2} \text{ T}$$



Έστω Δt_2 το χρονικό διάστημα της κίνησης του ιόντος από το Γ μέχρι το (Z) και $\varphi_2 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$ η γωνία που διαγράφει η επιβατική του ακτίνα.

$$\varphi_2 = \omega_2 \cdot \Delta t_2 \Rightarrow \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{T_2} \cdot \Delta t_2 \Rightarrow \Delta t_2 = \frac{T_2}{4} \Rightarrow$$

$$\Delta t_2 = \frac{2\pi m}{4B'' \cdot |q|} \Rightarrow \Delta t_2 = \frac{\pi m}{2B'' \cdot e}$$

Με αριθμητική αντικατάσταση προκύπτει ότι:

$$\Delta t_2 = \frac{\pi}{2} \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

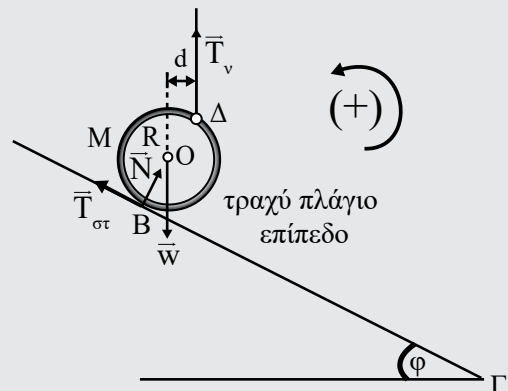
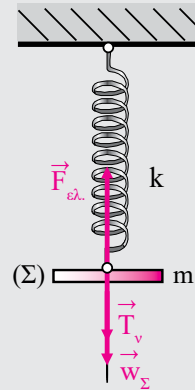
Η στροφορμή $\vec{L}$ κάθε ιόντος, ως προς τον άξονα που περνά από το Δ και είναι κάθετος στο επίπεδο της τροχιάς του, παραμένει σταθερή κατά την κίνηση στο μαγνητικό πεδίο $\vec{B}''$ γιατί η δύναμη $\vec{F}_{B'}$ που δέχεται από αυτό δεν έχει ροπή. Η διεύθυνση της $\vec{L}$ είναι κάθετη στο επίπεδο της κυκλικής τροχιάς και έχει φορά προς τα έξω. Το μέτρο της είναι ίσο με:

$$L = m \cdot v_0 \cdot R_2 \Rightarrow L = 6,4 \cdot 10^{-25} \frac{\text{Kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Το σώμα (Σ) ισορροπεί, άρα $\Sigma \vec{F} = 0$. Θεωρώντας θετική τη φορά προς τα κάτω έχουμε:

$$w_\Sigma + T_v = F_{ελ} \Rightarrow T_v = k \cdot \Delta l - mg \Rightarrow T_v = 30 \text{ N}$$



Ο δακτύλιος ισορροπεί, άρα $\Sigma \tau_{(O)} = 0$. Το βάρος $\vec{w}$ του δακτυλίου και η κάθετη δύναμη $\vec{N}$ δεν έχουν ροπή ως προς το (Ο) γιατί οι φορείς τους περνούν από αυτό, επομένως:

$$\begin{aligned}\tau_{T_v} + \tau_{T_{\sigma\tau}} &= 0 \Rightarrow \\ T_v \cdot d - T_{\sigma\tau} \cdot R &= 0 \Rightarrow \\ T_{\sigma\tau} &= T_v \cdot \frac{d}{R} \Rightarrow \\ T_{\sigma\tau} &= 15 \text{ N}\end{aligned}$$

Δ2. Μετά την κοπή του νήματος το σώμα (Σ) εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με $D = k$. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ που κόβεται το νήμα, το σώμα (Σ) έχει μηδενική ταχύτητα, επομένως βρίσκεται στη θετική ακραία θέση της ταλάντωσής του. Το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος είναι ίσο με την επιμήκυνση του ελατηρίου στη θέση αυτή, μείον την επιμήκυνση που έχει το ελατήριο στη θέση ισορροπίας του σώματος μετά την κοπή του νήματος.

$$A = \left(\Delta \ell - \frac{mg}{k} \right) = (0,1 - 0,025) \text{ m} = 0,075 \text{ m}$$

$$k = m \cdot \omega^2 \Rightarrow \omega = 20 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Η εξίσωση της απομάκρυνσης για την ταλάντωση του σώματος δίνεται από τη σχέση:

$$x = A \cdot \eta \mu(\omega t + \phi_0), \quad 0 \leq \phi_0 < 2\pi \text{ rad}$$

Για $t_0 = 0$:

$$x = +A \Rightarrow A \cdot \eta \mu \phi_0 = A \Rightarrow$$

$$\eta \mu \phi_0 = 1 \Rightarrow \phi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω:

$$x = 0,075 \cdot \eta \mu \left(20t + \frac{\pi}{2} \right) (\text{SI})$$

Η εξίσωση της επιτάχυνσης για την ταλάντωση του σώματος δίνεται από τη σχέση:

$$a = -\omega^2 \cdot A \cdot \eta \mu(\omega t + \phi_0) \Rightarrow$$

$$a = -30 \cdot \eta \mu \left(20t + \frac{\pi}{2} \right) (\text{SI})$$

Δ3. Η κύλιση του δακτυλίου κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου είναι σύνθετη. Η γωνιακή επιτάχυνση του δακτυλίου είναι σταθερή επομένως η στροφική του κίνηση είναι ομαλά επιταχυνόμενη. Σύμφωνα με τη σχέση που συνδέει το μέτρο της μεταφορικής με το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης, $\alpha_{\text{cm}} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R$, η μεταφορική κίνηση του δακτυλίου είναι ομαλά επιταχυνόμενη με: $\alpha_{\text{cm}} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Έστω t_1 η χρονική στιγμή κατά την οποία ο δακτύλιος φτάνει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου.

$$S_1 = \frac{1}{2} \alpha_{\text{cm}} \cdot t_1^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2S_1}{\alpha_{\text{cm}}}} \Rightarrow t_1 = 2 \text{ s}$$

$$\text{Όμως } v_1 = \alpha_{\text{cm}} \cdot t_1 \Rightarrow v_1 = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{Επίσης } v_1 = \omega_1 \cdot R \Rightarrow \omega_1 = \frac{v_1}{R} \Rightarrow \omega_1 = 40 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Δ4. Η κύλιση του δακτυλίου στο λείο οριζόντιο επίπεδο είναι σύνθετη. Η μεταφορική του κίνηση είναι ομαλή, εφόσον ο δακτύλιος δε δέχεται καμία δύναμη στην οριζόντια διεύθυνση, με μεταφορική ταχύτητα $v_1 = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Επί-

σης, η στροφική του κίνηση στο λείο οριζόντιο επίπεδο είναι ομαλή, εφόσον δεν υπάρχει καμία ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής του, με γωνιακή ταχύτητα $\omega_1 = 40 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

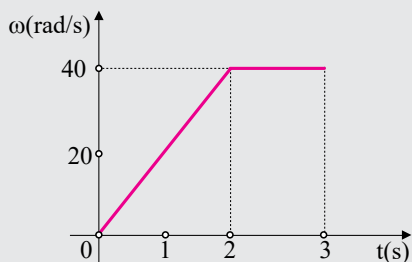
Έστω t_2 η χρονική στιγμή κατά την οποία ο δακτύλιος περνά από το σημείο Ε.

$$S_2 = v_1 \cdot (t_2 - t_1) \Rightarrow t_2 = \frac{S_2}{v_1} + t_1 \Rightarrow t_2 = 3 \text{ s}$$

Επομένως, η γωνιακή ταχύτητα ως προς τον χρόνο δίνεται από την συνάρτηση:

$$\omega = \begin{cases} \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot t \Rightarrow \omega = 20t, & 0 \leq t \leq 2 \text{ s} \\ 40, & 2 \text{ s} \leq t \leq 3 \text{ s} \end{cases} (\text{SI})$$

Σχεδιάζουμε την αντίστοιχη γραφική παράσταση:



Το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης γωνιακής ταχύτητας – χρόνου και του άξονα των χρόνων είναι ίσο με την αντίστοιχη γωνία στροφής, επομένως:

$$\Delta\theta = \frac{3+1}{2} \cdot 40\text{rad} \Rightarrow \Delta\theta = 80\text{rad}$$

Αν N είναι ο αριθμός των περιστροφών του δακτυλίου από $t_0 = 0$ έως $t_2 = 3\text{s}$, τότε:

$$N = \frac{\Delta\theta}{2\pi} \Rightarrow N = \frac{40}{\pi} \text{ περιστροφές}$$

21ο Διαγώνισμα (Δ21)

ΘΕΜΑ Α

A1. α), A2. δ), A3. γ), A4. α)
A5. α) Λ, β) Σ, γ) Λ, δ) Σ, ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

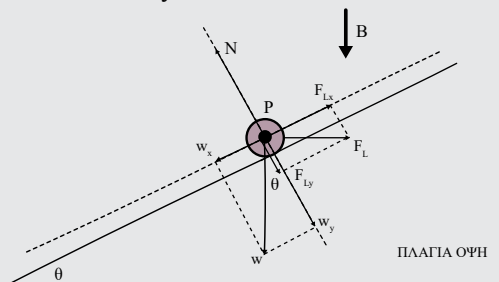
B1. Σωστή απάντηση είναι η α).

Δικαιολόγηση

Σχεδιάζουμε την πλάγια όψη του κεκλιμένου επιπέδου, καθώς και τις δυνάμεις που ασκούνται στον πρισματικό αγωγό P : το βάρος του $\vec{w}$, την ηλεκτρομαγνητική δύναμη $\vec{F}_L$, και την δύναμη $\vec{N}$ από το λείο κεκλιμένο επίπεδο.

Η φορά του ηλεκτρικού ρεύματος έχει σημειωθεί με φορά από την σελίδα προς τα έξω. Επίσης έχουμε σημειώσει με θ τις γωνίες που είναι ίσες μεταξύ τους.

Θεωρούμε ορθογώνιο σύστημα αναφοράς με τον ένα άξονα (έστω $x'x$) παράλληλο προς το κεκλιμένο επίπεδο και αναλύουμε τις δυνάμεις σε συνιστώσες:



Γράφουμε τη συνθήκη ισορροπίας για τον κάθε άξονα χωριστά:

$$\Sigma F_x = 0 \text{ και } \Sigma F_y = 0$$

Μας αρκούν οι υπολογισμοί μόνο για τον ένα άξονα. Έτσι:

$$\begin{aligned} \Sigma F_x = 0 &\Rightarrow F_{Lx} = w_x \Rightarrow \\ F_L \sin\theta &= w \sin\theta \Rightarrow BIl = mg \Rightarrow \\ B \frac{E}{R} l &= mg \Rightarrow m = \frac{BEl}{gR} \end{aligned}$$

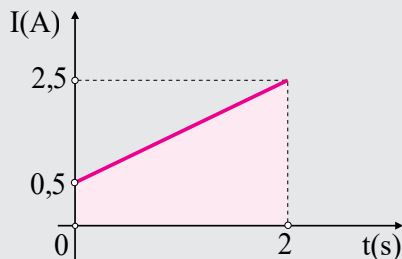
B2. Σωστή απάντηση είναι η β).

Δικαιολόγηση

Εφαρμόζοντας το νόμο του Ohm στο κυκλώμα στο πλαίσιο έχουμε:

$$I = \frac{E\pi}{R} = \frac{10t+5}{10} \Rightarrow I = t + 0,5 (\text{S.I.})$$

Σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση $I-t$, οπότε για το χρονικό διάστημα από $t=0$ μέχρι $t=2\text{s}$ το ηλεκτρικό φορτίο q που διέρχεται από μια τομή του σύρματος του πλαισίου είναι ίσο με το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου τραπεζίου στο διάγραμμα του σχήματος.



$$\Delta\eta\lambda\alpha\delta\acute{\eta} \ q = \frac{(0,5 + 2,5) \cdot 2}{2} = 3C$$

B3. Σωστή απάντηση είναι η α).

Δικαιολόγηση

Επειδή η ομογενής ράβδος ισορροπεί, η συνισταμένη των ροπών των δυνάμεων που της ασκούνται, ως προς το σημείο στήριξης, είναι μηδενική. Έτσι, με θετική φορά στροφικής κίνησης της ομογενούς ράβδου ως προς το σημείο Α τη φορά της κίνησης των δεικτών του ρολογιού, ισχύει:

$$\sum \bar{\tau}_{CM} = 0$$

$$m_2 \cdot g \cdot d_2 - m_1 \cdot g \cdot d_1 = 0 \Rightarrow$$

$$m_2 \cdot d_2 = m_1 \cdot d_1 \Rightarrow$$

$$N_2 \cdot m \cdot d_2 = N_1 \cdot m \cdot d_1 \Rightarrow$$

$$N_2 \cdot d_2 = N_1 \cdot d_1.$$

Η τελευταία σχέση ικανοποιείται στην 1^η και 4^η μέτρηση.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Τα σημεία τα οποία βρίσκονται σε θέση:

$$x = (2n + 1) \frac{\lambda}{4}$$

είναι οι δεσμοί του στάσιμου κύματος και έχουν μηδενικό πλάτος ταλάντωσης δηλαδή παραμένουν συνεχώς ακίνητα.

Γνωρίζουμε ότι το σημείο Γ στη θέση $x = L$ είναι δεσμός και το σημείο Β στη θέση $x = 0$ είναι κοιλία. Αν το Γ είναι ο αμέσως επόμενος δεσμός μετά από την κοιλία Β, τότε θα ισχύει:

$$L = \frac{\lambda}{4}$$

Ενδέχεται όμως το Γ να είναι ο μεθεπόμενος δεσμός μετά από την κοιλία Β. Οπότε:

$$L = \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{2} = 3 \frac{\lambda}{4}$$

Αν μεταξύ των Γ και Α μεσολαβούν δύο δεσμοί, ισχύει:

$$L = \frac{\lambda}{4} + 2 \frac{\lambda}{2} = 5 \frac{\lambda}{4}$$

Γενικεύοντας μπορούμε να γράψουμε:

$$L = \frac{\lambda}{4} + n \frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{4} + 2n \frac{\lambda}{4} = (2n + 1) \frac{\lambda}{4}, n \geq 0$$

Γνωρίζουμε ότι η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων που, συμβάλλοντας, δίνουν το στάσιμο κύμα είναι:

$$v = \lambda \cdot f$$

Εάν συνδυάσουμε τις παραπάνω σχέσεις θα έχουμε:

$$L = (2n + 1) \frac{v}{4f} \Rightarrow$$

$$f = (2n + 1) \frac{v}{4L} \Rightarrow f = (2n + 1) f_1$$

$$\text{με } f_1 = \frac{v}{4L}$$

Γ2. Η μικρότερη συχνότητα αντιστοιχεί στην τιμή $f_1 = \frac{v}{4L}$ η οποία προκύπτει από την εξίσωση:

$$f = (2n + 1) \frac{v}{4L} \text{ για } n = 0.$$

Θέτοντας $n = 0$ στην $L = (2n + 1) \frac{\lambda}{4}$ έχουμε:

$$L = \frac{\lambda_1}{4} \Rightarrow \lambda_1 = 7 \text{ m}$$

Αυτό σημαίνει ότι θα παρατηρήσουμε μόνο στο ελεύθερο άκρο της χορδής να δημιουργείται κοιλία και στο ακλόνητο ένας και μόνο δεσμός.

Γ3. Γνωρίζουμε ότι η ταχύτητα διάδοσης ενός κύματος είναι:

$$v = \lambda_1 \cdot f_1 \Rightarrow v = 350 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Γ4. Η εξίσωση της απομάκρυνσης ενός στάσιμου κύματος είναι:

$$y = 2A \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \eta \mu \frac{2\pi}{T} t$$

Η μέγιστη απομάκρυνση του σημείου της χορδής που βρίσκεται στη θέση $x = \frac{\lambda}{8}$ είναι $2\sqrt{2}10^{-2}\text{ m}$ οπότε:

$$2A\sigma\omega 2\pi \frac{\lambda}{8} = 2\sqrt{2}10^{-2}\text{ m} \Rightarrow$$

$$A\sigma\omega \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}10^{-2}\text{ m} \Rightarrow A \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}10^{-2}\text{ m}$$

$$\Rightarrow A = 2 \cdot 10^{-2}\text{ m}$$

Άρα η εξίσωση του στάσιμου κύματος είναι:

$$y = 2A\sigma\omega 2\pi \frac{x}{\lambda_7} \eta\mu \frac{2\pi}{T} t \text{ με}$$

$$\lambda_7 = \frac{v}{f_7} = \frac{350}{350}\text{ m} = 1\text{ m} \text{ και } T = \frac{1}{f_7} = \frac{1}{350}\text{ s}$$

θα είναι:

$$y = 2 \cdot 2 \cdot 10^{-2} \sigma\omega 2\pi \frac{x}{1} \eta\mu \frac{2\pi}{T} t \Rightarrow$$

$$y = 4 \cdot 10^{-2} \sigma\omega 2\pi x \cdot \eta\mu 700\pi t \text{ (S.I.)}$$

ΘΕΜΑ Δ

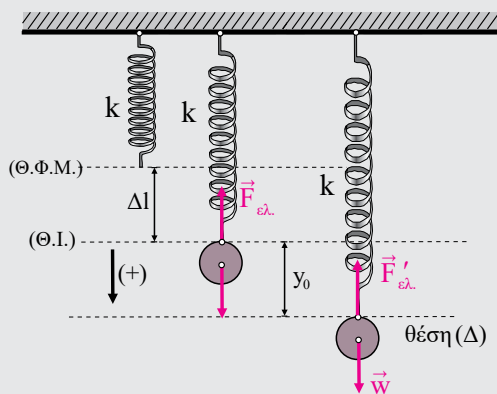
Δ1. Καθώς το σύστημα αρχικά ισορροπεί (Θ.Ι.), το ελατήριο έχει επιμηκυνθεί κατά Δl σε σχέση με το φυσικό του μήκος, η σφαίρα δέχεται το βάρος της και τη δύναμη του ελατηρίου και ισχύει:

$$\Sigma F_{\Theta.I.} = 0 \Rightarrow m \cdot g = k \cdot \Delta l \quad (1)$$

Κατεβάζουμε αργά και κατακόρυφα προς τα κάτω τη σφαίρα κατά $y_0 = 0,2\text{ m}$ από τη θέση ισορροπίας της και από τη θέση αυτή την αφήνουμε ελεύθερη τη στιγμή $t_0 = 0$.

Τη στιγμή ακριβώς που η σφαίρα αφήνεται ελεύθερη να κινηθεί ισχύει:

$$(\Sigma F_{\Delta}) = m \cdot g - k \cdot (\Delta l + y_0) \quad (2)$$



Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (1) και (2), προκύπτει:

$$(\Sigma F_{\Delta}) = -k \cdot y_0 \quad (3)$$

Αυτή όμως είναι η ικανή και αναγκαία συνθήκη της απλής αρμονικής ταλάντωσης. Άρα η σφαίρα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση από τη στιγμή που την αφήσαμε ελεύθερη και εφόσον μπορούμε να αγνοήσουμε τις αντιστάσεις του αέρα πάνω της.

Η σταθερά επαναφοράς της απλής αρμονικής ταλάντωσης είναι η σταθερά του ελατηρίου, όπως προκύπτει από σχέση (3), οπότε η περίοδος της ταλάντωσης είναι:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow T = 0,2 \cdot \pi\text{ s}$$

Επειδή τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ αφήσαμε τη σφαίρα ελεύθερη να κινηθεί χωρίς αρχική ταχύτητα, η θέση αυτή αποτελεί ακραία θέση ταλάντωσης, οπότε το πλάτος A της ταλάντωσης είναι:

$$A = y_0 = 0,2\text{ m}$$

Η ενέργεια ταλάντωσης είναι:

$$E_{\tau\alpha\lambda} = \frac{1}{2} k A^2 \Rightarrow E_{\tau\alpha\lambda} = 0,4 \text{ J}$$

Δ2. Εφαρμόζουμε την εξίσωση της εκθετικής μείωσης του πλάτους για το χρονικό διάστημα από τη στιγμή $t_0 = 0$ που αφήσαμε τη σφαίρα ελεύθερη να κινηθεί, μέχρι τη στιγμή $t = 14\text{ s}$,

κατά την οποία το πλάτος έγινε ίσο με το μισό του αρχικού:

$$\frac{A_0}{2} = A_0 \cdot e^{-\Lambda \cdot t} \Rightarrow e^{-\Lambda \cdot t} = \frac{1}{2} \Rightarrow \Lambda = \frac{\ln 2}{t} \equiv \left(\frac{0,7}{14} \right) s^{-1} = 0,05 s^{-1}$$

Έτσι προκύπτει:

$$\frac{b}{2 \cdot m} = 0,05 s^{-1} \Rightarrow b = 0,02 kg \cdot s^{-1}$$

Δ3. Αν μπορούσαμε να θεωρήσουμε κβαντικό τον ταλαντωτή, τότε το κβάντο ενέργειας, δηλαδή η διαφορά ενέργειας δύο διαδοχικών επιτρεπόμενων καταστάσεων για αυτόν, θα ήταν:

$$E_{\kappa\beta.} = h \cdot f = \frac{h}{T} \Rightarrow E_{\kappa\beta.} = 10^{-33} J$$

Δ4. Στο χρονικό διάστημα από τη στιγμή $t_0 = 0$ που αφήσαμε τη σφαίρα ελεύθερη να κινηθεί, μέχρι τη στιγμή $t = 14s$, κατά την οποία το πλάτος έγινε ίσο με το μισό του αρχικού, ο ταλαντωτής έχει χάσει ενέργεια:

$$\Delta E = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A_0^2 - \frac{1}{2} \cdot k \cdot \left(\frac{A_0}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot k \cdot \left(A_0^2 - \frac{A_0^2}{4} \right) = \frac{3 \cdot k}{8} \cdot A_0^2 \Rightarrow \Delta E = 0,3 J$$

Το πλήθος των κβάντων ενέργειας που θα είχαν αποβληθεί, για αυτή την απώλεια ενέργειας, αν θεωρούσαμε τον ταλαντωτή κβαντικό, προκύπτει:

$$\Delta E = n \cdot E_{\kappa\beta.},$$

$$\text{άρα } n = \frac{\Delta E}{E_{\kappa\beta.}} \Rightarrow n = 3 \cdot 10^{32} \text{ κβάντα}$$

Προφανώς, πρόκειται για ένα τεράστιο πλήθος κβάντων, σε μια τόσο μικρή διαφορά ενέργειας. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να θεωρήσουμε συνεχή την απώλεια ενέργεια του συστήματος και όχι κβαντισμένη. Δεν μπορεί να εφαρμοστεί η κβαντική θεωρία στον μακρόκοσμο.

22ο Διαγώνισμα (Δ22)

ΘΕΜΑ Α

A1. β), A2. δ), A3. α), A4. α)
A5. α) Σ, β) Λ, γ) Λ, δ) Λ, ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

B1. Σωστή απάντηση είναι η α).

Δικαιολόγηση

Εφόσον το στάσιμο κύμα – κυματοσυνάρτηση έχει δεσμούς στα δύο άκρα του, θα έχει το μέγιστο δυνατό μήκος κύματος όταν $\lambda = 2L = 2 \cdot 10^{-10} m$, όπου L η διάμετρος του πυρήνα.

Η ορμή δίνεται από τον τύπο του deBroglie :

$$\lambda = \frac{h}{p} \Leftrightarrow p = \frac{h}{\lambda} = \frac{6,6 \cdot 10^{-34} J \cdot s}{2 \cdot 10^{-10} m} = 3,3 \cdot 10^{-24} kg \cdot \frac{m}{s}$$

Εφόσον $\Psi \neq 0$ για όλο το εύρος από $x = 0$ έως $x = L$, το πρωτόνιο μπορεί να βρίσκεται οπουδήποτε μέσα σε αυτό το εύρος θέσεων, άρα η αβεβαιότητα στη θέση είναι $\Delta x = L = 10^{-10} m$. (Θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε πως η αβεβαιότητα θέσης είναι το μισό του L , αλλά αυτό δεν αλλάζει την τάξη μεγέθους του αποτελέσματος).

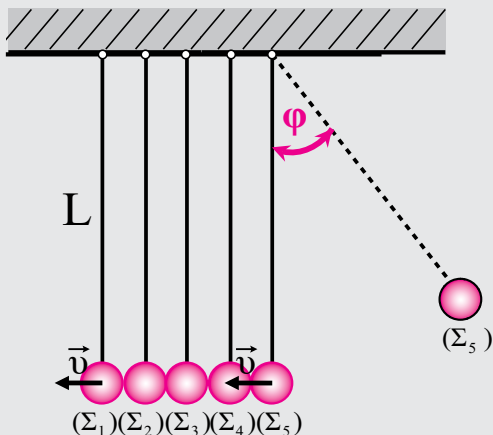
Για την αβεβαιότητα της ορμής:

$$\begin{aligned} \Delta p \cdot \Delta x &\geq h \Leftrightarrow \Delta p \geq \frac{h}{\Delta x} \\ &= \frac{6,6 \cdot 10^{-34}}{2\pi \cdot 10^{-10}} kg \cdot m / s = \\ &= \frac{6,6}{6,28} \cdot 10^{-24} kgm / s \equiv \\ &\equiv 1,1 \cdot 10^{-24} kg \cdot \frac{m}{s} \end{aligned}$$

B2. Σωστή απάντηση είναι η γ).**Δικαιολόγηση**

Ακριβώς πριν την κρούση η σφαίρα 5 θα έχει αποκτήσει οριζόντια ταχύτητα $\bar{u}$ με φορά προς τα αριστερά. Αφού οι σφαίρες έχουν ίσες μάζες, κατά την κρούση ανταλλάσσουν ταχύτητες, οπότε η 5 ακινητοποιείται και η 4 αρχίζει να κινείται προς τα αριστερά με ταχύτητα $\bar{u}$. Η επόμενη κρούση ακινητοποιεί την 4 και μεταβιβάζει την ταχύτητα στην 3. Το ίδιο συμβαίνει στις διαδοχικές κρούσεις μεταξύ των 3 με 2 και 2 με 1.

Δηλαδή έχουμε σειρά διαδοχικών, κεντρικών κι ελαστικών κρούσεων κάθε σφαίρας με εκείνη που βρίσκεται στα αριστερά της, με αποτέλεσμα να μεταβιβάζεται ολόκληρη η ενέργεια και η ορμή της και η ίδια να μένει ακίνητη. Η σφαίρα 1 αρχίζει να κινείται με ταχύτητα $\bar{u}$ και ανέρχεται στο ίδιο ύψος με εκείνο από το οποίο έπεσε η πρώτη σφαίρα.

**B3. Σωστή απάντηση είναι η β).****Δικαιολόγηση**

Αν συγκρίνουμε τις τιμές που προκύπτουν από τα ζεύγη τιμών (T, λ) της πειραματικής καμπύλης, όπου T είναι η ένδειξη της κλίμακας του φασματοσκοπίου και λ το μήκος κύματος, με τις τιμές του πίνακα με τα γνωστά μήκη κύματος του ορατού φάσματος συμπεραίνουμε ότι:

Το πειραματικό σημείο Α αντιστοιχεί στο ερυθρό χρώμα, το Γ στο κίτρινο το Ε στο πράσινο και τα Η, Θ στο ιώδες.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Με χρήση της αρχής διατήρησης της ορμής (ΑΔΟ) κατά τη διάρκεια της κρούσης βρίσκουμε την ταχύτητα του συσσωματώματος V_σ :

$$\vec{p}_{\text{αρχ}} = \vec{p}_{\text{τελ}} \Rightarrow m v_o = (M + m) V_\sigma \Rightarrow$$

$$V_\sigma = \frac{m v_o}{M + m} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ακριβώς μετά την κρούση, το συσσωμάτωμα βρίσκεται στη θέση που το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος, συνεπώς βρίσκεται στη θέση ισορροπίας (Θ.Ι.) της ταλάντωσης που θα εκτελέσει. Συνεπώς έχει τη μέγιστη ταχύτητα, δηλαδή, $V_\sigma = v_{\text{max}} = A\omega \Rightarrow A = \frac{V_\sigma}{\omega}$ (1)

όπου ω , η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης του συσσωματώματος, που δίνεται από τη σχέση:

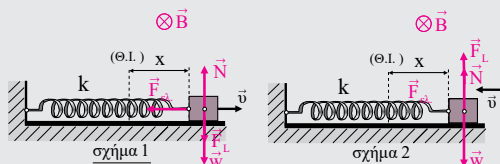
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M + m}} = 20 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Αρα από τη σχέση (1) βρίσκουμε το πλάτος της απλής αρμονικής ταλάντωσης που θα εκτελέσει το συσσωμάτωμα:

$$A = 0,25 \text{ m}$$

Το διάστημα s , που θα διανύσει το συσσωμάτωμα στο χρονικό διάστημα μιας περιόδου T της απλής αρμονικής ταλάντωσης που θα εκτελέσει είναι:

$$s = 4A \Rightarrow s = 1 \text{ m}$$

Γ2.

Όταν το σώμα μάζας M' είναι ακίνητο (τόσο πριν από την έναρξη της ταλάντωσης, όσο και στιγμιαία, στις ακραίες θέσεις αυτής), δε δέχεται δύναμη Lorentz από το μαγνητικό πεδίο. Στα παραπάνω σχήματα, φαίνεται το σώμα μάζας M' σε μια τυχαία θέση με απομάκρυνση x από τη θέση ισορροπίας του (που ταυτίζεται με τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου) και οι αντίστοιχες ασκούμενες δυνάμεις σε αυτό όταν κινείται προς τα δεξιά (Σχήμα 1) και όταν κινείται προς τα αριστερά (Σχήμα 2). Η διεύθυνση της δύναμης Lorentz F_L , είναι κατακόρυφη και η φορά της καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού, $w = M'g$, το βάρος του σώματος και N , η κάθετη αντίδραση από το έδαφος. Από τα παραπάνω σχήματα, φαίνεται ότι το σώμα μάζας M' μπορεί να χάσει την επαφή του με το έδαφος μόνο όταν κινείται προς τα αριστερά, όπου η δύναμη Lorentz έχει τότε φορά προς τα πάνω (Σχήμα 2). Το μέτρο της δύναμης Lorentz (εφόσον $\vec{v} \perp \vec{B}$), υπολογίζεται από τη σχέση:

$$F_L = B|q|v(2)$$

Επομένως, για να εκτελεί με ασφάλεια απλή αρμονική ταλάντωση (ΑΑΤ) το σώμα μάζας M' , αρκεί να μπορεί να διέρχεται από τη Θ.Ι. με φορά προς τα αριστερά, όπου το μέτρο της ταχύτητας (άρα και της δύναμης από το μαγνητικό πεδίο) μεγιστοποιείται. Στον κατακόρυφο άξονα yy' έχουμε:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N + F_L - W = 0 \Rightarrow$$

$$N = M'g - B|q|v(3)$$

Η κάθετη αντίδραση N , από το έδαφος όταν το σώμα βρίσκεται σε επαφή με αυτό είναι:

$$N \geq 0 \Rightarrow B|q|v \leq M'g \Rightarrow B|q|v_{\max} = M'g \Rightarrow$$

$$B|q|\omega' A_{\max} = M'g \Rightarrow A_{\max} = \frac{M'g}{B|q|\omega'}(4)$$

όπου ω' , η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης του σώματος μάζας M' , που δίνεται από τη σχέση:

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{M'}} = 40 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Άρα, από τη σχέση (4) βρίσκουμε:

$$A_{\max} = \frac{1}{8} \text{m} = 0,125 \text{m}.$$

Συνεπώς, η μέγιστη απομάκρυνση $d_{\max}$, που μπορούμε να δώσουμε στο σώμα μάζας M' , έτσι ώστε αυτό να μην χάνει κατά την κίνησή του την επαφή του με το έδαφος είναι:

$$d_{\max} = A_{\max} \Rightarrow d_{\max} = 0,125 \text{m}$$

Γ3. Όταν αφήσουμε ελεύθερο το σώμα μάζας M' , θα εκτελέσει ΑΑΤ πάνω στο λείο οριζόντιο επίπεδο με πλάτος $A = d = 0,1 \text{m} < d_{\max}$, που σημαίνει ότι το σώμα δε θα χάνει σε καμία χρονική στιγμή την επαφή του με το έδαφος. Εφαρμόζοντας αρχή διατήρησης ενέργειας στην ταλάντωση (ΑΔΕΤ) οπότε έχουμε:

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} M' v^2 + \frac{1}{2} k x^2 \Rightarrow$$

$$v = \pm \sqrt{\frac{k(A^2 - x^2)}{M'}} \Rightarrow v = -2\sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Δεχόμαστε την αρνητική τιμή στην τιμή της ταχύτητας, εφόσον η θετική φορά είναι προς τα δεξιά και το σώμα μάζας M' κατευθύνεται προς τα αριστερά όταν διέρχεται για πρώτη φορά από τη θέση $x = +0,05 \text{m}$.

Σύμφωνα με τη σχέση (2) βρίσκουμε ότι η δύναμη Lorentz που ασκείται στο σώμα μάζας M' έχει μέτρο $F_L = 0,2\sqrt{3} \text{N}$ και φορά προς τα πάνω, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η αντίσταση του τετραγωνικού πλαισίου θα είναι:

$$R = 4\alpha R^* \Rightarrow R = 80 \Omega$$

Η μεταβαλλόμενη μαγνητική ροή του διαγράμματος αντιστοιχεί σε τέσσερα χρονικά διαστήματα:

Για $\Delta t_1 = 0 - 5\text{s}$ η μαγνητική ροή αυξάνεται γραμμικά από $\Phi_1 = 0$ σε $\Phi_2 = 24\text{Wb}$

Για $\Delta t_2 = 5 - 7\text{s}$ η μαγνητική ροή μειώνεται γραμμικά από $\Phi_3 = 24\text{Wb}$ σε $\Phi_4 = 0$

Για $\Delta t_3 = 7 - 8\text{s}$ η μαγνητική ροή αυξάνεται γραμμικά (με τις δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου να έχουν αλλάξει φορά) από $\Phi_5 = 0$ σε $\Phi_6 = -12\text{Wb}$

Για $t_4 \geq 8\text{s}$ η μαγνητική ροή παραμένει σταθερή $\Phi_7 = -12\text{Wb}$.

Η επαγωγική τάση που αναπτύσσεται και η ισχύς που καταναλώνεται στο πλαίσιο σε αυτά τα χρονικά διαστήματα, συνοψίζεται παρακάτω:

$$\text{Για } \Delta t_1 \quad \varepsilon_{\varepsilon\pi 1} = -\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\Delta t_1} = -4,8\text{V}$$

$$I_{\varepsilon\pi 1} = \frac{\varepsilon_{\varepsilon\pi 1}}{R} = -0,06\text{A}$$

$$P_1 = I_{\varepsilon\pi 1}^2 R = 0,288\text{W}$$

$$\text{Για } \Delta t_2 \quad \varepsilon_{\varepsilon\pi 2} = -\frac{\Phi_4 - \Phi_3}{\Delta t_2} = 12\text{V}$$

$$I_{\varepsilon\pi 2} = \frac{\varepsilon_{\varepsilon\pi 2}}{R} = 0,15\text{A}$$

$$P_2 = I_{\varepsilon\pi 2}^2 R = 1,8\text{W}$$

$$\text{Για } \Delta t_3 \quad \varepsilon_{\varepsilon\pi 3} = -\frac{\Phi_6 - \Phi_5}{\Delta t_3} = 12\text{V}$$

$$I_{\varepsilon\pi 3} = \frac{\varepsilon_{\varepsilon\pi 3}}{R} = 0,15\text{A}$$

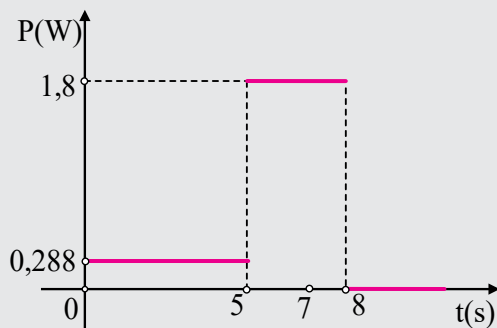
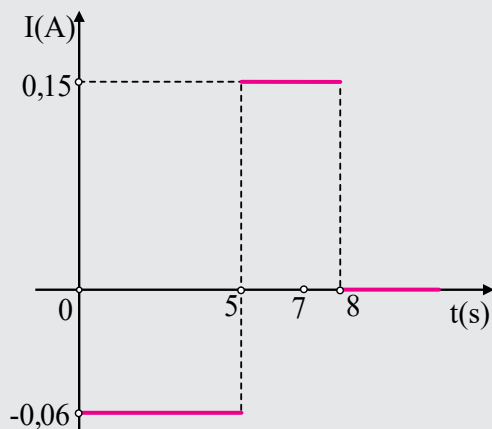
$$P_3 = I_{\varepsilon\pi 3}^2 R = 1,8\text{W}$$

$$\text{Για } t_4 \geq 8\text{s} \quad \varepsilon_{\varepsilon\pi 4} = 0$$

$$I_{\varepsilon\pi 4} = 0$$

$$P_4 = 0$$

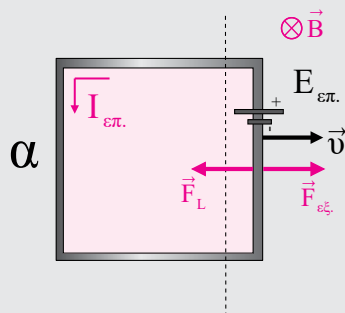
Τα ζητούμενα διαγράμματα θα είναι:



ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Τόσο ο προηγούμενος πίνακας, όσο και τα διαγράμματα, υποδηλώνουν ότι θα μπορούσαμε να μελετήσουμε τη συμπεριφορά του πλαισίου στο χρονικό διάστημα $\Delta t_2 + \Delta t_3$ κατά τρόπο ενιαίο.

Δ2. Ο χρόνος εισόδου του πλαισίου στο μαγνητικό πεδίο με σταθερή ταχύτητα είναι:

$$v = \frac{x}{t} \Rightarrow t = \frac{\alpha}{v} \Rightarrow t = 10^{-2}\text{s}$$



Καθώς εισέρχεται το πλαίσιο στο μαγνητικό πεδίο, μεταβάλλεται η μαγνητική ροή που περνά από αυτό, αναπτύσσεται επαγωγική τάση και διαρρέεται από επαγωγικό ρεύμα. Αυτό δημιουργεί δύναμη Laplace, όπως φαίνεται στο σχήμα. (Δύναμη Lorentz δέχονται και τα ηλεκτρόνια στα τμήματα των πλευρών του πλαισίου που είναι παράλληλα στην ταχύτητα. Έχει όμως φορά προς τα τοιχώματα, οπότε η τάση από επαγωγή αναπτύσσεται εγκάρσια, συνεπώς δε συνεισφέρει στην κυκλοφορία ρεύματος και αγνοείται). Για κάθε ένα από τα παραπάνω μεγέθη, ισχύουν:

$$\varepsilon_{\varepsilon\pi} = Bv\alpha \Rightarrow \varepsilon_{\varepsilon\pi} = 2V$$

$$I_{\varepsilon\pi} = \frac{\varepsilon_{\varepsilon\pi}}{R} \Rightarrow I_{\varepsilon\pi} = 0,025A$$

$$F_L = BI_{\varepsilon\pi}\alpha = 5 \cdot 10^{-3} N$$

Για να κινείται το πλαίσιο με σταθερή ταχύτητα θα πρέπει να ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_L + \vec{F}_{\varepsilon\pi} = \vec{0}$$

$$F_L - F_{\varepsilon\pi} = 0 \Rightarrow F_{\varepsilon\pi} = 5 \cdot 10^{-3} N$$

Η φορά της $F_{\varepsilon\pi}$ φαίνεται στο σχήμα.

Δ3. Ο λαμπτήρας με ενδείξεις κανονικής λειτουργίας (100V, 50W), έχει ωμική αντίσταση:

$$R_{\Lambda} = \frac{V_{\kappa}^2}{P_{\kappa}} = 200\Omega$$

και για να λειτουργεί κανονικά, θα πρέπει να διαρρέεται από:

$$I_{\kappa} = \frac{V_{\kappa}}{R} = 0,5A$$

Με την περιστροφή του πλαισίου εντός του μαγνητικού πεδίου έντασης B_1 , αναπτύσσεται εναλλασσόμενη τάση στο κύκλωμα το οποίο διαρρέεται από εναλλασσόμενο ρεύμα ενεργού τιμής I_{ev} . Για να λειτουργεί κανονικά ο λαμπτήρας, το ρεύμα κανονικής λειτουργίας πρέπει να ισούται με την ενεργό ένταση του

εναλλασσόμενου ρεύματος. Άρα θα πρέπει να είναι:

$$I_{ev} = I_{\kappa} \Rightarrow \frac{V_{ev}}{R_{\text{ολ}}} = I_{\kappa} \Rightarrow \frac{V/\sqrt{2}}{R_{\Lambda} + R} = I_{\kappa} \Rightarrow$$

$$I_{\kappa} = \frac{V}{\sqrt{2} \cdot (R_{\Lambda} + R)} \Rightarrow V = \sqrt{2} \cdot (R_{\Lambda} + R) \cdot I_{\kappa}$$

$$\Rightarrow V = 140 \cdot \sqrt{2}V$$

όπου V το πλάτος της εναλλασσόμενης τάσης.

Για το πλάτος εναλλασσόμενης τάσης σε πλαίσιο που στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα E , ισχύει:

$$V = N \cdot \omega \cdot B_1 \cdot A \Rightarrow$$

$$140 \cdot \sqrt{2}V = 1 \cdot \omega \cdot 10 \cdot \sqrt{2}T \cdot 0,1^2 m^2 \Rightarrow$$

$$\omega = 1400 \frac{\text{rad}}{s}$$

23ο Διαγώνισμα (Δ23)

ΘΕΜΑ Α

A1. γ), A2. β), A3. β), A4. δ)
A5. α) Λ, β) Σ, γ) Λ, δ) Λ, ε) Λ

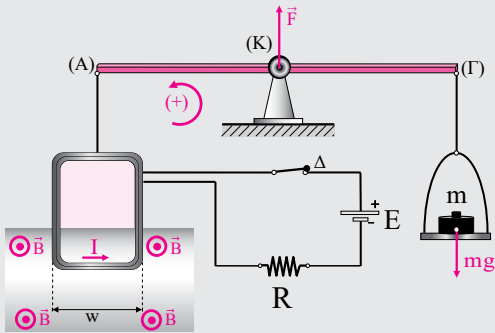
ΘΕΜΑ Β

B1. Σωστή απάντηση είναι η **α**).

Δικαιολόγηση

Όταν ο διακόπτης είναι ανοιχτός, επιτυγχάνουμε ισορροπία του βραχίονα στο σημείο (Κ). Όταν ο διακόπτης Δ κλείσει, οι επιπλέον δυνάμεις που ασκούνται στον βραχίονα και ασκούν ροπή ως προς το (Κ) είναι η δύναμη Laplace F_L και το βάρος mg που τοποθετούμε στον δίσκο στα δεξιά. Η επιπλέον δύναμη F που ασκείται στο στήριγμα, δεν ασκεί ροπή ως προς αυτό. Το ρεύμα που διαρρέει το πλαίσιο είναι:

$$I = \frac{E}{R} = 0,3A$$



Συνεπώς, αφού ο βραχίονας ισορροπεί εκ νέου, οι επιπλέον δυνάμεις που δέχεται έχουν ως προς το (Κ):

$$\Sigma \vec{\tau} = 0 \Rightarrow \vec{\tau}_L + \vec{\tau}_{mg} + \vec{\tau}_F = 0 \Rightarrow$$

$$F_L (AK) - mg (K\Gamma) + 0 = 0 \Rightarrow$$

$$F_L = mg \Rightarrow NBIw = mg \Rightarrow$$

$$B = \frac{mg}{NIw} = \frac{4}{15} T$$

B2. Σωστή απάντηση είναι η β).

Δικαιολόγηση

Από τον νόμο του Wien γνωρίζουμε ότι

$$\lambda_{\max} \cdot T = \text{σταθ.}$$

Με βάση τα δεδομένα της εκφώνησης, αυτό το σταθερό γινόμενο ισούται με

$$2900 \text{ nm} \cdot 1000^\circ \text{K} = 2,9 \cdot 10^6 \text{ nm} \cdot ^\circ \text{K}$$

Θεωρώντας ότι η ανθρώπινη θερμοκρασία κυμαίνεται από $\theta_1 = 35^\circ \text{C}$ έως $\theta_2 = 40^\circ \text{C}$, τα αντίστοιχα όρια των ανιχνευόμενων μηκών κύματος θα είναι:

$$\lambda_1 \cdot T_1 = \text{σταθ.} = 2,9 \cdot 10^6 \text{ nm} \cdot ^\circ \text{K} \Leftrightarrow$$

$$\lambda_1 = \frac{2,9 \cdot 10^6 \text{ nm} \cdot ^\circ \text{K}}{(273 + 35)^\circ \text{K}} = 9416 \text{ nm}$$

$$\lambda_2 \cdot T_2 = \text{σταθ.} = 2,9 \cdot 10^6 \text{ nm} \cdot ^\circ \text{K} \Leftrightarrow$$

$$\lambda_2 = \frac{2,9 \cdot 10^6 \text{ nm} \cdot ^\circ \text{K}}{(273 + 40)^\circ \text{K}} = 9265 \text{ nm}$$

Για τον λόγο αυτόν οι κάμερες υπερύθρου βελτιστοποιούνται για την ανίχνευση της ακτινοβολίας που εκπέμπει το ανθρώπινο σώμα στην περιοχή αυτή.

B3. Σωστή απάντηση είναι η α).

Δικαιολόγηση

Στα σημεία επαφής οι γραμμικές ταχύτητες των δίσκων έχουν το ίδιο μέτρο αφού δεν έχουμε ολίσθηση του ενός ως προς τον άλλο. Για τους δίσκους Α και Β στο κοινό σημείο επαφής οι γραμμικές ταχύτητες έχουν το ίδιο μέτρο. Δηλαδή:

$$v_B = v_A \Rightarrow \omega_B R_B = \omega_{\text{εισ}} R_A$$

Οι δίσκοι C και B περιστρέφονται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα:

$$\omega_C = \omega_B$$

Επίσης για τους δίσκους C και D στο κοινό σημείο επαφής τους οι γραμμικές ταχύτητες έχουν το ίδιο μέτρο. Δηλαδή:

$$v_C = v_D \Rightarrow \omega_C R_C = \omega_{\text{εξοδ}} R_D$$

$$\text{Έτσι: } \omega_{\text{εξοδ}} = \omega_C \frac{R_C}{R_D} \quad \text{ή} \quad \omega_{\text{εξοδ}} = \omega_B \frac{R_C}{R_D} \quad \text{ή}$$

$$\omega_{\text{εξοδ}} = \omega_{\text{εισ}} \frac{R_A}{R_B} \frac{R_C}{R_D}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η ενεργός τιμή της ΗΕΔ από επαγωγή είναι:

$$\varepsilon_{\text{ev}} = \frac{\varepsilon_{\text{max}}}{\sqrt{2}} = \frac{N\omega BA}{\sqrt{2}} = \frac{N2\pi fBA}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\varepsilon_{\text{ev}} \cong 20 \text{ V}$$

Γ2. Με βάση τα χαρακτηριστικά κανονικής λειτουργίας, οι λαμπτήρες θα λειτουργήσουν κανονικά αν η ενεργός τάση στα άκρα τους είναι 20V. Η ενεργός τάση στα άκρα του εναλλακτήρα θα είναι μικρότερη από 20V αφού θα είναι ίση με την ενεργό τιμή της πολικής τάσης του εναλλακτήρα, αλλά ο εναλλακτήρας έχει εσωτερική αντίσταση $r = 5\Omega$ και $V_{\pi, \text{ev}} = \varepsilon_{\text{ev}} - I_{\text{ev}} r < \varepsilon_{\text{ev}} = 20$. Επομένως οι λαμπτήρες δε λειτουργούν κανονικά.

Γ3. Ο μέσος ρυθμός παροχής ενέργειας για

την περιστροφή του πλαισίου στον εναλλακτήρα θα ισούται με την μέση ολική ισχύ που παρέχει ο εναλλακτήρας στο κύκλωμα (διατήρηση ενέργειας).

Από τα χαρακτηριστικά κανονικής λειτουργίας των λαμπτήρων, προκύπτει:

$$P = \frac{V^2}{R} \Rightarrow R = \frac{V^2}{P} \Rightarrow R = 10\Omega$$

Η ολική αντίσταση του κυκλώματος θα είναι:

$$R_{ολ} = \frac{R \cdot R}{R + R} + r = 10\Omega$$

Η ενεργός ένταση του ρεύματος στο κύκλωμα θα είναι:

$$I_{ev} = \frac{\varepsilon_{ev}}{R_{ολ}} \cong 2A$$

Η μέση ολική ισχύς του κυκλώματος είναι:

$$\bar{P}_{ολ} = \varepsilon_{ev} I_{ev} \Rightarrow \bar{P}_{ολ} \cong 40W$$

Γ4. Ο μέσος ρυθμός κατανάλωσης ενέργειας στους δύο λαμπτήρες θα είναι ίσος με την καταναλισκόμενη από αυτούς ισχύ:

$$\bar{P} = I_{ev}^2 R_{ολ \text{ λαμπτ}} \Rightarrow \bar{P} \cong 20W$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Τα υπόλοιπα 20W (κατά προσέγγιση) της ισχύος του εναλλακτήρα, καταναλώνονται στην δική του αντίσταση r .

ΘΕΜΑ Δ

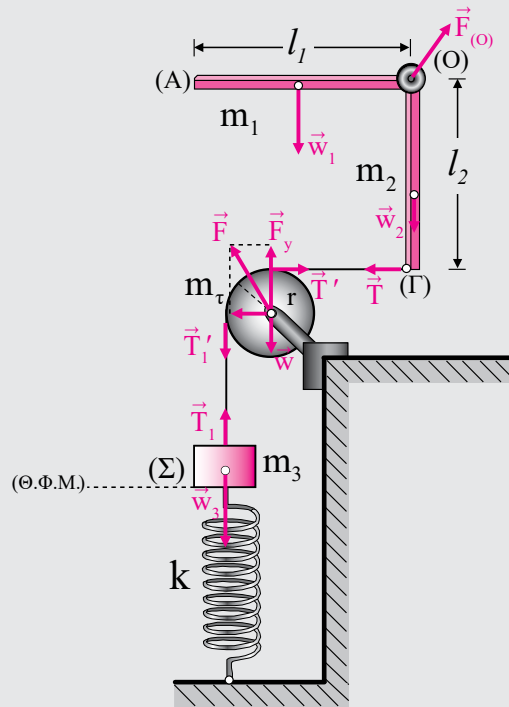
Δ1. Εφαρμόζουμε συνθήκη ισορροπίας ροπών των δυνάμεων που ασκούνται στο σύστημα των δύο ράβδων, ως προς τον άξονα στο O:

$$(\sum \tau)_O = 0,$$

$$w_1 \cdot \frac{l}{2} = T \cdot l, T = \frac{w_1}{2} = \frac{m_1 g}{2} \Rightarrow T = 30N$$

Δ2. Το τεντωμένο οριζόντιο τμήμα του αβαρού νήματος, ασκεί στα άκρα του δυνάμεις αντίθετες. Δηλαδή κατά μέτρο ισχύει:

$$T' = T = 30N$$



Εφαρμόζουμε στην τροχαλία συνθήκη ισορροπίας ροπών ως προς τον άξονα περιστροφής στο κέντρο της:

$$(\sum \tau)_{αξ} = 0, T_1' \cdot r = T \cdot r, T_1' = T = 30N$$

Αναλύουμε τη δύναμη που δέχεται η τροχαλία από τον άξονά της σε δύο συνιστώσες $\vec{F}_x, \vec{F}_y$ οριζόντια και κατακόρυφα, όπως στο σχήμα. Εφαρμόζουμε συνθήκη ισορροπίας δυνάμεων κατά άξονες:

$$\sum F_x = 0, T' - F_x = 0, F_x = T' = 30N$$

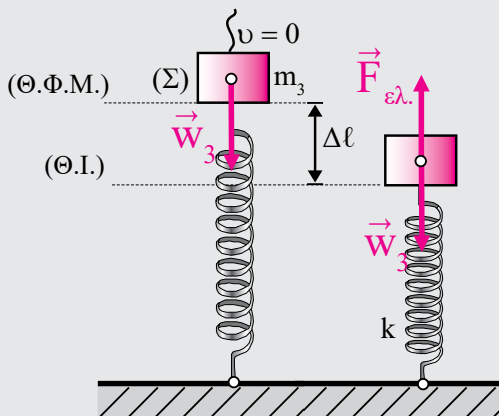
$$\sum F_y = 0, F_y - T_1' - w = 0,$$

$$F_y = T_1' + w = 40N$$

Εφαρμόζουμε το πυθαγόρειο θεώρημα για να υπολογίσουμε το μέτρο της δύναμης F που δέχεται η τροχαλία από τον άξονά της:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \Rightarrow F = 50N$$

Δ3. Το τεντωμένο κατακόρυφο τμήμα του αβαρούς νήματος, ασκεί στα άκρα του αντίθετες δυνάμεις. Δηλαδή κατά μέτρο ισχύει: $T_1 = T_1' = 30\text{ N}$



Παρατηρούμε ότι το μέτρο της τάσης του νήματος που ασκείται κατακόρυφα και προς τα πάνω στο σώμα (Σ) είναι ίσο με το μέτρο του βάρους του: $w_3 = m_3 g = 30\text{ N}$.

Άρα το σώμα (Σ) ισορροπεί αρχικά στη θέση όπου το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος. Ακόμη και αν δεν κάνουμε αυτή την παρατήρηση, θα καταλήξουμε στο ίδιο συμπέρασμα εφαρμόζοντας συνθήκη ισορροπίας για το (Σ).

Όταν κοπεί το νήμα το σώμα αρχίζει να ταλαντώνεται κατακόρυφα γύρω από τη θέση ισορροπίας του (Θ.Ι.), στην οποία το ελατήριο έχει συσπείρωση κατά Δl και ισχύει:

$$(\Sigma F)_{\Theta.I.} = 0, \quad k \cdot \Delta l = m_3 g,$$

$$\Delta l = \frac{m_3 \cdot g}{k} = \frac{30}{300} \text{ m} = 0,1 \text{ m}$$

Στην τυχαία θέση καθώς κατεβαίνει το σώμα Σ και είναι κατά x πάνω από τη θέση ισορροπίας του, ισχύει:

$$\begin{aligned} \Sigma F' &= k \cdot (\Delta l - x) - m_3 \cdot g = \\ &= k \cdot \Delta l - k \cdot x - m_3 g = -k \cdot x \end{aligned}$$

Άρα η ταλάντωση του σώματος είναι απλή αρμονική, με σταθερά επαναφοράς

$$D = k = 300 \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad \text{και περίοδο}$$

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m_3}{k}} \Rightarrow T = \frac{\pi}{5} \text{ s.}$$

Δ4. Τη στιγμή που κόπηκε το νήμα και άρχισε η απλή αρμονική ταλάντωση του σώματος, η ταχύτητά του Σ ήταν μηδέν. Άρα η αρχική του θέση ήταν ακραία θέση της ταλάντωσης που ακολουθεί, συνεπώς το πλάτος ταλάντωσης είναι ίσο με την συσπείρωση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας του σώματος:

$$A = \Delta l = 0,1 \text{ m}$$

Η μέγιστη συσπείρωση ελατηρίου θα εμφανίζεται στο κάτω άκρο της ταλάντωσης και θα είναι:

$$\Delta l_{\max} = 2A = 0,2 \text{ m},$$

με αποτέλεσμα η μέγιστη δυναμική ενέργεια ελατηρίου να είναι:

$$U_{\text{ελ}}^{\max} = \frac{1}{2} k (2 \cdot A)^2 = 2 \cdot k \cdot A^2 \Rightarrow U_{\text{ταλ}}^{\max} = 6 \text{ J}$$

Η μέγιστη δυναμική ενέργεια ταλάντωσης εμφανίζεται στις ακραίες θέσεις της και είναι:

$$U_{\text{ταλ}}^{\max} = \frac{1}{2} k \cdot A^2 \Rightarrow U_{\text{ταλ}}^{\max} = 1,5 \text{ J}$$

24ο Διαγώνισμα (Δ24)

ΘΕΜΑ Α

A1. β), A2. α), A3. δ), A4. β)
A5. α) Λ, β) Λ, γ) Σ, δ) Σ, ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

B1. Σωστή απάντηση είναι η **α).**

Δικαιολόγηση

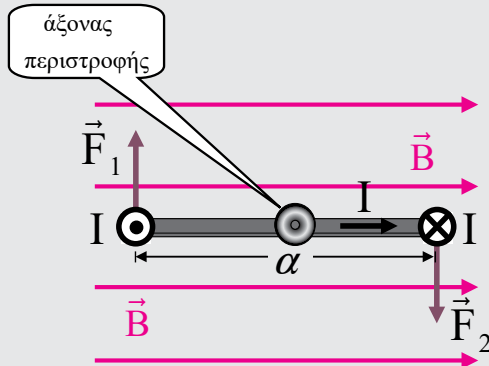
Το ρεύμα που διαρρέει το ορθογώνιο πλαίσιο του οποίου το επίπεδο είναι παράλληλο στις μαγνητικές δυναμικές γραμμές δεν ασκεί δύ-

ναμη και ροπή στα οριζόντια τμήματα του σύρματος επειδή είναι παράλληλα στο πεδίο. Το μαγνητικό πεδίο ασκεί μια δύναμη Laplace σε κάθε ένα από τα κατακόρυφα τμήματα του σύρματος όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού η κατεύθυνση της δύναμης στο ανοδικό ρεύμα στα αριστερά είναι στην αντίθετη κατεύθυνση από τη δύναμη ίσου μέτρου στο προς τα κάτω ρεύμα στα δεξιά. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η κάτοψη του πλαισίου. Κάθε μία δύναμη έχει μέτρο:

$$F_1 = F_2 = BI\alpha$$

Αυτές οι δυνάμεις αποτελούν ένα ζεύγος δυνάμεων, οι φορείς τους απέχουν απόσταση b και η ροπή που προκαλούν στο πλαίσιο τείνει να το περιστρέφει γύρω από τον κατακόρυφο άξονά του. Συνεπώς η ροπή σε μία σπείρα είναι:

$$\tau_1 = Fd = BI\alpha b$$



Η συνολική ροπή που εφαρμόζεται στο ορθογώνιο πλαίσιο N σπειρών είναι:

$$\tau = N\tau_1 = NBI\alpha b$$

Σημείωση: Η ποσότητα $NIB\alpha b$ λέγεται μαγνητική διπολική ροπή του πλαισίου και είναι διανυσματικό μέγεθος με μονάδα μέτρησης το $1\text{A} \cdot \text{m}^2$.

B2. Σωστή απάντηση είναι η γ).

Δικαιολόγηση

Από το πείραμα που εκτέλεσε ο πρώτος μαθητής και τον πίνακα τιμών που μας παρείχε προκύπτει γραμμική μεταβολή της δύναμης του βάρους των βαριδίων που χρησιμοποίησε, ανάλογη με την απόσταση. Επειδή στη θέση ισορροπίας οι δυνάμεις των βαρών των βαριδίων και οι δυνάμεις επαφής του ελατηρίου είναι αντίθετες σε κάθε μέτρηση, ο συντελεστής κλίσης της ευθείας είναι:

$$k_1 = \frac{w_1}{x_1} = \frac{50 \cdot 10^{-3} \text{kg} \cdot 10 \text{m/s}^2}{1 \cdot 10^{-2} \text{m}} = 50 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Από το διάγραμμα που μας παρείχε ο δεύτερος μαθητής, μπορούμε να υπολογίσουμε την σταθερά k_2 :

$$k_2 = \frac{F_{ελ}}{x} = \frac{7,5 \text{N}}{7,5 \cdot 10^{-2} \text{m}} = 100 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Θέτοντας σε ταλάντωση τους δύο ταλαντωτές με την ίδια μάζα m και το ίδιο πλάτος A , οι μέγιστες επιταχύνσεις που προκύπτουν έχουν λόγο:

$$\frac{\alpha_{\max_1}}{\alpha_{\max_2}} = \frac{\omega_1^2 A}{\omega_2^2 A} = \frac{\frac{k_1}{m}}{\frac{k_2}{m}} = \frac{k_1}{k_2} = \frac{50 \frac{\text{N}}{\text{m}}}{100 \frac{\text{N}}{\text{m}}} = \frac{1}{2}$$

Άρα η μέγιστη επιτάχυνση του δεύτερου ταλαντωτή είναι μεγαλύτερη και ο λόγος τους είναι:

$$\frac{\alpha_{\max_1}}{\alpha_{\max_2}} = \frac{1}{2}$$

B3. Σωστή απάντηση είναι η α).

Δικαιολόγηση

Από το διάγραμμα φαίνεται πως η κυματοσυνάρτηση έχει μη μηδενικές τιμές μεταξύ, περίπου, των θέσεων $-3,5 \cdot 10^{-10} \text{m}$ και $3,5 \cdot 10^{-10} \text{m}$. Αυτό αντιστοιχεί σε αβεβαιότητα στη θέση περίπου $\Delta x \approx 7,0 \cdot 10^{-10} \text{m}$ (θα μπορούσε κανείς να θεωρήσει αβεβαιότητα θέσης το $3,5 \cdot 10^{-10} \text{m}$, αλλά αυτό δεν αλλάζει την απάντηση).

Χρησιμοποιώντας την αρχή της αβεβαιότητας:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar \Rightarrow$$

$$(7,0 \cdot 10^{-10} \text{ m}) \cdot \Delta p \geq \frac{6,63 \times 10^{-34} \text{ Js}}{2\pi} \Rightarrow$$

$$\Delta p \geq 1,5 \cdot 10^{-25} \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Το σώμα με την πτώση του αναγκάζει το άκρο του μέσου να ταλαντωθεί και τελικά εκτοξεύεται με αρχική ταχύτητα $v_0 = 10 \text{ m/s}$ εκτελώντας κατακόρυφη βολή προς τα πάνω με σταθερή επιτάχυνση g . Έρχεται σε επαφή με το έδαφος στη θέση $x = -15 \text{ m}$, σε χρόνο:

$$x = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow$$

$$-15 \text{ m} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} t^2 \Rightarrow$$

$$t^2 - 2t - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$t_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 + 12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \text{ s} \Rightarrow$$

$$t_1 = 3 \text{ s} \text{ ή } t_2 = -1 \text{ s απορρίπτεται}$$

Άρα ο χρόνος πτώσης είναι: $t_1 = 3 \text{ s}$

Γ2. i) Εφόσον ο χρόνος για να εκτελέσει μισή περίοδο ταλάντωσης το σύστημα σώμα-ελαστικό μέσο είναι $t = \frac{1}{50} \text{ s}$, προκύπτει:

$$T = 2 \cdot \frac{1}{50} \text{ s} = \frac{1}{25} \text{ s}, \text{ και άρα η συχνότητα θα}$$

$$\text{είναι } f = \frac{1}{T} = 25 \text{ Hz}.$$

Η συχνότητα ταλάντωσης μόνο του ελαστικού μέσου, αφού εκτοξευθεί το σώμα, δίνεται διπλάσια.

$$\Delta \text{ηλαδή } f' = 50 \text{ Hz}.$$

Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι $v_\delta = 25 \text{ m/s}$, οπότε βρίσκουμε ότι το μήκος κύματος θα είναι:

$$v_\delta = \lambda \cdot f' \Rightarrow \lambda = \frac{25 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{50 \text{ s}^{-1}} = 0,5 \text{ m}$$

Η εξίσωση του κύματος θα είναι:

$$y = A \cdot \eta \mu 2\pi \left(f' t - \frac{x}{\lambda} \right) \Rightarrow$$

$$y = 0,4 \cdot \eta \mu 2\pi (50 \cdot t - 2 \cdot x) \text{ (S.I.)}$$

ii) Η αντίστοιχη εξίσωση του στιγμιότυπου την $t' = 0,2 \text{ s}$, θα είναι:

$$y = 0,4 \cdot \eta \mu 2\pi (50 \cdot 0,2 - 2 \cdot x) \Rightarrow$$

$$y = 0,4 \cdot \eta \mu 2\pi (10 - 2 \cdot x) \text{ (S.I.)}, \quad 0 \leq x \leq 5 \text{ m}$$

Γ3. Αφού το ελαστικό μέσο είναι ελεύθερο στο ένα άκρο του και ακλόνητα στερεωμένο στο άλλο, αν δημιουργηθεί στάσιμο κύμα, θα παρουσιάζει κοιλία στο ελεύθερο άκρο και δεσμό στο ακλόνητο.

Άρα για το μήκος L του μέσου έχουμε:

$$L = k \lambda_{\sigma\tau} + \frac{\lambda_{\sigma\tau}}{2} = (2k+1) \frac{\lambda_{\sigma\tau}}{2} \Rightarrow$$

$$L = (2k+1) \frac{\lambda}{4} \Rightarrow 2k+1 = \frac{4L}{\lambda} \Rightarrow$$

$$k = \frac{\frac{4L}{\lambda} - 1}{2} = 24$$

Εφόσον το k προέκυψε ακέραιος αριθμός, δημιουργούνται στάσιμα κύματα.

Το k εκφράζει τον αριθμό των ατράκτων του στάσιμου κύματος, οπότε ο αριθμός των δεσμών θα είναι:

$$N_\Delta = k + 1 \Rightarrow N_\Delta = 25$$

διότι για την πρώτη άτρακτο απαιτούνται 2 δεσμοί και από κει και πέρα, για κάθε άτρακτο απαιτείται άλλος ένας δεσμός.

Ο αριθμός των κοιλιών θα είναι ο αριθμός των ατράκτων συν την πρώτη κοιλία στο ελεύθερο άκρο:

$$N_K = k + 1 \Rightarrow N_K = 25$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για το χρονικό διάστημα $\Delta t = 0 - 2\text{s}$ η ένταση του μαγνητικού πεδίου μεταβάλλεται με σταθερό ρυθμό:

$$\frac{\Delta B}{\Delta t} = \frac{1,5\text{T} - 0}{2\text{s} - 0} = \frac{3}{4} \frac{\text{T}}{\text{s}}$$

Η επαγωγική τάση που αναπτύσσεται στο πλαίσιο είναι:

- Για το χρονικό διάστημα 0 έως 2s

$$\varepsilon_{\varepsilon\pi_1} = \frac{|\Delta\Phi|}{\Delta t} N = \frac{|\Phi_{\text{τελ}} - \Phi_{\text{αρχ}}|}{\Delta t} N = \frac{|\Delta B \cdot A|}{\Delta t} N \Rightarrow \varepsilon_{\varepsilon\pi_1} = 1,5\text{V}$$

Η ολική αντίσταση του πλαισίου είναι:

$$R_{\text{ολ}} = N \cdot R \Rightarrow R_{\text{ολ}} = 100\Omega$$

Το ρεύμα που διαρρέει το πλαίσιο είναι:

$$I_1 = \frac{\varepsilon_{\varepsilon\pi_1}}{R_{\text{ολ}}} = 0,015\text{A}$$

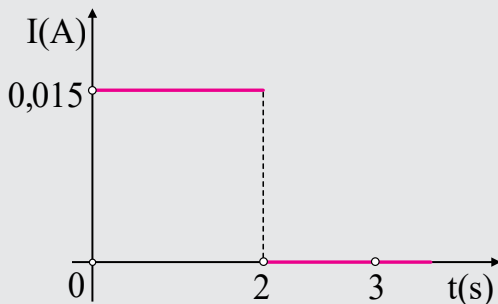
- Για το χρονικό διάστημα 2 έως 3s:

$$\varepsilon_{\varepsilon\pi_2} = \frac{|\Delta\Phi|}{\Delta t} N = \frac{|\Phi_{\text{τελ}} - \Phi_{\text{αρχ}}|}{\Delta t} N = 0$$

και

$$I_2 = \frac{\varepsilon_{\varepsilon\pi_2}}{R_{\text{ολ}}} = 0$$

Το ζητούμενο διάγραμμα:



Δ2. Η αποδιδόμενη ισχύς την χρονική στιγμή $t_1 = 1,2\text{s}$:

$$P_1 = I_1^2 \cdot R_{\text{ολ}} \Rightarrow P_1 = 0,0225\text{W}$$

και τη χρονική στιγμή $t_1 = 3\text{s}$ επειδή το ρεύμα είναι μηδέν:

$$P_2 = 0$$

Η ολική θερμότητα που αποδίδεται το χρονικό διάστημα $\Delta t = 3\text{s}$:

$$Q_{\text{ολ}} = Q_1 + Q_2 = Q_1 = I_1^2 \cdot R_{\text{ολ}} \cdot \Delta t \Rightarrow Q_{\text{ολ}} = 0,045\text{J}$$

Δ3. Η γενική μορφή της εξίσωσης της εναλλασσόμενης τάσης που προκύπτει από την περιστροφή του πλαισίου μέσα στο ομογενές μαγνητικό πεδίο είναι:

$$v = V \eta \mu(\omega t + \varphi_0)(1)$$

όπου το πλάτος της εναλλασσόμενης τάσης:

$$V = N \cdot \omega \cdot B \cdot A = 300 \cdot \sqrt{2}\text{V}$$

Αφού γνωρίζουμε ότι $\varphi_0 = 0$, η (1) γίνεται:

$$v = 300 \cdot \sqrt{2} \cdot \eta \mu(100 \cdot \sqrt{2} \cdot t)(\text{S.I.})$$

Δ4. Όταν συνδέουμε την R_2 στο κύκλωμα η συνολική αντίσταση γίνεται:

$$R_{\Sigma} = R_{\text{ολ}} + R_2 = 100\Omega + 50\Omega = 150\Omega$$

Το κύκλωμα κλείνει και η ενεργός τιμή του ρεύματος είναι:

$$I_{\text{ev}} = \frac{V_{\text{ev}}}{R_{\Sigma}} = \frac{\frac{V}{\sqrt{2}}}{R_{\Sigma}} = \frac{V}{\sqrt{2} \cdot R_{\Sigma}} \Rightarrow I_{\text{ev}} = 2\text{A}$$

25ο Διαγώνισμα (Δ25)

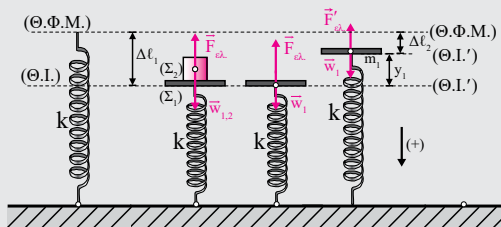
ΘΕΜΑ Α

A1. γ), A2. δ), A3. γ), A4. α)
A5. α) Σ, β) Λ, γ) Λ, δ) Σ, ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

B1. Σωστή απάντηση είναι η γ).

Δικαιολόγηση



Αρχικά το σύστημα των δύο σωμάτων ισορροπεί σε θέση όπου το ελατήριο είναι συσπειρωμένο τόσο, ώστε με την κατακόρυφη προς τα πάνω δύναμη που ασκεί, να εξουδετερώνει τα βάρη των δύο σωμάτων (Θ.Ι.). Κάνουμε ένα ελεύθερο διάγραμμα δυνάμεων στην κατακόρυφη διεύθυνση $y'y$ και εφαρμόζουμε συνθήκη ισορροπίας:

$$\begin{aligned}\Sigma F_{\Theta, I} &= 0, m_1 g + m_2 g - k \Delta l_1 = \\ &= 0, k \Delta l_1 = (m_1 + m_2) g \quad (1)\end{aligned}$$

Οπότε προκύπτει:

$$\Delta l_1 = \frac{(m_1 + m_2) \cdot g}{k} = \frac{3m_2 g}{k} \quad (2)$$

Όταν αφαιρέσαμε το σώμα Σ_2 , το σύστημα δε βρίσκεται πλέον σε κατάσταση ισορροπίας. Το σώμα Σ_1 , βρίσκεται αυτήν τη στιγμή κάτω από τη δική του θέση ισορροπίας (Θ.Ι') κατά y_1 .

Στη νέα θέση ισορροπίας (Θ.Ι') του σώματος Σ_1 , με τη βοήθεια ελεύθερου διαγράμματος δυνάμεων, εφαρμόζουμε συνθήκη ισορροπίας:

$$\Sigma F_{\Theta, I'} = 0, m_1 g - k \Delta l_2 = 0, k \Delta l_2 = m_1 g \quad (3)$$

Οπότε προκύπτει:

$$\Delta l_2 = \frac{m_1 g}{k} = \frac{2m_2 g}{k} = \frac{2}{3} \cdot \Delta l_1 \quad (4)$$

Με τη βοήθεια ελεύθερου διαγράμματος δυνάμεων που δέχεται το σώμα Σ_1 , στη θέση όπου αφαιρέσαμε το Σ_2 , έχουμε:

$$\Sigma F = m_1 g - \Delta l_1 = k \Delta l_2 - k \Delta l_1 = -k y_1$$

Δείξαμε ότι το σώμα Σ_1 που απομένει μόνο του πάνω στο ελατήριο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση σταθεράς k . Ο ζητούμενος λόγος τη στιγμή που αφαιρέσαμε το Σ_2 , είναι:

$$\begin{aligned}\frac{U_{ελ}}{U_{ταλ}} &= \frac{\frac{1}{2} k \cdot \Delta l_1^2}{\frac{1}{2} k \cdot y_1^2} = \frac{\Delta l_1^2}{(\Delta l_1 - \Delta l_2)^2} = \\ &= \frac{\Delta l_1^2}{\left(\Delta l_1 - \frac{2}{3} \Delta l_1\right)^2} = 9\end{aligned}$$

B2. Σωστή απάντηση είναι η α).

Δικαιολόγηση

Το σημείο (Α) εκτελεί σύνθετη κίνηση, μία μεταφορική και μία περιστροφική και τη στιγμή που το νόμισμα εγκαταλείπει το χέρι μας έχει μηδενική ταχύτητα, οπότε:

$$v_A = v_o - \omega \frac{L}{2} = 0 \Rightarrow \omega = \frac{2v_o}{L} (1)$$

Για την κατακόρυφη προς τα πάνω κίνηση του κέντρου μάζας (Κ) εφαρμόζουμε τις εξισώσεις κίνησης από τη στιγμή που το νόμισμα εγκαταλείπει το χέρι μας μέχρι να φτάσει στο ύψος h :

$$v_{τελ} = v_o - gt \Rightarrow 0 = v_o - gt \Rightarrow$$

$$t = \frac{v_o}{g} (2) \quad h = v_o t - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow v_o^2 = 2gh (3)$$

Επειδή στο νόμισμα δεν ασκούνται ροπές κατά τη διάρκεια της κίνησής του η γωνιακή του ταχύτητα ω παραμένει σταθερή, συνεπώς η γωνία φ που περιστρέφεται με τη βοήθεια των σχέσεων (1), (2) και (3) είναι:

$$\varphi = \omega t = \frac{2v_o}{L} \cdot \frac{v_o}{g} \Rightarrow \varphi = \frac{2v_o^2}{Lg} \Rightarrow \varphi = \frac{4h}{L} (4)$$

Άρα ο αριθμός N , των περιστροφών που θα εκτελέσει το νόμισμα μέχρι τη στιγμή που το κέντρο μάζας (Κ) φτάσει στο ύψος h , είναι:

$$N = \frac{\Phi}{2\pi} \Rightarrow N = \frac{4h}{2\pi} \Rightarrow N = \frac{2h}{\pi L}$$

B3. Σωστή απάντηση είναι η γ).

Δικαιολόγηση

Μεταξύ των σημείων (Α) και (Β) έχουμε συμβολή με αποτέλεσμα τη δημιουργία στάσιμου κύματος. Η απόσταση δύο διαδοχικών κοιλιών ή δεσμών είναι $\frac{\lambda}{2}$. Στα σημεία (Κ)

και (Λ) έχουμε αντίστοιχα δύο δεσμούς και ανάμεσα τους δύο κοιλίες, άρα και έναν επιπλέον δεσμό.

Έτσι: $KL = \lambda = 1,5m$

Από την εξίσωση $v = \lambda f \Rightarrow v = 6 \frac{m}{s}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Σύμφωνα με τη φωτοηλεκτρική εξίσωση του Einstein: $K = hf - \phi(1)$

Για να εξέλθει το φωτοηλεκτρόνιο από τη μεταλλική επιφάνεια πρέπει:

$$hf - \phi \geq 0 \Rightarrow h \frac{c}{\lambda} \geq \phi \Rightarrow \lambda \leq \frac{hc}{\phi} \Rightarrow$$

$$\lambda_{\max} = \frac{hc}{\phi} = \frac{1200eV \cdot nm}{12eV} \Rightarrow \lambda_{\max} = 100nm$$

Άρα το μέγιστο μήκος κύματος της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας είναι 100nm και βρίσκεται στην περιοχή της **υπεριώδους ακτινοβολίας**.

Γ2. Τα φωτοηλεκτρόνια μάζας m_e , εξέρχονται από το μέταλλο με σχεδόν μηδενική ταχύτητα και κατόπιν επιταχύνονται στον επιταχυντή, αποκτώντας ταχύτητα μέτρου v . Άρα σύμφωνα με την αρχή διατήρησης ενέργειας έχουμε:

$$W = K \Rightarrow eV = \frac{1}{2} m_e v_{\min}^2 \Rightarrow v_{\min} = \sqrt{\frac{2eV}{m_e}} (2)$$

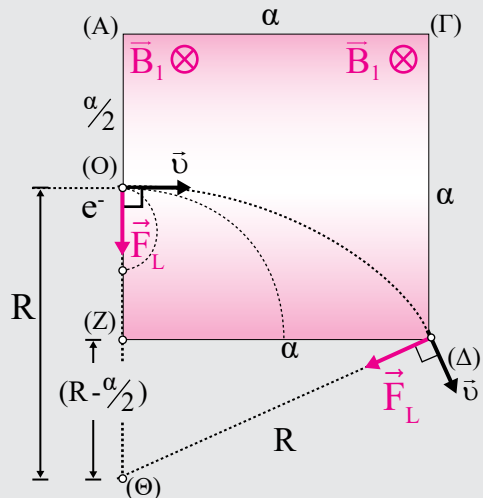
Ακολουθώντας τα φωτοηλεκτρόνια εισέρχονται στο ομογενές μαγνητικό πεδίο διαγράφοντας ένα ημικύκλιο με διάμετρο $(OH) = 2R_{\min}$, οπότε:

$$R_{\min} = \frac{m_e v_{\min}}{Be} \Rightarrow R_{\min} = \frac{m_e}{Be} \cdot \sqrt{\frac{2eV}{m_e}} \Rightarrow$$

$$R_{\min} = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2m_e V}{e}} \Rightarrow R_{\min} = 17,07 \cdot 10^{-3} m$$

Συνεπώς, η ελάχιστη απόσταση από το σημείο Ο που εξέρχονται τα φωτοηλεκτρόνια από το μαγνητικό πεδίο είναι:

$$(OH) = 2R_{\min} \Rightarrow (OH) = 34,14 \cdot 10^{-3} m$$



Γ3. Τα φωτοηλεκτρόνια που εξέρχονται από το σημείο (Δ), δέχονται δύναμη Lorentz F_L σε κάθε σημείο της τροχιάς τους εντός του μαγνητικού πεδίου, άρα και στα σημεία εισόδου (Ο) και εξόδου (Δ). Δεδομένου ότι η F_L είναι κάθετη στην ταχύτητα v , συμπεραίνουμε ότι το κέντρο (Θ) της κυκλικής τροχιάς που διαγράφουν τα φωτοηλεκτρόνια, είναι το σημείο τομής των διευθύνσεων των δυνάμεων αυτών. Από το τρίγωνο $Z\Delta\Theta$ έχουμε:

$$(\Theta\Delta)^2 = (Z\Theta)^2 + \alpha^2 \Rightarrow$$

$$R^2 = \left(R - \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \alpha^2 \Rightarrow R = \frac{5\alpha}{4} = 0,1\text{m}$$

Το μέτρο της ταχύτητας v του φωτοηλεκτρονίου στο σημείο (O) υπολογίζεται ως εξής:

$$R = \frac{m_e v}{Be} \Rightarrow v = \frac{BeR}{m_e} = 0,44 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Η κινητική ενέργεια K_O κάθε φωτοηλεκτρονίου στο σημείο (O), δηλαδή η κινητική ενέργεια εξόδου από τον επιταχυντή είναι:

$$K_O = \frac{1}{2} m_e v^2 = 0,88 \cdot 10^{-15} \text{ J}$$

και επειδή $1\text{eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$, η κινητική ενέργεια K_O κάθε φωτοηλεκτρονίου είναι $K_O = 5500\text{eV}$.

Σύμφωνα με την αρχή διατήρησης ενέργειας τα φωτοηλεκτρόνια που εξαγονται από τη μεταλλική επιφάνεια έχουν κινητική ενέργεια K_φ , που υπολογίζεται ως εξής:

$$K_O = K_\varphi + eV \Rightarrow K_\varphi = K_O - eV = 5340\text{eV}$$

Συνεπώς, σύμφωνα με τη φωτοηλεκτρική εξίσωση του Einstein (1) έχουμε:

$$K_\varphi = hf - \varphi \Rightarrow K_\varphi = h \frac{c}{\lambda} - \varphi \Rightarrow$$

$$\lambda = \frac{hc}{K_\varphi + \varphi} \Rightarrow \lambda = \frac{1200\text{eV} \cdot \text{nm}}{5352\text{eV}} \Rightarrow$$

$$\lambda = 0,22\text{nm}$$

Άρα το μήκος κύματος της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας είναι $0,22\text{nm}$ και βρίσκεται στην περιοχή των **ακτίνων X**.

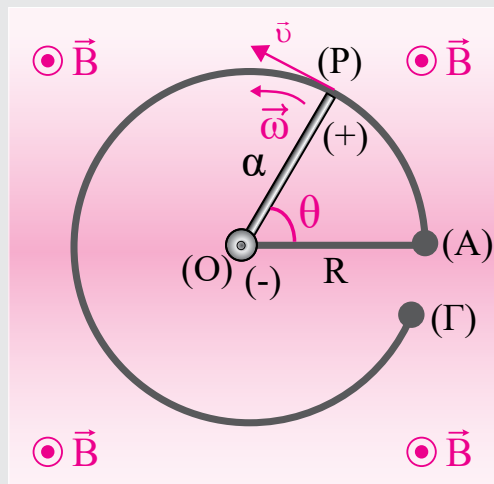
ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του άκρου (P) της ράβδου δίνεται από τη σχέση:

$$v = \omega(OP) = \omega \cdot \alpha \Rightarrow v = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Η επαγωγική ΗΕΔ στα άκρα της περιστρεφόμενης ράβδου έχει μέτρο:

$$E_{\text{επ}} = \frac{B\omega\alpha^2}{2} \Rightarrow E_{\text{επ}} = 0,125\text{V}$$



Η πολικότητα της επαγωγικής ΗΕΔ προκύπτει με τον κανόνα του δεξιού χεριού και απεικονίζεται στο παραπάνω σχήμα.

Δ2. Τη χρονική στιγμή $t_1 = 0,25\text{s}$ ο αγωγός έχει διαγράψει γωνία:

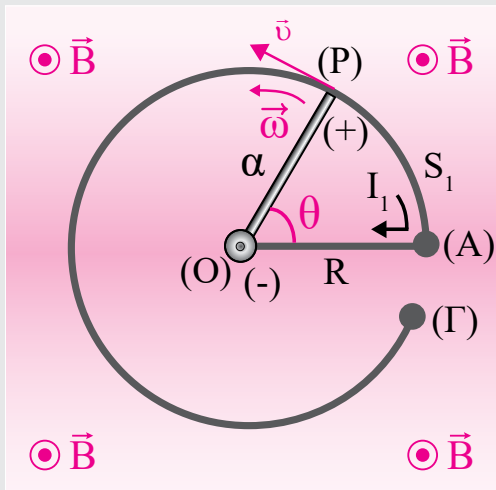
$$\theta_1 = \omega t_1 = 2 \frac{\text{rad}}{\text{s}} 0,25\text{s} = 0,5\text{rad}$$

Το τόξο AP έχει μήκος:

$$(AP) = \alpha\theta_1 = 0,5 \cdot 0,5\text{m} = 0,25\text{m}.$$

Ο αγωγίμος βρόχος POAP έχει μήκος:

$$d_1 = (AP) + \alpha + R = 0,25\text{m} + 0,5\text{m} + 0,5\text{m} = 1,25\text{m}$$



Η αντίσταση του βρόχου τη χρονική στιγμή t_1 είναι $R_1 = R \cdot d_1 = 5 \frac{\Omega}{m} 1,25m = 6,25\Omega$. Το ρεύμα που διαρρέει τον βρόχο είναι:

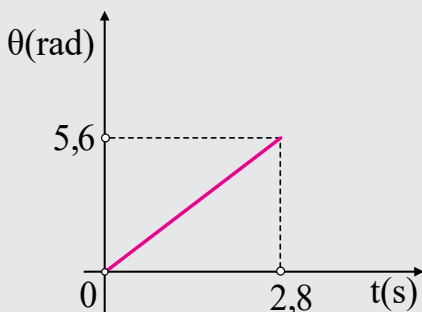
$$I_1 = \frac{E_{\text{επ}}}{R_1} \Rightarrow I_1 = 0,02A$$

Δ3. Η ράβδος εκτελεί ομαλή στροφική κίνηση, οπότε η επίκεντρη γωνία που διαγράφει δίνεται από τη σχέση:

$$\theta = \omega t \Rightarrow \theta = 2t \text{ (S.I.)}$$

Για να φτάσει το άκρο P της ράβδου στο σημείο Γ χρειάζεται χρόνο $t_{\text{ολ}} = \frac{s_{A\Gamma}}{v} = \frac{2,8}{1} s = 2,8s$.

Για τη γραφική παράσταση της γραμμικής σχέσης χρειαζόμαστε δύο σημεία. Για $t = 0$, ισχύει $\theta = 0$. Για $t = 2,8s$ προκύπτει ότι $\theta = 2 \cdot 2,8 \text{ rad} = 5,6 \text{ rad}$. Η γραφική παράσταση $\theta = f(t)$ είναι η επόμενη.

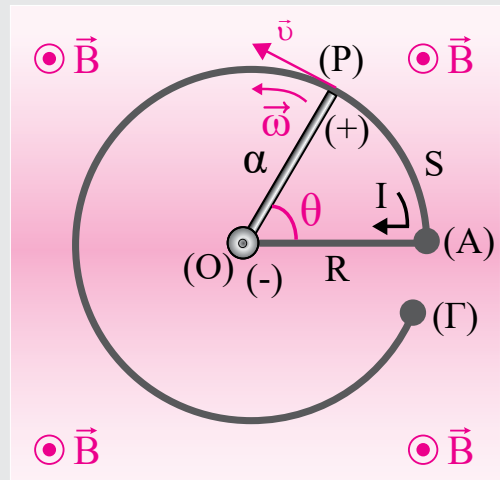


Δ4. Έστω ότι η ράβδος, τη χρονική στιγμή t , έχει περιστραφεί κατά επίκεντρη γωνία θ . Το τόξο AP έχει μήκος $(AP) = vt = t$.

Ο αγώγιμος βρόχος POAP έχει μήκος $d = (AP) + \alpha + R = (t+1)m$.

Η αντίσταση του βρόχου τη χρονική στιγμή t είναι $R = R^* d = 5(t+1)$ στο (S.I.). Σύμφωνα με τον νόμο του Ohm, η ένταση του ρεύματος στον βρόχο θα είναι:

$$I = \frac{E_{\text{επ}}}{R} = \frac{0,125}{5(t+1)} \Rightarrow I = \frac{0,025}{t+1} \text{ S.I., } 0 \leq t \leq 2,8s$$



Η ελάχιστη τιμή της έντασης του ρεύματος θα διαρρέει τον βρόχο όταν το άκρο (P) φτάσει στο σημείο (Γ). Η τιμή είναι:

$$I_{\min} = \frac{0,025}{2,8+1} \Rightarrow I_{\min} = \frac{1}{152} A$$